SCHAUM'S
ouTlines

全美经典学习指导系列

数理金融引论

〔美〕E. T. 道林 著

荣喜民　于秀云　张凤玲 译

- 710道有完全解答的习题
- 对微积分及其在金融中应用的简洁说明
- 覆盖优秀金融教科书的分支，并作有益补充
- 理想的考前复习资料

科学出版社

麦格劳－希尔教育出版集团

〔O-1530.0101〕
责任编辑：陈玉琢

SCHAUM'S ouTlines

全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

概率和统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学

2000工程力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路

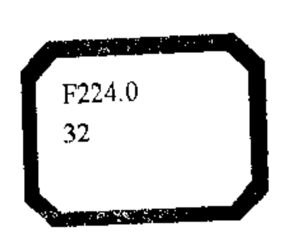
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009711-4





ISBN 7-03-009711-4/O · 1530
定 价：36.00 元



全美经典学习指导系列

数理金融引论

〔美〕E. T. 道林 著

荣喜民 于秀云 张凤玲 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书自第一版发行以来,20多年来在美国非常畅销(第一版名为《经济数学》,《数理经济学引论》是其第三版)本书为经济学家、社会科学家及商业专业学生提供了大量所需的数学内容.

本书强调的是概念的实际背景及在经济、金融和社会中的应用,为读者学习数学及如何在实际中使用数学指明了方向.全书共分21章,对微积分、微分方程、矩阵代数、线形规划的基本原理及其在经济中的应用进行了介绍,书中还涉及对数微分、曲线区域、l'Hopital法则和联立微分和差分方程等内容.书中包括1600多个有详细解答的问题及大量的例子.许多例子与习题都非常有代表性,将经济金融问题用所学的数学加以描述.这样既说明了数学概念的经济金融的含义,同时也为经济金融问题提供了解决方法.

本书可作为从事非数学类,特别是经济数学的教师和学生的重要参考书,也会对宏微观经济学教学及学习起到非常重要的帮助,因此也是从事这方面教学与研究人员的一本非常好的参考书.

Edward T. Dowling: Schaum's Outline of Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economics, Third edition

ISBN: 0-07-135896-X

图字:01-2001-1756号

图书在版编目(CIP)数据

数理金融引论/(美)道林著;荣喜民,于秀云,张凤玲译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009711-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①道… ②荣… ③于… ④张… Ⅲ.数理经济学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第055587号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第一版 开本:A4(890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张:26 3/4

印数:1—5 000 字数:769 000

定价:36.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前 言

在过去的几年中，用于经济和商业研究所需的数学在继续增长。这对学生和教员就有了更高的要求。《数理金融引论》第三版引入了三章新内容。一章是关于比较静力学及凹规划的内容，一章是关于联立微分及差分方程组的内容，另一章是关于控制论的内容。为了保持这本书的合理篇幅，第二版中的某些章节不得不被删除。删除的部分包括三章有关线性规划的内容以及一些有关基础内容的小节，如平方的展开和组合。删除这些内容在某种程度上是因为它们能够在最近的 Schaum 系列书籍中的一本题为“商业和经济学中的数学方法”中找到。

自第一版发行以来的 20 多年中这本书的内容都没有改变。第一版名为《经济数学》。《数理金融引论》是第三版，为经济学家、社会科学家以及商业专业学生现在所需要了解的大量的数学内容，例如，线性代数、微积分学、非线性规划、微分及差分方程、变分法以及最优控制理论，提供了完整且简单易懂的介绍。本书也对基本代数作了简短的回顾以便那些对代数生疏了的读者阅读。本书还为日常经济问题及经济方面的问题提供了直接、常用、实际的应用例子。

每章的“理论-被解决的问题”的形式给出了简明的说明，这些说明又被例题和大量的带全部解答的问题所阐明。论题和相关的问题在难易程度上的安排是从简单的数学运算到复杂的应用。在本书的开始，对数学熟练程度的要求不超过高中。“实践-学习”教学法将会使学生以适合自己的速度进步并选择满足自己需要的书籍。

那些需要更多的时间和帮助才能开始学习一些基本问题的读者可能会感到从“商业及经济学中的数学方法学习指导”一书开始，或以它作为辅助材料进行学习会更合适一些。本书为学习本专业提供了的一个很好的方法。另一方面，那些喜欢更严密的推理和更多的理论知识的读者可能发现学习“商业、经济及社会科学中的积分学习指导”一书会有更大的收获。本书将更多的篇幅用于理论和构造基础上。

《数理金融引论》第三版可单独使用，也可作为经济、商业以及社会科学专业本科生和研究生的辅助教材。从第一章对高中代数的基本复习开始，本书对以后章节要用的概念及方法都作了解释。

由于在介绍微积分和线性代数的顺序上没有完全统一的看法，如果需要，书中有关线性代数的第十章和第十一章的内容可以在第二章之后立刻学习，而不失连续性。

本书包括了 1600 多个有详细解答的问题。为了从书中获得最大的收益，学生应该争取尽快做到在脱离解答的情况下学习。这可以通过合上书本，然后将问题独立解在纸上来完成。如果遇到困难，可以再到书中查找答案。

为了获得最佳的效果，学生决不能满足于被动的学习——仅仅能仿效和理解书中介绍的许多方法步骤的能力。掌握这门课程并在考试中获得好成绩需要积极的学习——在任何状况下，不用书本的帮助都能解决问题的能力。

经验证明具有不同的学习背景和能力的学生，如果他们专心致志地学习全部问题和例子，就能成功地掌握这门课程中出现的相关问题。

最后，作者要感谢在福德姆的朋友及同事 D. 萨尔瓦托雷博士。感谢他在过去的 25 年中对作者不懈的鼓励和支持。同时要感谢作者的非常优秀的研究生 R. 德雷尔对手稿的校对以及对答案的准确性的核实。作者还要感谢麦克劳-希尔的全体员工，特别是 B. 古尔森，T. 卡梅伦，M. B. 沃尔克，D. 阿伦森。

E. T. 道林

目　录

第一章 回　　顾

1.1 指数

设 n 是一个整数，x^n 表示 n 个 x 相乘．这里 x 称为底，n 称为指数．约定指数 1 不用写出：$x^1=x$，$8^1=8$．定义非零的数或变量的零次方等于 1：$x^0=1, 3^0=1$．0^0 没有定义．在下面的讨论中，假设 a 和 b 是正整数，x 和 y 是实数．下列是指数运算法则，例解见例 1，例 2 和问题 1.1．

1. $x^a(x^b)=x^{a+b}$
2. $\dfrac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$
3. $(x^a)^b=x^{ab}$
4. $(xy)^a=x^ay^a$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a=\dfrac{x^a}{y^a}$
6. $\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$
7. $\sqrt{x}=x^{1/2}$
8. $\sqrt[a]{x}=x^{1/a}$
9. $\sqrt[b]{x^a}=x^{a/b}=(x^{1/b})^a$
10. $x^{-(a/b)}=\dfrac{1}{x^{a/b}}$

例 1　从法则 2，很容易看到，为什么一切变量或非零数的零次方等于 1．例如：$x^3/x^3=x^{3-3}=x^0=1$；$8^5/8^5=8^{5-5}=8^0=1$．

例 2　在乘法中，相同变量的指数相加；在除法中，相同变量的指数相减；对于自乘，指数相乘，正如上面的法则及如下例子中的括号里所描述的．

a) $x^2(x^3)=x^{2+3}=x^5\neq x^6$　　　（法则 1）

$$[x^2(x^3)=(x\cdot x)(x\cdot x\cdot x)=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=x^5]$$

b) $\dfrac{x^6}{x^3}=x^{6-3}=x^3\neq x^2$　　　（法则 2）

$$\left[\frac{x^6}{x^3}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x}=x\cdot x\cdot x=x^3\right]$$

c) $(x^4)^2=x^{4\cdot 2}=x^8\neq x^{16}$　或　x^6　　　（法则 3）

$$[(x^4)^2=(x\cdot x\cdot x\cdot x)(x\cdot x\cdot x\cdot x)=x^8]$$

d) $(xy)^4=x^4y^4\neq xy^4$　　　（法则 4）

$$[(xy)^4=(xy)(xy)(xy)(xy)=(x\cdot x\cdot x\cdot x)(y\cdot y\cdot y\cdot y)=x^4y^4]$$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^5=\dfrac{x^5}{y^5}\neq\dfrac{x^5}{y}$　或　$\dfrac{x}{y^5}$　　　（法则 5）

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^5=\frac{(x)}{(y)}\frac{(x)}{(y)}\frac{(x)}{(y)}\frac{(x)}{(y)}\frac{(x)}{(y)}=\frac{x^5}{y^5}\right]$$

f) $\dfrac{x^3}{x^4}=x^{3-4}=x^{-1}=\dfrac{1}{x}\neq x^{3/4}$　　　（法则 2 和 6）

$$\left[\frac{x^3}{x^4}=\frac{x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x\cdot x}=\frac{1}{x}\right]$$

g) $\sqrt{x}=x^{1/2}$　　　（法则 7）

因为 $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$，并且由法则 1，在乘法中，同底的指数相加，对 $\sqrt{x}$ 的指数自己相加等于 1．$\sqrt{x}$ 的指数是 $\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$，则 $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x^{1/2}\cdot x^{1/2}=x^{1/2+1/2}=x^1=x$．

h) $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$　　　（法则 8）

正如 $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x$，因此 $x^{1/3}\cdot x^{1/3}\cdot x^{1/3}=x^{1/3+1/3+1/3}=x^1=x$．

i) $x^{3/2}=(x^{1/2})^3$ 或 $(x^3)^{1/2}$ (法则 9)

$[4^{3/2}=(4^{1/2})^3-(\sqrt{4})^3=(\pm 2)^3=\pm 8$ 或 $4^{3/2}=(4^3)^{1/2}=(64)^{1/2}=\sqrt{64}=\pm 8]$

j) $x^{-2/3}=\dfrac{1}{x^{2/3}}=\dfrac{1}{(x^{1/3})^2}$ 或 $\dfrac{1}{(x^2)^{1/3}}$ (法则 10)

$\left[27^{-2/3}=\dfrac{1}{(27^{1/3})^2}=\dfrac{1}{(3)^2}=\dfrac{1}{9}\right.$ 或 $\left.27^{-2/3}=\dfrac{1}{(27^2)^{1/3}}=\dfrac{1}{(729)^{1/3}}=\dfrac{1}{9}\right]$

见问题 1.1.

1.2 多项式

给定一个表达式 $5x^3$. 因为 x 可假定为一切不同的值，所以称 x 为变量. 称 5 为 x 的系数. 实数或一个系数乘以一个变量或变量的正整数幂称为单项式. 单项式相加、减形成多项式. 组成多项式的每个单项式称为一项. 有相同变量和相同指数的项称为同类项. 多项式的加、减、乘和除的法则在例 3 中给出. 问题 1.2 和 1.4 做了讨论.

例 3 同类项能够通过它们的系数相加减而相加减，非同类项不能相加减. 见问题 1.2 和 1.3.

a) $4x^5+9x^5=13x^5$ b) $12xy-3xy=9xy$

c) $(7x^3+5x^2-8x)+(11x^3-9x^2-2x)=18x^3-4x^2-10x$

d) $(24x-17y)+(6x+5z)=30x-17y+5z$

例 4 通过系数和变量的相乘除，同类项和非同类项相乘除.

a) $(5x)(13y^2)=65xy^2$ b) $(7x^3y^5)(4x^2y^4)=28x^5y^9$

c) $(2x^3y)(17y^4z^2)=34x^3y^5z^2$ d) $\dfrac{15x^4y^3z^6}{3x^2y^2z^3}=5x^2yz^3$

e) $\dfrac{4x^2y^5z^3}{8x^5y^3z^4}=\dfrac{y^2}{2x^3z}$

例 5 两个多项式相乘时，第一个多项式的每一项必须乘以第二个多项式的每一项，然后将乘积相加. 见问题 1.4.

$$(6x+7y)(4x+9y)=24x^2+54xy+28xy+63y^2$$
$$=24x^2+82xy+63y^2$$
$$(2x+3y)(8x-5y-7z)=16x^2-10xy-14xz+24xy-15y^2-21yz$$
$$=16x^2+14xy-14xz-21yz-15y^2$$

1.3 方程:线性和二次

两个互相相等的代数式的数学表示称为方程. 所有变量都是一次的方程称为线性方程. 通过移动未知变量到等式左端，其他项移动到等式右端，可以求解线性方程，如例 6. 形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程称为二次方程，这里 a, b 和 c 是常数，且 $a\neq 0$. 可通过因式分解或二次公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.1}$$

求解二次方程. 用因式分解求二次方程见例 7；用二次公式求解见例 8 和问题 1.6.

例 6 下列线性方程可以由三个简单步骤求解：

$$\frac{x}{4}-3=\frac{x}{5}+1$$

解 ☞ 1. 通过在方程两端减去 $x/5$，移动含有未知变量的项到方程左端.

$$\frac{x}{4}-3-\frac{x}{5}=1$$

2.通过在方程两端加 3，移动不含未知变量的项到等式右端.

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1+3=4$$

3.通过在方程两端乘 20，且相减. 简化方程直到左端是未知变量，右端是解.

$$20\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\right)=4\cdot 20$$

$$5x-4x=80$$

$$x=80$$

例 7 当因式容易确认时，因式分解是求解二次方程最简单的方法.

$$x^2+13x+30=0$$

解 ☞ 因式分解可得

$$(x+3)(x+10)=0$$

因为$(x+3)(x+10)$等于 0，$x+3$ 或 $x+10$ 必须等于 0. 设每个式子为 0，解出 x.

$$x+3=0 \qquad x+10=0$$

$$x=-3 \qquad x=-10$$

希望对因式分解和其他基本数学技巧有更深了解的读者可参考作者的另一本书，《商业和经济学中的数学方法 Schaum 概述》，进一步，得到训练.

例 8 用二次公式解下列二次方程

$$5x^2-55x+140=0.$$

解 ☞ 代 $a=5$，$b=-55$，$c=140$ 到公式(1.1)得

$$x=\frac{-(-55)\pm\sqrt{(-55)^2-4(5)(140)}}{2(5)}$$

$$=\frac{55\pm\sqrt{3025-2800}}{10}=\frac{55\pm\sqrt{225}}{10}=\frac{55\pm 15}{10}$$

$+15$ 和 -15 可得两个解

$$x=\frac{55+15}{10}=7 \qquad x=\frac{55-15}{10}=4$$

见问题 1.6.

1.4 联立方程

求解二个方程或多个方程的联立方程组，(1) 这些方程必须是相容的(不矛盾)，(2) 必须是相互独立的(非相互倍数)，(3) 有与相容的和独立的方程数相同的变量. 联立线性方程组可以用代入消元法求解. 如例 9 和问题 2.11～2.16 及用在 11.8 和 11.9 节的线性代数中的方法.

例 9 奶油和人造奶油这两个市场的均衡条件由(1.2)和(1.3)给出，这里 P_b 和 P_m 分别是奶油和人造奶油的价格.

$$8P_b-3P_m=7 \tag{1.2}$$

$$-P_b+7P_m=19 \tag{1.3}$$

使模型均衡的价格可用如下代入消元法得到.

解 ☞ **代入法**

1.解其中一个方程，一个变量用其他项表示，在(1.3)中解 P_b.

$$P_b=7P_m-19$$

2.代这个解到其他方程，这里为(1.2)，解出 P_m.

$$8P_b-3P_m=7$$

$$8(7P_m - 19) - 3P_m = 7$$
$$56P_m - 152 - 3P_m = 7$$
$$53P_m = 159$$
$$P_m = 3$$

3. 把 $P_m = 3$ 代入(1.2)和(1.3)得 P_b.

$$8P_b - 3(3) = 7$$
$$8P_b = 16$$
$$P_b = 2$$

消元法

1.用(1.3)的 P_b(或 P_m)的系数乘(1.2), 用(1.2)的系数 P_b(或 P_m)乘(1.3). 取 P_m, 得到

$$7(8P_b - 3P_m = 7) \qquad 56P_b - 21P_m = 49 \tag{1.4}$$
$$-3(-P_b + 7P_m = 19) \qquad 3P_b - 21P_m = -57 \tag{1.5}$$

2.(1.4)减(1.5)消去所选变量

$$53P_b = 106$$
$$P_b = 2$$

3.代 $P_b = 2$ 到(1.4)或(1.5),如代入法第3步, 求出 P_m.

1.5 函数

对每个变量(x), 通过规律 f, 有惟一值[$f(x)$]与 x 对应, 则 f 称为函数. 这里 x 称为自变量, $f(x)$称为在 x 处的函数值. 函数的定义域指所有使函数有意义的 x 的集合, 值域指所有值 $f(x)$的集合. 函数通常用代数式定义, 如例10中的示例. 另外,字母如 g, h 或希腊字母ϕ 也用来表示函数. 经济学中常用的函数有

线性函数: $f(x) = mx + b$

二次函数: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

n 次多项式: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad$ (n 为非负整数; $a_n \neq 0$)

有理函数: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

这里 $g(x)$和 $h(x)$都是多项式, 且 $h(x) \neq 0$.(注: 有理函数来自于比例.)

幂函数: $f(x) = ax^n \quad$ (n = 一切实数)

例 10 函数 $f(x) = 8x - 5$ 表示这样一个规律: 一个数乘以8, 然后减去5. 如果 x 给定, 并用给定的值代入函数, 则求出 $f(x)$. 例如, 如果 $x = 3$,

$$f(x) = 8(3) - 5 = 19$$

如果 $x = 4$,

$$f(x) = 8(4) - 5 = 27$$

见问题1.7~1.9.

例 11 下面给出了不同的函数:

线性函数: $f(x) = 7x - 4 \quad g(x) = -3x \quad h(x) = 9$

二次函数: $f(x) = 5x^2 + 8x - 2 \quad g(x) = x^2 - 6x \quad h(x) = 6x^2$

多项式函数: $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 9x + 5 \quad g(x) = 2x^5 - x^3 + 7$

有理式函数: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 4}(x \neq -4) \quad g(x) = \dfrac{5x}{x - 2}(x \neq 2)$

幂函数: $f(x) = 2x^6 \quad g(x) = x^{1/2} \quad h(x) = 4x^{-3}$

1.6 图，斜率和截距

作函数 $y=f(x)$ 的图像. x 位于水平轴上，称为独立变量；y 位于垂直轴上，称为相关变量. 线性函数的图像是一条直线，直线的斜率用 y 的变化 Δy 除以 x 的变化 Δx 来测度. 斜率表示直线的陡度和方向，斜率的绝对值越大，直线越陡. 正的斜率的直线从左向右上升；反之，直线向下. 对于水平直线，由于 $\Delta y=0$，其斜率为零. 对于垂线，由于 $\Delta x=0$，斜率没有定义，即由于不可能用零除，所以其不存在. 截距 y 是图像通过 y 轴的点；其当 $x=0$ 时得到. 截距 x 是图像通过 x 轴的点；其当 $y=0$ 时得到. 见问题 1.10.

例 12 作线性方程 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 的图像只需找出满足方程的两个点，然后将它们联接即可. 由于线性函数的图像是直线，所以所有满足方程的点都落在此直线上.

解 ☞ 找 y 截距. 设 $x=0$，解得 $y=-\frac{1}{4}(0)+3$，$y=3$. y 截距是点 $(x,y)=(0,3)$. 找 x 截距. 设 $y=0$，解 x，则 $0=-\frac{1}{4}x+3$，$\frac{1}{4}x=3$，$x=12$. x 截距是点 $(x,y)=(12,0)$. 标出点 $(0,3)$ 和 $(12,0)$，然后用直线将它们连接起来. 如图 1-1 表示 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 的图像. 见例 13、14 及问题 1.10～1.12.

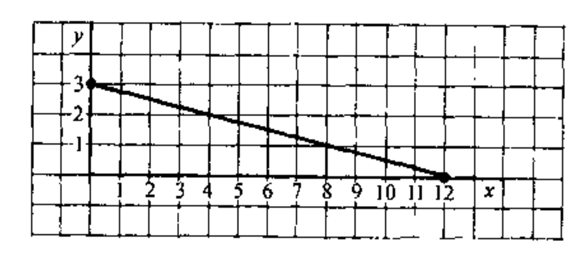


图 1-1

例 13 对于经过点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的直线，斜率计算如下：

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\quad (x_1\neq x_2)$$

对图 1-1，过点 $(0,3)$ 和 $(12,0)$ 的直线

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0-3}{12-0}=-\frac{1}{4}$$

且垂直截距为 $(0,3)$.

例 14 斜截式线性方程

$$y=mx+b\qquad (m,b\text{ 为常数})$$

解 ☞ 这条直线的斜率和截距可直接从方程中得到. 对于这样的方程，m 是直线的斜率，$(0,b)$ 是 y 截距，如问题 1.10，$(-\frac{b}{m},0)$ 是 x 截距. 从例 12 的方程中立即得到直线的斜率为 $-\frac{1}{4}$，y 截距为 $(0,3)$，x 截距为 $(12,0)$.

习 题 解 答

指数

1.1 用指数法则简化下列各式：

(a) $x^4\cdot x^5$

解 ☞

$$x^4\cdot x^5=x^{4+5}=x^9$$

(b) $x^7 \cdot x^{-3}$

解 ☞
$$x^7 \cdot x^{-3} = x^{7+(-3)} = x^4$$
$$\left[x^7 \cdot x^{-3} = x^7 \cdot \frac{1}{x^3} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = x^4\right]$$

(c) $x^{-2} \cdot x^{-4}$

解 ☞
$$x^{-2} \cdot x^{-4} = x^{-2+(-4)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$
$$\left[x^{-2} \cdot x^{-4} = \frac{1}{x \cdot x} \cdot \frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^6}\right]$$

(d) $x^2 \cdot x^{1/2}$

解 ☞
$$x^2 \cdot x^{1/2} = x^{2+(1/2)} = x^{5/2} = \sqrt{x^5}$$
$$\begin{aligned}[x^2 \cdot x^{1/2} &= (x \cdot x)(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x})(\sqrt{x}) = (x^{1/2})^5 = x^{5/2}]\end{aligned}$$

(e) $\frac{x^9}{x^3}$

解 ☞
$$\frac{x^9}{x^3} = x^{9-3} = x^6$$

(f) $\frac{x^4}{x^7}$

解 ☞
$$\frac{x^4}{x^7} = x^{4-7} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$
$$\left[\frac{x^4}{x^7} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}\right]$$

(g) $\frac{x^3}{x^{-4}}$

解 ☞
$$\frac{x^3}{x^{-4}} = x^{3-(-4)} = x^{3+4} = x^7$$
$$\left[\frac{x^3}{x^{-4}} = \frac{x^3}{1/x^4} = x^3 \cdot x^4 = x^7\right]$$

(h) $\frac{x^3}{\sqrt{x}}$

解 ☞
$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{1/2}} = x^{3-(1/2)} = x^{5/2} = \sqrt{x^5}$$

(i) $(x^2)^5$

解 ☞
$$(x^2)^5 = x^{2 \cdot 5} = x^{10}$$

(j) $(x^4)^{-2}$

解 ☞
$$(x^4)^{-2} = x^{4 \cdot (-2)} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$$

(k) $\frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{y^5}$

解 ☞
$$\frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{y^5} = x^{-5} \cdot y^{-5} = (xy)^{-5} = \frac{1}{(xy)^5}$$

(l) $\frac{x^3}{y^3}$

解 ☞
$$\frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

多项式

1.2 运算下列多项式：

(a) $3xy + 5xy$ (b) $13yz^2 - 28yz^2$ (c) $36x^2y^3 - 25x^2y^3$

(d) $26x_1x_2 + 58x_1x_2$ (e) $16x^2y^3z^5 - 37x^2y^3z^5$

解 ☞ (a) $8xy$, (b) $-15yz^2$, (c) $11x^2y^3$, (d) $84x_1x_2$, (e) $-21x^2y^3z^5$

1.3 多项式的加或减. 注意: 同项相加前, 减式的括号中每项的符号要改变.

(a) $(34x-8y)+(13x+12y)$

解 ☞
$$(34x-8y)+(13x+12y)=47x+4y$$

(b) $(26x-19y)-(17x-50y)$

解 ☞
$$(26x-19y)-(17x-50y)=9x+31y$$

(c) $(5x^2-8x-23)-(2x^2+7x)$

解 ☞
$$(5x^2-8x-23)-(2x^2+7x)=3x^2-15x-23$$

(d) $(13x^2+35x)-(4x^2+17x-49)$

解 ☞
$$(13x^2+35x)-(4x^2+17x-49)=9x^2+18x+49$$

1.4 做下列运算. 第一个多项式的每一项乘以第二个多项式的每一项, 然后乘积相加.

(a) $(2x+9)(3x-8)$

解 ☞
$$(2x+9)(3x-8)=6x^2-16x+27x-72=6x^2+11x-72$$

(b) $(6x-4y)(3x-5y)$

解 ☞
$$(6x-4y)(3x-5y)=18x^2-30xy-12xy+20y^2=18x^2-42xy+20y^2$$

(c) $(3x-7)^2$

解 ☞
$$(3x-7)^2=(3x-7)(3x-7)=9x^2-21x-21x+49=9x^2-42x+49$$

(d) $(x-y)(x-y)$

解 ☞
$$(x+y)(x-y)=x^2-xy+xy-y^2=x^2-y^2$$

解方程

1.5 通过移动未知变量到左端, 其他项移到右端, 然后经简化解出方程.

解 ☞ (a) $5x+6=9x-10$
$$\begin{aligned}5x+6&=9x-10\\5x-9x&=-10-6\\-4x&=-16\\x&=4\end{aligned}$$

(b) $26-2x=8x-44$
$$\begin{aligned}26-2x&=8x-44\\-2x-8x&=-44-26\\-10x&=-70\\x&=7\end{aligned}$$

(c) $9(3x+4)-2x=11+5(4x-1)$
$$\begin{aligned}9(3x+4)-2x&=11+5(4x-1)\\27x+36-2x&=11+20x-5\\27x-2x-20x&=11-5-36\\5x&=-30\\x&=-6\end{aligned}$$

(d) $\frac{x}{3}-16=\frac{x}{12}+14$
$$\begin{aligned}\frac{x}{3}-16&=\frac{x}{12}+14\\\frac{x}{3}-\frac{x}{12}&=14+16\end{aligned}$$

用最大公分母(LCD), 这里为 12, 乘以方程两边得
$$\begin{aligned}12\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{12}\right)&=30\cdot12\\4x-x&=360\\x&=120\end{aligned}$$

(e) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x-4}=\frac{7}{x}$ $[x\neq0,-4]$
$$\frac{5}{x}+\frac{3}{x+4}=\frac{7}{x}$$

用 LCD 乘方程两边得

$$x(x+4)\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{x+4}\right)=\frac{7}{x}\cdot x(x+4)$$

$$5(x+4)+3x=7(x+4)$$

$$8x+20=7x+28$$

$$x=8$$

1.6　用二次公式解下列二次方程：

解 ☞ (a)　$5x^2+23x+12=0$

用(1.1)，并将 $a=5$，$b=23$，$c=12$ 代入得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-23\pm\sqrt{(23)^2-4(5)(12)}}{2(5)}=\frac{-23\pm\sqrt{529-240}}{10}$$

$$=\frac{-23\pm\sqrt{289}}{10}=\frac{-23\pm17}{10}$$

$$x=\frac{-23+17}{10}=-0.6\qquad x=\frac{-23-17}{10}=-4$$

(b)　$3x^2-41x+26=0$

$$x=\frac{-(-41)\pm\sqrt{(-41)^2-4(3)(26)}}{2(3)}=\frac{41\pm\sqrt{1681-312}}{6}$$

$$=\frac{41\pm\sqrt{1369}}{6}=\frac{41\pm37}{6}$$

$$x=\frac{41+37}{6}=13\qquad x=\frac{41-37}{6}=\frac{2}{3}$$

函数

1.7　(a)　$f(x)=x^2+4x-5$，计算 $f(2)$和 $f(-3)$.

解 ☞ 将函数中的 x 用 2 代替，得

$$f(2)=(2)^2+4(2)-5=7$$

将函数中的 x 用 -3 代替，得

$$f(-3)=(-3)^2+4(-3)-5=-8$$

(b)　$f(x)=2x^3-5x^2+8x-20$，求 $f(5)$和 $f(4)$.

解 ☞

$$f(5)=2(5)^3-5(5)^2+8(5)-20=145$$

$$f(-4)=2(-4)^3-5(-4)^2+8(-4)-20=-260$$

1.8　在下图(图 1-2)中，用 y 代替$f(x)$作为函数的相关变量，指出哪一个图是函数的图像，哪一个不是.

解 ☞ 如果对每个 x，有且仅有一个对应的 y，则图为函数的图像. 如果垂线穿过图像超过一个点，则这个图像不是函数的图像. 应用这个被称为垂线法的法则，可看出(a)，(b)和(d)是函数图像；(c)，(e)和(f)不是函数图像.

1.9　下列哪些方程是函数，为什么？

解 ☞ a)　$y=-2x+7$

由于对每个 x 有惟一的 y 与之对应，则 $y=-2x+7$ 是一个函数. 例如，如果 $x=1$，$y=-2(1)+7=5$. 此图像类似于图 1-2 的(a).

b)　$y^2=x$

$y^2=x$ 等价于 $y=\pm\sqrt{x}$. 由于对每个正的变量 x，有两个 y 与之对应，所以它不是函数. 例如，$y^2=9$，$y=\pm3$. 此图类似于图 1-2 的(c)，对称轴平行于 x 轴的抛物线不是函数.

c)　$y=x^2$

$y=x^2$ 是一个函数. 对每个 x，有惟一的 y 与之对应. 例如，$x=-5$，$y=25$. 当 $x=5$ 时，$y=25$

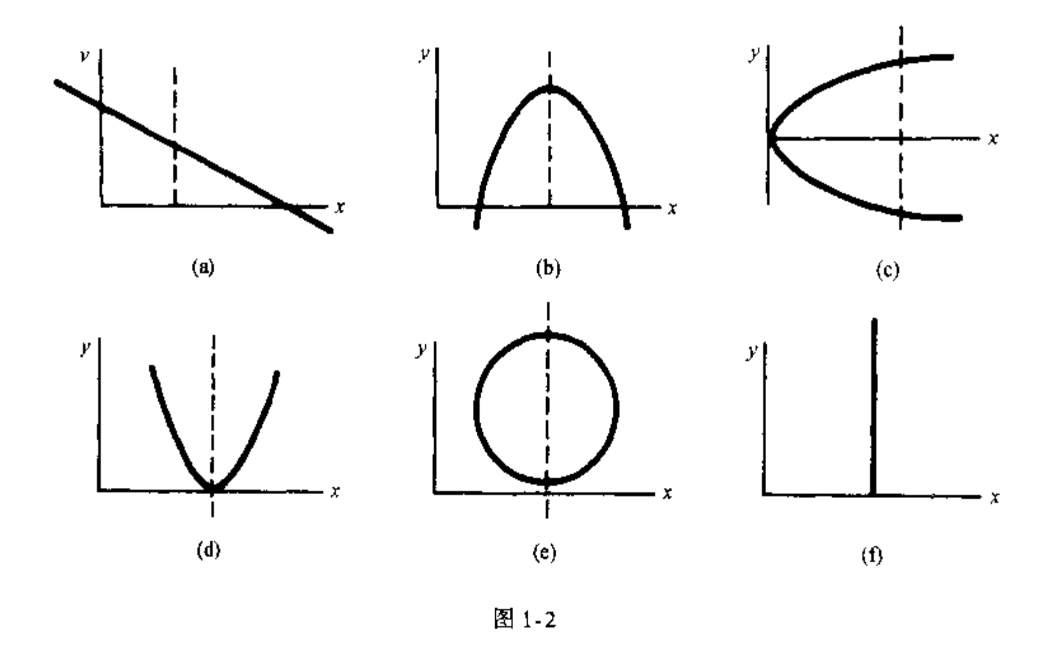


图 1-2

也是正确的. 函数的定义简单地表示为每个 x, 有惟一的 y 与之对应, 而不是每个 y, 有惟一的 x 相对应. 这个图类似于图 1-2 的(d). 对称轴平行于 y 轴的抛物线是一个函数.

d) $y=-x^2+6x+15$

$y=-x^2+6x+15$ 是一个函数. 对每个 x, 有惟一的 y. 此图类似于图 1-2 的(b).

e) $x^2+y^2=64$

$x^2+y^2=64$ 表示一个函数. 如果 $x=0$, $y^2=64$, 则 $y=\pm\sqrt{8}$. 这个图像是一个圆, 类似于图 1-2 的(e). 圆不能通过垂线测试.

f) $x=4$

$x=4$ 表示函数. $x=4$ 的图像是一个垂线. 这意味着, $x=4$ 时, 有许多 y 于之对应. 图像类似于图 1-2 的(f).

图, 斜率和截距

1.10 在斜截式线性方程 $y=mx+b$ 的参数中找 x 截距.

解 ☞ $y=mx+b$.

设 $y=0$,

$$0=mx+b$$
$$mx=-b$$
$$x=-\frac{b}{m}$$

则, 斜截式的 x 截距是 $(-\frac{b}{m},0)$.

1.11 作下列方程的图像, 并指出相应的截距和斜率:

(a) $3y+15x=30$　(b) $2y-6x=12$　(c) $8y-2x+16=0$　(d) $6y+3x-18=0$

解 ☞ 作方程的图像, 首先将 y 用 x 表示, 建立斜截式. 如例 14 中的斜率和两个截距能从方程中直接得到, 对应所提供的三个条件, 作图像仅需要两个. 见图 1-3, 问题 2.1~2.10.

(a) $3y+15x=30$

$$3y=-15x+30$$
$$y=-5x+10$$

斜率 $m=-5$

y 截距: $(0,10)$

x 截距: $(2,0)$

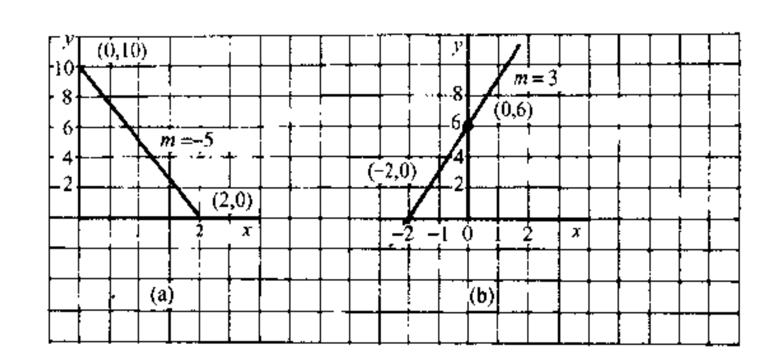
(b) $2y-6x=12$

$$2y=6x+12$$
$$y=3x+6$$

斜率 $m=3$

y 截距: $(0,6)$

x 截距: $(-2,0)$



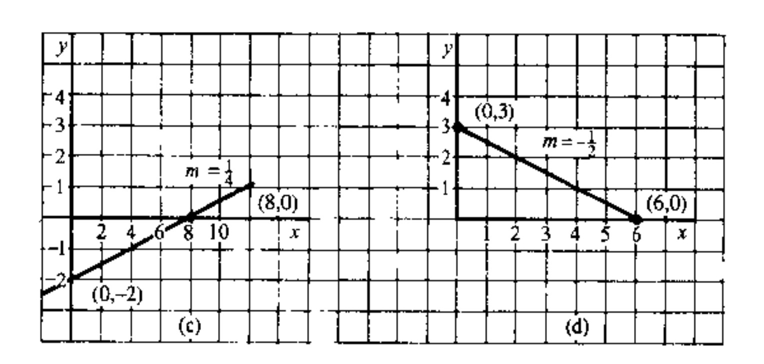


图 1-3

(c) $8y - 2x + 16 = 0$

$$8y = 2x - 16$$

$$y = \frac{1}{4}x - 2$$

斜率 $m = \frac{1}{4}$

y 截距:(0, −2)

x 截距:(8,0)

(d) $6y + 3x - 18 = 0$

$$6y = -3x + 18$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

斜率 $m = -\frac{1}{2}$

y 截距: (0,3)

x 截距: (6,0)

1.12 由(a) (4,12), (8,2); (b) (−1, 15), (3, 6);(c) (2, −3), (5,18)找出线性函数的斜率 m.

解 ☞ (a) 将它们分别代入例 13 中的公式,得

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 12}{8 - 4} = \frac{-10}{4} = -2\frac{1}{2}$$

(b)
$$m = \frac{6 - 15}{3 - (-1)} = \frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}$$

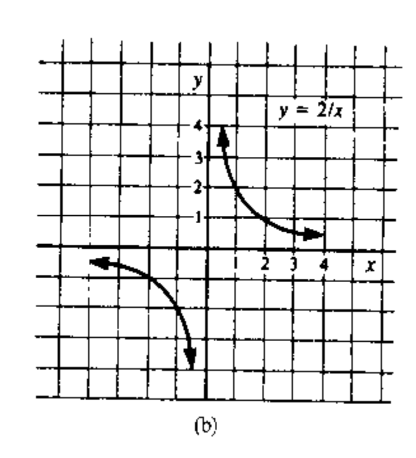
(c)
$$m = \frac{18 - (-3)}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

1.13 作出(a) 二次函数 $y = 2x^2$, (b) 有理函数 $y = 2/x$ 的图像.

解 见图 1-4.

(a)

x	$f(x)=2x^2=y$	点
-2	$f(-2)=2(-2)^2=8$	$(-2,8)$
-1	$f(-1)=2(-1)^2=2$	$(-1,2)$
0	$f(0)=2(0)^2=0$	$(0,0)$
1	$f(1)=2(1)^2=2$	$(1,2)$
2	$f(2)=2(2)^2=8$	$(2,8)$
3	$f(3)=2(3)^2=18$	$(3,18)$



(a)

(b)

x	$f(x)=2/x=y$	点
-4	$f(-4)=2/(-4)=-\frac{1}{2}$	$(-4,-\frac{1}{2})$
-2	$f(-2)=2/(-2)=-1$	$(-2,-1)$
-1	$f(-1)=2/(-1)=-2$	$(-1,-2)$
$-\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2})=2/(-\frac{1}{2})=-4$	$(-\frac{1}{2},-4)$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2})=2/\frac{1}{2}=4$	$(\frac{1}{2},4)$
1	$f(1)=2/1=2$	$(1,2)$
2	$f(2)=2/2=1$	$(2,1)$
4	$f(4)=2/4=\frac{1}{2}$	$(4,\frac{1}{2})$

(b)

图 1-4

第二章　图形和方程的经济应用

2.1　等成本线

等成本线表示能用给定金钱购买的两种生产投入或要素的不同组合．一般的公式是 $P_K K + P_L L = E$，这里，K 和 L 是资本和劳动，P_K 和 P_L 是它们相应的价格，E 表示总经费投入．在等成本分析中，每个价格和经费在开始时为常数，仅投入的不同组合是允许变化的．把一个变量用其他项表示，可以描绘出这个函数的图形，见例 1 及问题 2.5 和 2.6.

例 1　给定：

$$P_K K + P_L L = E$$

$$P_K K = E - P_L L$$

$$K = \frac{E - P_L L}{P_K}$$

$$K = \frac{E}{P_K} - \left(\frac{P_L}{P_K}\right) L$$

这是一个熟知的形如 $y = mx + b$ 的线性函数，这里，$b = E/P_K$ = 垂直截距，$m = -P_L/P_K$ = 斜率．它的图形是图 2-1 中的实线．

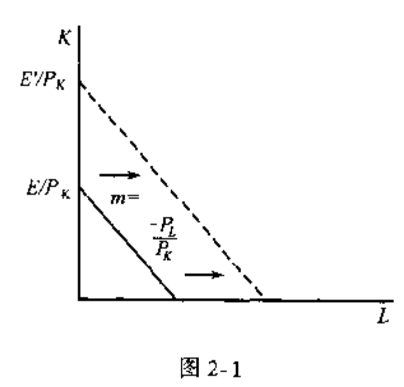


图 2-1

从方程和图形中，任何参数变化的影响是容易辨认的．当经费从 E 增大到 E'，垂直截距增加，并且等成本线向右(箭头线)平行移动到虚线．由于斜率依赖于相对价格($-P_K/P_L$)，并且价格不受经费的影响，所以斜率不受经费变化的影响．当 P_K 变化时，直线的斜率将发生变化，但垂直截距不变．P_L 变化，则斜率和垂直截距都变化，见问题 2.5 和 2.6.

2.2　供给和需求分析

在供给和需求分析中，当 $Q_s = Q_d$ 时，产生均衡．通过使供给和需求函数相等，可以决定均衡价格和数量．见例 2 和问题 2.1～2.4 及 2.11～2.16.

例 2　给定：　$Q_s = -5 + 3P \qquad Q_d = 10 - 2P$

均衡　$Q_s = Q_d$

求解 P　$-5 + 3P = 10 - 2P$

$5P = 15 \quad P = 3$

代 $P = 3$ 到每个方程

$$Q_s = -5 + 3P = -5 + 3(3) = 4 = Q_d$$

2.3　收入决定模型

收入决定模型一般表示在四个经济部门中收入的均衡水平，如

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

这里，Y = 收入，C = 消费，I = 投资，X = 出口，Z = 进口．将信息代入这个问题，收入均衡水平是容易求解的．汇总右边的变量，使方程能在二维空间作出图形．见例 3 和问题 2.7～2.10及 2.17～2.22.

例 3　假设一个简单的二部门经济，$Y=C+I$，$C=C_0+Y$，且 $I=I_0$. 进一步假设 $C_0=85$，$b=0.9$，$I_0=55$. 收入均衡水平在(1) 一般参数，(2) 赋于参数特殊值时可以被计算.

解　☞ 1.均衡方程是

$$Y = C + I$$

代入 C 和 I

$$Y = C_0 + bY + I_0$$

解 Y

$$Y - bY = C_0 + I_0$$
$$(1 - b)Y = C_0 + I_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0}{1 - b}$$

这种形式的解称为简化型. 简化型(或解方程)表示内生变量(这里是 Y)作为外生变量(C_0, I_0)和参数(b)的显函数.

2.通过代参数的数值到原方程(a)或简化型(b)中，可以计算出特殊的收入均衡水平：

(a)　$Y = C_0 + bY + I_0 = 85 + 0.9Y + 55$

$$Y - 0.9Y = 140$$
$$0.1Y = 140$$
$$Y = 1400$$

(b)　$Y = \frac{C_0 + I_0}{1 - b} = \frac{85 + 55}{1 - 0.9} = \frac{140}{0.1} = 1400$

$1/(1-b)$在经济学中称为自控费用乘数. 它度量在收入均衡水平上每美元自控花费的倍数影响. 因为，在收入决定模型中，$b=MPC$，乘数$=1/(1-MPC)$.

注　为使收入决定模型容易运算，小数可以转化为分数. 例如，$0.1=\frac{1}{10}$，$0.9=\frac{9}{10}$，$0.5=\frac{1}{2}$，$0.2=\frac{1}{5}$，等等.

2.4 IS-LM 分析

IS 日程表是一个表示所有符合商品市场均衡的利率和收入水平的不同组合的点的轨迹. LM 日程表是一个表示所有符合货币市场均衡的利率和收入水干的不同组合的点的轨迹. IS-LM 分析试图找到使商品市场和货币市场都处于均衡状态的收入和利率水平. 这可通过解方程组的方法来完成. 不像 2.3 节中的简单收入决定模型，IS-LM 分析明确处理利率，并且将结果与模型相结合. 见例 4，问题 2.23 和 2.24.

例 4　对简单的二部门经济，当 $Y=C+I$，商品市场是均衡的. 当货币供给(M_s)等于货币需求(M_d)时，货币市场是均衡的，它们依次由货币的预备交易需求(M_t)和特殊需求(M_z)组成. 假设一个二部门经济，$C=48+0.8Y$，$I=98-75i$，$M_s=250$，$M_t=0.3Y$，$M_z=52-150i$.

解　☞当 $Y=C+I$，商品均衡(IS)存在. 代入方程

$$Y = 48 + 0.8Y + 98 - 75i$$
$$Y - 0.8Y = 146 - 75i$$
$$0.2Y + 75i - 146 = 0 \tag{2.1}$$

当 $M_s=M_t+M_z$，货币均衡(LM)存在. 代入方程

$$250 = 0.3Y + 52 - 150i$$
$$0.3Y - 150i - 198 = 0 \tag{2.2}$$

在每个市场中，能够找到联立均衡条件，解联立方程(2.1)和(2.2)

$$0.2Y + 75i - 146 = 0 \tag{2.1}$$
$$0.3Y - 150i - 198 = 0 \tag{2.2}$$

(2.1)乘 2 加上(2.3)与(2.2)的差，解得 Y

$$\begin{array}{r} 0.4Y + 150i - 292 = 0 \\ \underline{0.3Y - 150i - 198 = 0} \\ 0.7Y \qquad\quad - 490 = 0 \\ Y = 700 \end{array} \tag{2.3}$$

代 $Y = 700$ 到(2.1)或(2.2)，得 i

$$0.2Y + 75i - 146 = 0$$
$$0.2(700) + 75i - 146 = 0$$
$$140 + 75i - 146 = 0$$
$$75i = 6$$
$$i = \frac{6}{75} = 0.08$$

当 $Y = 700$，$i = 0.08$，商品市场和货币市场将是联立均衡的．在这时，$C = 48 + 0.8(700) = 608$，$I = 98 - 75(0.08) = 92$，$M_t = 0.3(700) = 210$，$M_z = 52 - 150(0.08) = 40$，$C + I = 608 + 92 = 700$，$M_t + M_z = 210 + 40 = 250 = M_s$．

习题解答

图形

2.1　一个完全需求函数是方程

$$Q_d = -30P + 0.05Y + 2P_r + 4T$$

这里，P 是商品的价格，Y 是收入，P_r 是一个相对商品价格(一个代用品)，T 是爱好．能绘出这个函数的图形吗？

解　☞ 由于完全需求函数包含五个不同的变量，因此无法描绘出函数的图形．然而，在通常的需求分析中，除价格以外的其他独立变量都假设为常数，以便价格变化在需求量上的影响能在其他因素影响之外单独测出，如果其他的变量(Y, P_r, T)是常数，则可以描绘出这个函数的图形．

2.2　(a)假设 $Y = 5000$，$P_r = 25$，$T = 30$ 绘出问题 2.1 中需求函数的图形．(b)在(a)中描绘的这个典型的需求函数显示出什么？(c)如果商品的价格从 5 变到 6，图形如何变化？(d)如果其他变量发生变化，将有什么情况发生？例如，收入增加到 7400？

解　☞ (a)　在问题 2.1 中，增加方程新的数据，函数的图形是容易画的．见图 2-2．

$$Q_d = -30P + 0.05Y + 2P_r + 4T = -30P + 0.05(5000) + 2(25) + 4(30) = -30P + 420$$

(b)　(a)中所给的需求函数显示在不同价格下所需商品的不同数量，这里假定收入水平、爱好和替代商品价格(这里是 5000，30，25)是不变的．

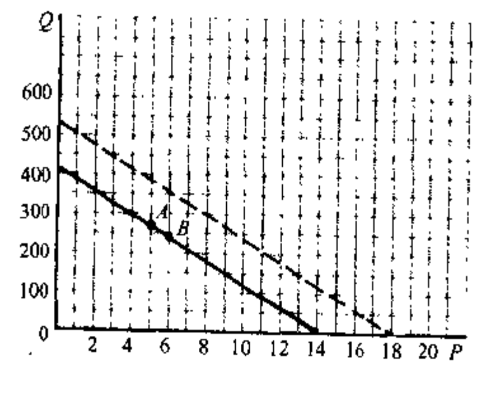


图 2-2

(c)　如果除了商品的价格，其他量都不变，则图像保持不变，因为图像表示在所有可能的价格下需求的不同数量．商品价格的变化引起点沿曲线移动，称为需求量的变化．当价格从 5 变到 6，需求就从 270[420 − 30(5)]降到 240[420 − 30(6)]，沿曲线从 A 点移动到 B 点．

(d)　如果任何一个其他变量变化，曲线将移动，这称为需求变化，因为它产生一个全新的需求函数(曲线)来反映这种条件变化．如果收入增加到 7400，新的需求函数变成

$$Q_d = -30P + 0.05(7400) + 2(25) + 4(30) = -30P + 540$$

图像为图 2-2 中的虚线.

2.3 在经济学的供给需求分析中，独立变量(价格)习惯上放在垂直轴上，非独立变量(数量)被放在水平轴上. (a) 根据习惯的方式，画出问题 2.2 的需求函数图像. (b) 如果价格从 5 变到 6，且收入增加到 7400，观察有什么情况发生.

解 (a) 根据通常的经济习惯，做反函数，即在原函数中，将独立变量用非独立变量表示，可以画出函数 $Q_d = 420 - 30P$ 的图像. P 表示成 Q_d 的函数. 因此，函数 $Q_d = 420 - 30P$ 的反函数为 $P = 14 - \frac{1}{30}Q_d$. 图像为图 2-3 中的实线.

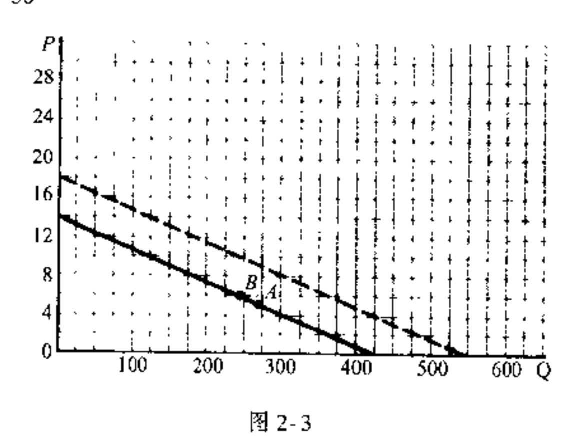


图 2-3

(b) 如果 P 从 5 变到 6，Q_d 从 270 降到 240，

$$P = 14 - \frac{1}{30}Q_d \qquad P = 14 - \frac{1}{30}Q_d$$

$$5 = 14 - \frac{1}{30}Q_d \qquad 6 = 14 - \frac{1}{30}Q_d$$

$$\frac{1}{30}Q_d = 9 \qquad \frac{1}{30}Q_d = 8$$

$$Q_d = 270 \qquad Q_d = 240$$

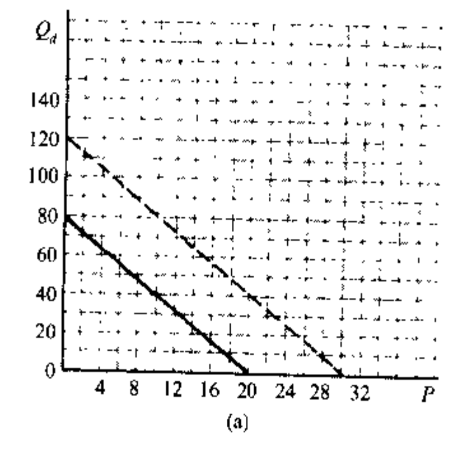
图 2-3 中，由 A 到 B 表示这个变化.

如果 $Y = 7400$，对问题 2.2(d)，$Q_d = 540 - 30P$，反函数为 $P = 18 - \frac{1}{30}Q_d$. 图像是图 2-3 中的虚线.

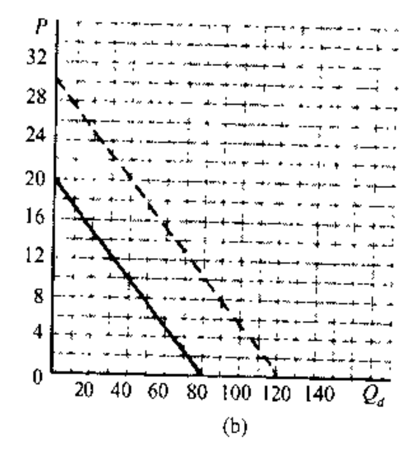
2.4 描绘需求函数

$$Q_d = -4P + 0.01Y - 5P_r + 10T$$

(a)当 $Y = 8000$，$P_r = 8$，$T = 4$. (b)相关商品是什么类型的商品？(c)如果 T 增加到 8，



(a)



(b)

图 2-4

表示对商品有较大的喜好，有什么情况发生？(d) 按经济中的习惯，P 放在直轴上，Q 在水平轴上，绘函数图像.

解 ☞ (a)　　$Q_d = -4P + 0.01(8000) - 5(8) + 10(4) = -4P + 80$

图像是图 2-4(a)中的实线.

(b) 相关商品有一个负的系数. 这意味着相关商品价格的增加将导致原商品需求的减少. 由定义，相关商品是一个补充商品.

(c) 如果 $T = 8$，表示较大的喜好，将有一个全新的需求.

$$Q_d = -4P + 0.01(8000) - 5(8) + 10(8) = -4P + 120$$

见图 2-4(a)的虚线.

(d) 把反函数 P 放在直轴上. 解 P 是 Q_d 的函数，$Q_d = 840 - 4P$ 的反函数是 $P = 20 - \frac{1}{4}Q_d$，其图像为图 2-4(b)的实线. $Q_d = 120 - 4P$ 的反函数是 $P = 30 - \frac{1}{4}Q_d$，图像为图 2-4(b)中的虚线.

2.5 一个人将 \$120 花在两种价格分别为 \$3 和 \$5 的商品(X, Y)上. (a)画出能在预算(B)内购买两种商品的所有不同组合的预算线. (b) 如果预算降低 25 美分，(c)如果 X 的价格加倍，(d) 如果 Y 的价格降到 4，原来的预算线如何变化？

解 ☞ (a) 预算线的一般函数是

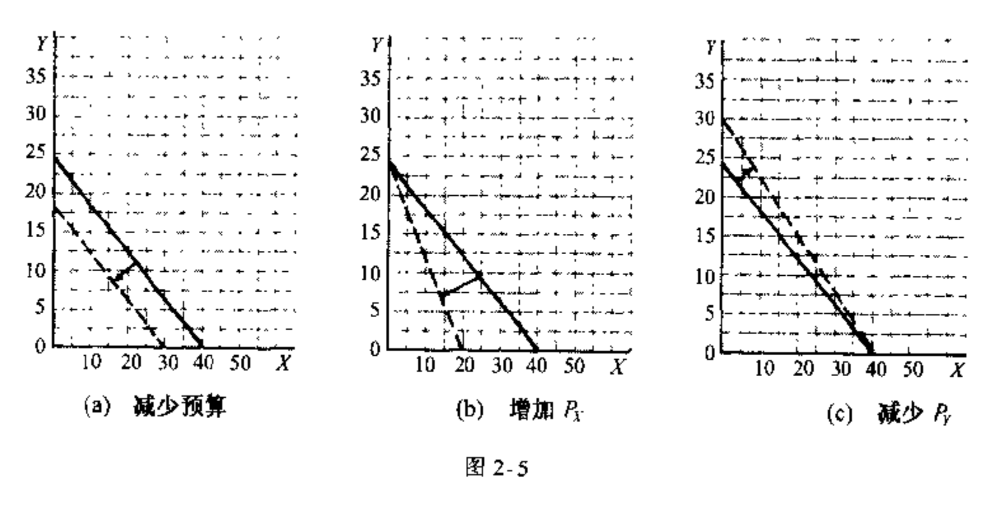
$$P_X X + P_Y Y = B$$

如果 $P_X = 3$，$P_Y = 5$，$B = 120$，$3X + 5Y = 120$

为了画出函数图像，解 Y 为 X 的函数，

$$Y = 24 - \frac{3}{5}X$$

其图像是图 2-5(a)中的实线.



(a) 减少预算　　(b) 增加 P_X　　(c) 减少 P_Y

图 2-5

(b) 如果预算降低 25 美分，新的预算是 $90[120 - \frac{1}{4}(120) = 90]$. 新的预算线方程是

$$3X + 5Y = 90$$

$$Y = 18 - \frac{3}{5}X$$

图像是图 2-5(a)中的虚线. 降低预算导致预算线向左平行移动.

(c) 如果 P_X 加倍，原方程变为

$$6X + 5Y = 120$$

$$Y = 24 - \frac{6}{5}X$$

垂直截距保持不变，但斜率变化了，且变的更陡了. 见图 2-5(b)中的虚线. 对于较高的 X 的价格，给定预算购买较少的 X.

(d) 如果现在 $P_Y = 4$，

$$3X + 4Y = 120$$

$$Y = 30 - \frac{3}{4}X$$

当 P_Y 变化，垂直截距和斜率都发生变化．图 2-5(c)中的虚线所示．

2.6　煤(C)或煤气(G)能用来生产钢．煤的成本是 100，煤气的成本是 500．(a)对于初始经费(E)1000，(b) 经费增加 50 美分，(c) 如果煤气的价格减少 20 美分，(d)煤的价格上涨 25 美分，画出购买煤和煤气的不同组合的等成本线．从原方程开始．

解 ☞ (a)

$$P_C C + P_G G - E$$

$$100C + 500G - 10000$$

$$C = 100 - 5G$$

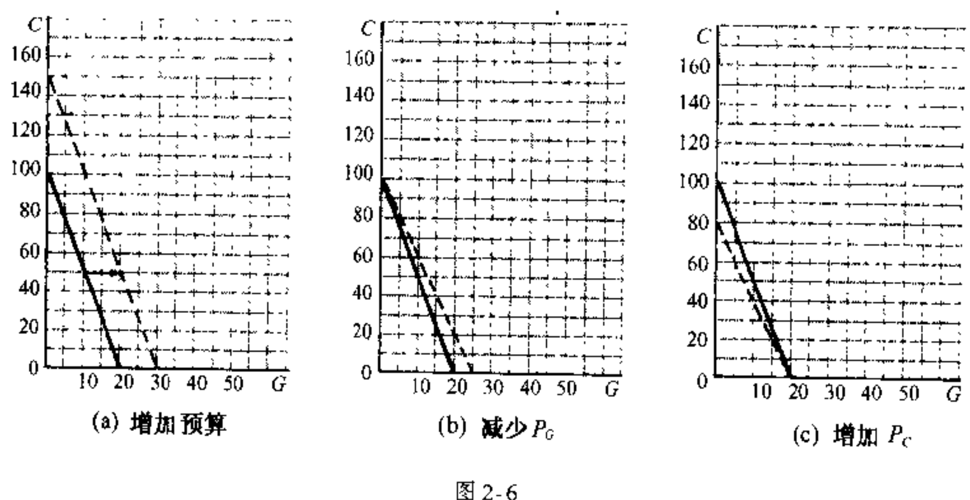
其图像是图 2-6(a) 中的实线．

(b)　经费增加 50 美分，产生新的支出 15 000[10 000 + 0.5(10 000)]，新方程是

$$100C + 500G = 15\,000$$

$$C = 150 - 5G$$

其图像为图 2-6(a)中的虚线．



(a) 增加预算　　(b) 减少 P_G　　(c) 增加 P_C

图 2-6

(c)　如果煤气价格下降 20 美分，新的价格是 400[500 - 0.2(500)]，新的方程是

$$100C + 400G = 10\,000$$

$$C = 100 - 4G$$

其图像为图 2-6(b)中的虚线．

(d)　煤的价格上涨 25 美分到新的价格 125[100 + 0.25(100)]

$$125C + 500G = 10\,000$$

$$C = 80 - 4G$$

其图像为图 2-6(c)中的虚线．

收人决定模型中的图像

2.7　给定：$Y = C + I$，$C = 50 + 0.8Y$，$I_0 = 50$．(a) 消费函数的图像．(b) 总需求函数，$C + I_0$ 的图像．(c) 从图像中找出均衡的收入水平．

解 ☞ (a)　由于消费是需求的函数，所以它被放在垂轴上，收入放在水平轴上，见图 2-7．当总需求的其他成分，如 I, G 和 $X - Z$ 加入模型中，也把它们放在垂轴上．从消费函数的线性形式中很容易确定垂直截距是 50，斜率(MPC 或 $\Delta C/\Delta Y$)是 0.8．

(b)　在模型中，投资是自由投资．这意味着投资独立于收入，对收入的变化没有反应．常数的图像是一条水平直线，当与线性函数相加时，它使原来的函数平行移动常数值的大小．在图 2-7 中，自由投资使总需求函数由初始函数向上平移 50．

(c)　为了从图像中得到均衡的收入水平，从原点画一条 45°的虚线．如果每个轴上有相同的尺度，45°线的斜率为 1，这意味着当这条线离开原点，每单位水平移动(ΔX)有一单位的垂直移动

(ΔY). 因此，45°线上的每一点的水平坐标(横坐标)等于它的垂直坐标(纵坐标). 随之，当总需求函数与45°线相交，总需求(画在垂轴上)等于国民收入(画在水平轴上). 从图2-7清楚地看到均衡收入水平是500，因为总需求函数($C+I$)与45°线相交于500.

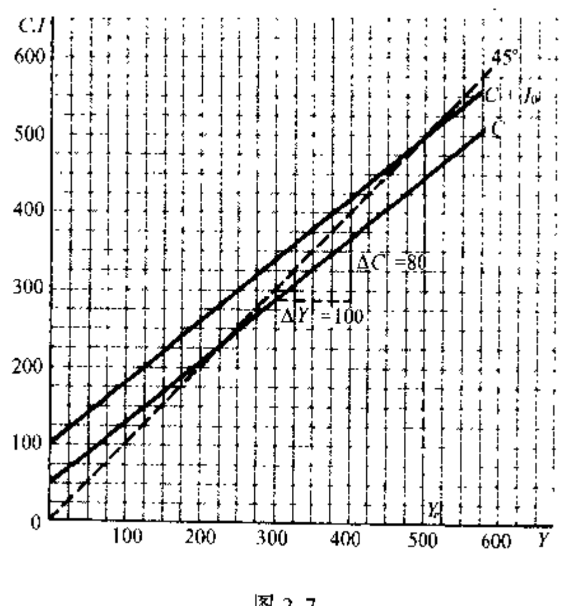


图2-7

2.8 给：$Y=C+I+G$，$C=25+0.75Y$，$I=I_0=50$，$G=G_0=25$. (a) 画总需求函数，并且显示它的个别的成分. (b) 找出均衡的收入水平. (c) 不画每个组成部分，如何直接画出总需求函数?

解 ☞ (a) 见图2-8.

(b) 均衡收入=400.

(c) 将各个成分相加，直接画出总需求函数，总和

$$\text{Agg.}D=C+I+G=25+0.75Y+50+25=100+0.75Y$$

直接描绘出的总需求函数的图像与C,I,G的各个图像的总和的图像完全一致.

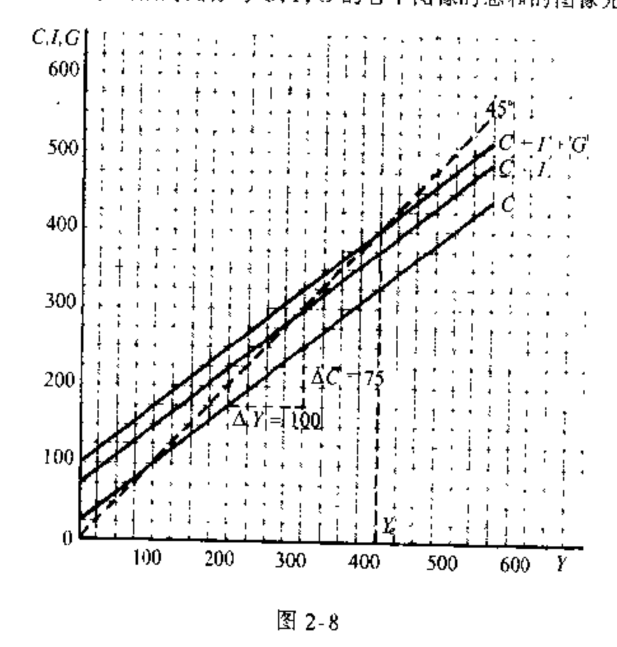


图2-8

2.9 用一个图像去显示整笔付清的附加税(独立于收入)如何影响收入决定模型的参数. (1)用实线，(2)用虚线逐一地画出两个系统.

1) $Y=C+I$　　　2) $Y=C+I$　　　$Yd=Y-T$

$C = 100 + 0.6Y$ $\quad$ $C = 100 + 0.6Yd$ $\quad$ $T = 50$

$I_0 = 40$ $\quad$ $I_0 = 40$

第一个方程系统没有问题；第二个系统要求 C 首先从函数 Yd 转换到 Y.

解 1) 总和 Agg. $D = C + I$

$$= 100 + 0.6Y + 40$$
$$= 140 + 0.6Y$$

2) 总和 Agg. $D = C + I$

$$= 100 + 0.6Yd + 40$$
$$= 140 + 0.6(Y - T)$$
$$= 140 + 0.6(Y - 50)$$
$$= 110 + 0.6Y$$

一次总付税在总需求函数的垂直截距上有 $-MPC(T)$ 的负的效果，这里是 $-0.6(50) = -30$. 斜率没受影响(注意图 2-9 中的两条平行线). 由于税的结果，收入从 350 降到 275.

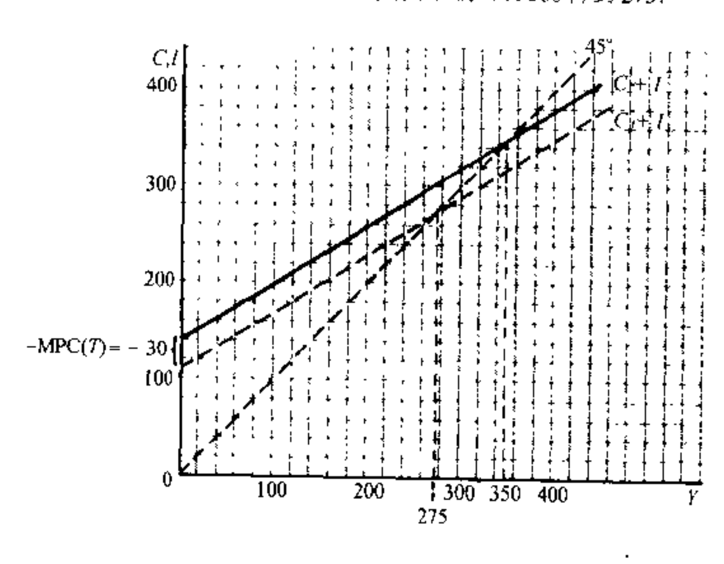


图 2-9

2.10 借助图像说明比例税(独立于收入)的组合如何影响收入决定模型的参数. 没有税的模型的图像是图中实线，有税的模型的图像是图中的虚线.

1) $Y = C + I$ $\quad$ 2) $Y = C + I$ $\quad$ $Yd = Y - T$

$C = 85 + 0.75Y$ $\quad$ $C = 85 + 0.75Yd$ $\quad$ $T = 20 + 0.2Y$

$I_0 = 30$ $\quad$ $I_0 = 30$

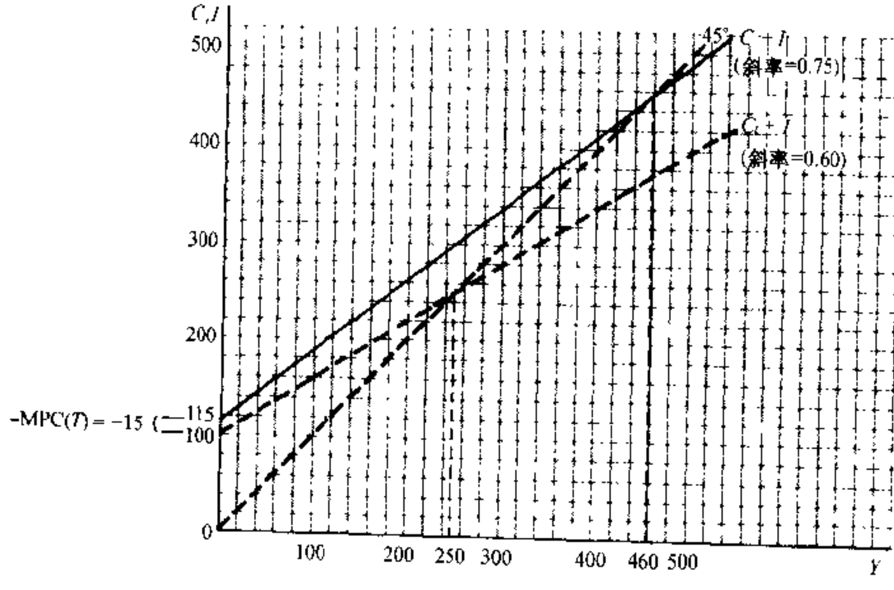


图 2-10

解 ☞ 1) 总和 Agg. $D = C + I$

$= 85 + 0.75Y + 30$

$= 115 + 0.75Y$

2) 总和 Agg. $D = C + I$

$= 85 + 0.75Yd + 30$

$= 115 + 0.75(Y - T)$

$= 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2Y)$

$= 115 + 0.75Y - 15 - 0.15Y$

$= 100 + 0.6Y$

在模型中的比例税的总和影响直线，或者说 MPC 的斜率．如果这样，斜率从 0.75 下降到 0.6．由于这个包含一次总付税 20 的税结构，垂直截距也下降了．由于税结构，均衡收入水平从 460 下降到 250．见图 2-10．

在供给和需求分析中的方程

2.11 对于下列市场，找出均衡价格和均衡数量：

(a) $Q_s = -20 + 3P$, $Q_d = 220 - 5P$

(b) $Q_s = -45 + 8P$, $Q_d = 125 - 2P$

(c) $Q_s + 32 - 7P = 0$, $Q_d - 128 + 9P = 0$

(d) $13P - Q_s = 27$, $Q_d + 4P - 24 = 0$

当 $Q_s = Q_d$ 时，每个市场都是均衡的．

解 ☞ (a) $Q_s = Q_d$

$$-20 + 3P = 220 - 5P$$
$$8P = 240$$
$$P = 30$$
$$Q_s = -20 + 3P = -20 + 3(30)$$
$$Q_s = 70 = Q_d$$

(b) $Q_s = Q_d$

$$-45 + 8P = 125 - 2P$$
$$10P = 170$$
$$P = 17$$
$$Q_d = 125 - 2P = 125 - 2(17)$$
$$Q_d = 91 = Q_s$$

(c) $Q_s = 7P - 32$

$$Q_d = 128 - 9P$$
$$7P - 32 = 128 - 9P$$
$$16P = 160$$
$$P = 10$$
$$Q_s = 7P - 32 = 7(10) - 32$$
$$Q_s = 38 = Q_d$$

(d) $Q_s = -27 + 13P$

$$Q_d = 24 - 4P$$
$$-27 + 13P = 24 - 4P$$
$$17P = 51$$
$$P = 3$$
$$Q_d = 24 - 4P = 24 - 4(3)$$
$$Q_d = 12 = Q_s$$

2.12 给定下列牛肉(B)和猪肉(P)这两个相关市场的联立方程组，用代入法，找出每个市场的均衡条件．

1) $Q_{dB} = 82 - 3P_B + P_P$, $Q_{sB} = -5 + 15P_B$

2) $Q_{dP} = 92 + 2P_B - 4P_P$, $Q_{sP} = -6 + 32P_P$

解 ☞ 在每个市场中，均衡需要 $Q_s = Q_d$．

1) $Q_{sB} = Q_{dB}$

$$-5 + 15P_B = 82 - 3P_B + P_P$$
$$18P_B - P_P = 87$$

2) $Q_{sP} = Q_{dP}$

$$-6 + 32P_P = 92 + 2P_B - 4P_P$$
$$36P_P - 2P_B = 98$$

改变这个问题成两个方程和两个未知数：

$$18P_B - P_P = 87 \tag{2.4}$$
$$-2P_B + 36P_P = 98 \tag{2.5}$$

在(2.4)中解出 P_P 得

$$P_P = 18P_B - 87$$

将此式代入(2.5)得

$$-2P_B + 36(18P_B - 87) = 98$$
$$-2P_B + 648P_B - 3132 = 98$$

$$646P_B = 3230 \qquad P_B = 5$$

将 $P_B = 5$ 代入(2.5)或(2.4)，

$$-2(5) + 36P_P = 98$$

$$36P_P = 108 \qquad P_P = 3$$

最后，将 P_B 和 P_P 的值代入每个市场的供给或需求函数中，

1) $Q_{dB} = 82 - 3P_B + P_P = 82 - 3(5) + (3)$

$Q_{dB} = 70 = Q_{sB}$

2) $Q_{dP} = 92 + 2P_B - 4P_P = 92 + 2(5) - 4(3)$

$Q_{dP} = 90 = Q_{sP}$

2.13 用消元法，找出两种互补商品，裤子(S)和夹克(J)的均衡价格和均衡数量.

1) $Q_{dS} = 410 - 5P_S - 2P_J$

$Q_{sS} = -60 + 3P_S$

2) $Q_{dJ} = 295 - P_S - 3P_J$

$Q_{sJ} = -120 + 2P_J$

解 ☞ 在均衡时，

1) $Q_{dS} = Q_{sS}$

$$410 - 5P_S - 2P_J = -60 + 3P_S$$

$$470 - 8P_S - 2P_J = 0$$

2) $Q_{dJ} = Q_{sJ}$

$$295 - P_S - 3P_J = -120 + 2P_J$$

$$415 - P_S - 5P_J = 0$$

剩下两个方程

$$470 - 8P_S - 2P_J = 0 \tag{2.6}$$

$$415 - P_S - 5P_J = 0 \tag{2.7}$$

(2.7)乘以 8 得到(2.8)，从(2.8)中减去(2.6)以消掉 P_S，解出 P_J.

$$\begin{array}{r} 3320 - 8P_S \quad 40P_J = 0 \\ \underline{-(+470 - 8P_S - 2P_J = 0)} \\ 2850 \qquad\quad -38P_J = 0 \end{array} \tag{2.8}$$

$$P_J = 75$$

将 $P_J = 75$ 代入(2.6)，

$$470 - 8P_S - 2(75) = 0$$

$$320 - 8P_S \qquad P_S = 40$$

最后，将 $P_J = 75$ 和 $P_S = 40$ 代入每个市场的 Q_d 和 Q_s，

1)

$$Q_{dS} = 410 - 5P_S - 2P_J = 410 - 5(40) - 2(75)$$

$$Q_{dS} = 60 = Q_{sS}$$

2)

$$Q_{dJ} = 295 - P_S - 3P_J = 295 - 40 - 3(75)$$

$$Q_{dJ} = 30 = Q_{sJ}$$

2.14 供给和需求条件也能用二次型表示. 找均衡价格和均衡数量，给出需求函数

$$P + Q^2 + 3Q - 20 = 0 \tag{2.9}$$

供给函数

$$P - 3Q^2 + 10Q = 5 \tag{2.10}$$

解 ☞ 由于这个问题包含两个方程和两个未知数，所有可以用代入法或消元法. 用代入法，从(2.10)中，P 表示为 Q 的函数.

$$P - 3Q^2 + 10Q = 5$$

$$P = 3Q^2 - 10Q + 5$$

将 $P = 3Q^2 - 10Q + 5$ 代入(2.9)，

$$(3Q^2 - 10Q + 5) + Q^2 + 3Q - 20 = 0$$

$$4Q^2 - 7Q - 15 = 0$$

由二次公式，$Q_1, Q_2 = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)})/(2a)$，这里，$a = 4$，$b = -7$，$c = -15$，$Q_1 = 3$，$Q_2 = -1.25$. 由于价格和数量都不能是负数，所以 $Q = 3$. 将 $Q = 3$ 代入(2.9)或(2.10)，计算 P.

$$P + (3)^2 + 3(3) - 20 = 0 \qquad P = 2$$

2.15 用消元法找均衡价格和均衡数量，当需求函数是

$$3P + Q^2 + 5Q - 102 = 0 \tag{2.11}$$

供给函数是

$$P-2Q^2+3Q+71=0 \tag{2.12}$$

解 ☞ (2.12)乘以 3 得到(2.13)，用(2.11)减去(2.13)消去 P.

$$\begin{array}{r} 3P+Q^2+5Q-102=0 \\ \underline{-(3P-6Q^2+9Q+213=0)} \\ 7Q^2-4Q-315=0 \end{array} \tag{2.13}$$

用二次公式(见问题 2.14)解出 Q，并且代结果 $Q=7$ 到(2.12)或(2.11)中，解 P.

$$P-2(7)^2+3(7)+71=0 \qquad P=6$$

2.16 供给和需求分析也可用于两个市场以上的市场. 找出如下三个替代商品的均衡价格和均衡数量.

$$Q_{d1}=23-5P_1+P_2+P_3 \qquad Q_{s1}=-8+6P_1$$
$$Q_{d2}=15+P_1-3P_2+2P_3 \qquad Q_{s2}=-11+3P_2$$
$$Q_{d3}=19+P_1+2P_2-4P_3 \qquad Q_{s3}=-5+3P_3$$

解 ☞ 对于每个市场的均衡

$$Q_{d1}=Q_{s1}$$
$$23-5P_1+P_2+P_3=-8+6P_1$$
$$31-11P_1+P_2+P_3=0$$

$$Q_{d2}=Q_{s2}$$
$$15+P_1-3P_2+2P_3=-11+3P_2$$
$$26+P_1-6P_2+2P_3=0$$

$$Q_{d3}=Q_{s3}$$
$$19+P_1+2P_2-4P_3=-5+3P_3$$
$$24+P_1+2P_2-7P_3=0$$

剩下拥有三个未知数的三个方程：

$$31-11P_1+P_2+P_3=0 \tag{2.14}$$
$$26+P_1-6P_2+2P_3=0 \tag{2.15}$$
$$24+P_1+2P_2-7P_3=0 \tag{2.16}$$

先消去其中一个变量(这里为 P_2)，(2.14)乘以 2 得到

$$62-22P_1+2P_2+2P_3=0$$

从这个结果中减去(2.16)

$$\begin{array}{r} 62-22P_1+2P_2+2P_3=0 \\ \underline{-(24+P_1+2P_2-7P_3)=0} \\ 38-23P_1+9P_3=0 \end{array} \tag{2.17}$$

(2.16)乘以 3

$$72+3P_1+6P_2-21P_3=0$$

将这个结果与(2.15)相加.

$$\begin{array}{r} 26+P_1-6P_2+2P_3=0 \\ \underline{72+3P_1+6P_2-21P_3=0} \\ 98+4P_1-19P_3=0 \end{array} \tag{2.18}$$

现在有两个方程(2.17),(2.18)和两个未知数. (2.17)乘以 19 加上(2.18)乘以 9，消去 P_3.

$$\begin{array}{r} 722-437P_1+171P_3=0 \\ \underline{882+36P_1-171P_3=0} \\ 1604-401P_1=0 \\ P_1=4 \end{array}$$

代 $P_1=4$ 到(2.18)，求解 P_3.

$$98+4(4)-19P_3=0$$
$$19P_3=114 \qquad P_3=6$$

将 $P_1=4$，$P_3=6$ 代入(2.14)，(2.15)或(2.16)中，解出 P_2.

$$31-11(4)+P_2+(6)=0 \qquad P_2=7$$

在收入决定模型中的方程

2.17 给定：$Y=C+I+G$，$C=C_0+bY$，$I=I_0$，$G=G_0$，这里 $C_0=135$，$b=0.8$，$I_0=75$，$G_0=30$. (a) 找出均衡收入水平的简化型方程. (b) (1)直接地(2)用均衡型解均衡收入水平.

解 (a) 由2.3节

$$\begin{aligned}Y&=C+I+G\\&=C_0+bY+I_0+G_0\\Y-bY&=C_0+I_0+G_0\\(1-b)Y&=C_0+I_0+G_0\\Y&=\frac{C_0+I_0+G_0}{1-b}\end{aligned}$$

(b) 1) $Y=C+I+G=135+0.8Y+75+30$

$$\begin{aligned}Y-0.8Y&=240\\0.2Y&=240\\Y&=1200\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}Y&=\frac{C_0+I_0+G_0}{1-b}\\&=\frac{135+75+30}{1-0.8}\\&=5(240)=1200\end{aligned}$$

2.18 当 $C=89+0.8Y$，$I_0=24$ 时，找出均衡收入水平 $Y=C+I$.

$$Y=\frac{C_0+I_0}{1-b}=5(89+24)=565$$

解 由问题(2.17)，当 $b=0.8$ 时，乘子$[1/(1-b)]$的值是知道的. 尽管用其他的方法也可以，但简化型解方程较快.

2.19 (a)当投资不是自由的而是收入的函数时，找出下列收入决定模型的简化型. (b)找出简化收入水平(Y_e)的数值. (c) 说明乘子有什么变化.

$$Y=C+I \qquad C=C_0+bY \qquad I=I_0+aY$$

这里，$C_0=65$，$I_0=70$，$b=0.6$，$a=0.2$.

解 (a)

$$\begin{aligned}Y&=C+I\\&=C_0+bY+I_0+aY\\Y-bY-aY&=C_0+I_0\\(1-b-a)Y&=C_0+I_0\\Y&=\frac{C_0+I_0}{1-b-a}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}Y&=C+I\\&=65+0.6Y+70+0.2Y\\Y-0.6Y-0.2Y&=65+70\\0.2Y&=135\\Y&=675\end{aligned}$$

(c) 当投资是收入的函数而不再是自由的，乘子从 $1/(1-b)$变到 $1/(1-b-a)$. 由于分式的分母减少，商增大，所有乘子的值增大，在此问题中代入参数值得到

$$\frac{1}{1-b}=\frac{1}{1-0.6}=\frac{1}{0.4}=2.5 \qquad \frac{1}{1-b-a}=\frac{1}{1-0.6-0.2}=\frac{1}{0.2}=5$$

2.20 当一次总付税加到模型中，并且消费为税后收入(Yd)的函数时，找出(a) 简化型，(b) Y_e 的数值，(c) 在乘子上的影响.

$$Y=C+I \qquad C=C_0+bYd \qquad I=I_0 \qquad Yd=Y-T$$

这里，$C_0=100$，$b=0.6$，$I_0=40$，$T=50$.

解 (a) $Y=C+I=C_0+bYd+I_0=C_0+b(Y-T)+I_0=C_0+bY-bT+I_0$

$$\begin{aligned}Y-bY&=C_0+I_0-bT\\Y&=\frac{C_0+I_0-bT}{1-b}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}Y&=100+0.6Yd+40=140+0.6(Y-T)\\&=140+0.6(Y-50)=140+0.6Y-30\end{aligned}$$

$$Y - 0.6Y = 110$$
$$0.4Y = 110$$
$$Y = 275$$

或

$$Y = \frac{100 + 40 - 0.6(50)}{1 - 0.6} = \frac{110}{0.4} = 275$$

此函数的图像在问题 2.9 中给出.

(c) 在 a)中看到，模型考虑总付税时，乘子仍为 $1/(1-b)$. 仅外生变量的总和减少 $-bT$. 其他自由变量，如 G_0, X_0, Z_0 的组合也不影响乘子的值.

2.21 如果比例收入税合进模型中，找出(a) 简化型，(b) Y_e 的数值，(c)在乘子上的影响.

$$Y = C + I \qquad C = C_0 + bYd \qquad T = T_0 + tY \qquad Yd = Y - T$$

这里，$I = I_0 = 30$, $C_0 = 85$, $b = 0.75$, $t = 0.2$, $T_0 = 20$.

解 ☞ (a)

$$Y = C + I = C_0 + bYd + I_0$$
$$= C_0 + b(Y - T) + I_0 = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0$$
$$= C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0$$
$$Y - bY + btY = C_0 + I_0 - bT_0$$
$$(1 - b + bt)Y = C_0 + I_0 - bT_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0 - bT_0}{1 - b + bt}$$

(b) 当找到简化型，将加快求解. 但有时没有简化型，因此必须熟悉其他的方法.

$$Y = C + I = 85 + 0.75Yd + 30 = 115 + 0.75(Y - T)$$
$$= 115 + 0.75(Y - 20 - 0.2Y) = 115 + 0.75Y - 15 - 0.15Y$$
$$Y - 0.75Y + 0.15Y = 100$$
$$0.4Y = 100$$
$$Y = 250$$

这个函数的图像在问题 2.10 中给出.

(c) 乘子从 $1/(1-b)$变到 $1/(1-b-bt)$. 由于它使分母增大，分式缩小，所以乘子减小：

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$\frac{1}{1-b+bt} = \frac{1}{1-0.75+0.75(0.2)} = \frac{1}{1-0.75+0.15} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

2.22 如果外国部门加入到模型中，并且有正的边际进口倾向(z)，找出(a)简化型，(b)简化收入水平，(c) 在乘子上的影响.

$$Y = C + I + G + (X - Z) \qquad C = C_0 + bY \qquad Z = Z_0 + zY$$

这里，$I = I_0 = 90$, $G = G_0 = 65$, $X = X_0 = 80$, $C_0 = 70$, $Z_0 = 40$, $b = 0.9$, $z = 0.15$.

解 ☞ (a)

$$Y = C + I + G + (X - Z) = C_0 + bY + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 - zY$$
$$Y - bY + zY = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$
$$(1 - b + z)Y = C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0$$
$$Y = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{1 - b + z}$$

(b) 利用上面的简化型，

$$Y = \frac{70 + 90 + 65 + 80 - 40}{1 - 0.9 + 0.15} = \frac{265}{0.25} = 1060$$

(c) 边际进口倾向(z)引入模型减少了乘子的大小. 它使分母增大，分式缩小.

$$\frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-0.9} = \frac{1}{0.1} = 10$$

$$\frac{1}{1-b+z} = \frac{1}{1-0.9+0.15} = \frac{1}{0.25} = 4$$

IS-LM 方程

2.23　给定：$C=102+0.7Y$，$I=150-100i$，$M_t=0.25Y$，$M_z=124-200i$．当经济均衡时，找出 (a)均衡收入水平和均衡利率，(b) C，I，M_t 和 M_z 的水平．

解　☞ (a)　商品市场均衡(IS)存在，当

$$Y=C+I$$
$$=102+0.7Y+150-100i$$
$$Y-0.7Y=252-100i$$
$$0.3Y+100i-252=0$$

货币均衡存在，当

$$M_s=M_t+M_z$$
$$300=0.25Y+124-200i$$
$$0.25Y-200i-176=0$$

在每个市场中联立方程

$$0.3Y+100i-252=0 \qquad (2.19)$$
$$0.25Y-200i-176=0 \qquad (2.20)$$

(2.20)加上 2 乘以(2.19)，消去 i：

$$0.6Y+200i-504=0$$
$$\underline{0.25Y-200i-176=0}$$
$$0.85Y=680$$
$$Y=800$$

将 $Y=800$ 代入(2.19)或(2.20)：

$$0.25Y-200i-176=0$$
$$0.25(800)-200i-176=0$$
$$-200i=-24$$
$$i=0.12$$

(b)　在 $Y=800$，$i=0.12$ 时，

$$C=102+0.7(800)=662 \qquad M_t=0.25(800)=200$$
$$I=150-100(0.12)=138 \qquad M_z=124-200(0.12)=100$$

并且

$$C+I=Y \qquad M_t+M_z=M_s$$
$$662+138=800 \qquad 200+100=300$$

2.24　在均衡状态时，找出(a) 均衡收入水平和均衡利率，(b) C, I, M_t 和 M_z 的水平，当

$$C=89+0.6Y \quad I=120-150i \quad M_s=275 \quad M_t=0.1Y \quad M_z=240-250i$$

解　☞ (a)　对于 IS：

$$Y=89+0.6Y+120-150i$$
$$Y-0.6Y=209-150i$$
$$0.4Y+150i-209=0$$

对于 LM：

$$M_s=M_t+M_z$$
$$275=0.1Y+240-250i$$
$$0.1Y-250i-35=0$$

在均衡状态时

$$0.4Y+150i-209=0 \qquad (2.21)$$
$$0.1Y-250i-35=0 \qquad (2.22)$$

(2.21)减去 4 乘以(2.22)，消去 Y.

$$
\begin{aligned}
0.4Y + 150i - 209 &= 0 \\
-(0.4Y - 1000i - 140 &- 0) \\
\hline
1150i \qquad &= 69 \\
i &= 0.06
\end{aligned}
$$

将 $i=0.06$ 代入(2.21)或(2.22).

$$
\begin{aligned}
0.4Y + 150(0.06) - 209 &= 0 \\
0.4Y &= 200 \\
Y &= 500
\end{aligned}
$$

(b)　在 $Y=500$, $i=0.06$ 时,

$$C = 89 + 0.6(500) = 389 \qquad M_t = 0.1(500) = 50$$

$$I = 120 - 150(0.06) = 111 \qquad M_z = 240 - 250(0.06) = 225$$

和

$$C + I = Y \qquad M_t + M_z = M_s$$

$$389 + 111 = 500 \qquad 50 + 225 = 275$$

第三章　导数和微分法则

3.1　极限

如果对所有 x，当 x 从两边趋近于 a，但不等于 a 时，一个函数 f 的函数值 $f(x)$ 趋近到一个，而且仅一个有限数 L，则 L 定义为当 x 趋近于 a 时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

假设 $\lim_{x \to a} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a} g(x)$ 都存在，极限的法则如下，例 2，问题 3.1～3.4 给出了说明.

1. $\lim_{x \to a} k = k$　　$(k = 一个常数)$
2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$　　$(n = 一个正整数)$
3. $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$　　$(k = 一个常数)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a} [f(x) \div g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x)$　　$\left[\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right]$
7. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$　　$(n > 0)$

例 1　(a)　从图 3-1 的 $f(x)$ 图像可以看出，当 x 从每一边趋近 3 时，$f(x)$ 的值趋近 2. 这意味着，当 x 趋近 3 时，$f(x)$ 的极限为 2，可以写成

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

在图 3-1 中，当 x 趋近于 7 时，函数 $f(x)$ 的图像上有一个开圆，表明在这一点上有一个缺口，也即函数在这一点上没有定义，但 $f(x)$ 的值趋近于 4.

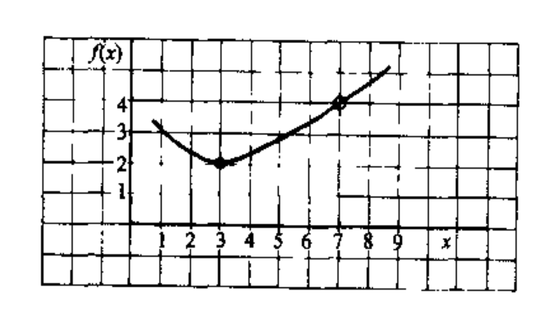


图 3-1

图 3-2

因为当 x 趋近于一个数，函数 $f(x)$ 的极限仅依赖于 x 趋近的那个数的值，所以这个极限存在，并且可写成

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 4$$

(b)　在图 3-2 中，当 x 从左边趋近于 4(比 4 小)，写成 $x \to 4^-$，$g(x)$ 趋近于 3，称为单侧极限；当 x 从右边趋近于 4(比 4 大). 写成 $x \to 4^+$，$g(x)$ 趋近于 4，由于当 x 从两边趋近于 4，$g(x)$ 没有趋近于单独一个数，则它的极限不存在.

例 2　极限除了用图像还可用上面列举的极限法则得到.

(a)　$\lim_{x \to 5} 9 = 9$　　　　(法则 1)

(b) $\lim_{x\to 6}x^2=(6)^2=36$ (法则 2)

(c) $\lim_{x\to 3}2x^3=2\lim_{x\to 3}x^3=2(3)^3=54$ (法则 2 和法则 3)

(d) $\lim_{x\to 2}(x^4+3x)=\lim_{x\to 2}x^4+3\lim_{x\to 2}x$
$=(2)^4+3(2)=22$ (法则 4)

(e) $\lim_{x\to 4}[(x+8)(x-5)]=\lim_{x\to 4}(x+8)\cdot\lim_{x\to 4}(x-5)$
$=(4+8)\cdot(4-5)=-12$ (法则 5)

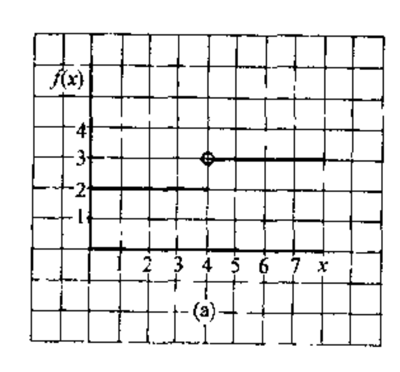
3.2 连续

连续函数是一个没有裂口的曲线．它能被一笔画出．一个函数在 $x=a$ 点连续，如果：

1. $f(x)$在 $x=a$ 处有定义，即在 $x=n$ 处存在
2. $\lim_{x\to a}f(x)$存在，且
3. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

所有多项式函数是连续的，除了没有定义的点，即分母等于零，有理函数也是连续的．见问题 3.5.

例 3 一笔画出一个连续函数，图像上的开圆，意味着在函数上有一个缺口，很明显，在图 3-3(a)中，函数 $f(x)$在 $x=4$ 不连续；在图 3-3(b)中，$g(x)$在 $x=5$ 不连续，但 $\lim_{x\to 5}g(x)$存在.



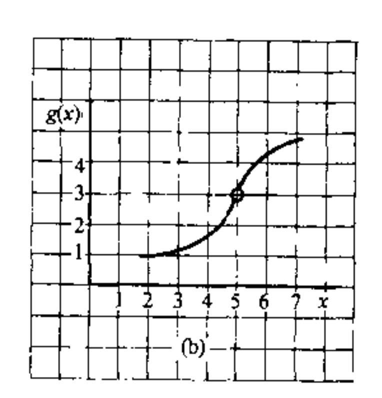


图 3-3

3.3 曲线函数的斜率

曲线函数的斜率不是常数，其在曲线的不同点是不同的．在几何上，曲线函数在给定点的斜率是用这个函数在这点切线的斜率来测度的．切线是一条与曲线仅交于一点的直线．曲线函数在不同点的斜率的测度需要分离出切线，如图 3-4(a).

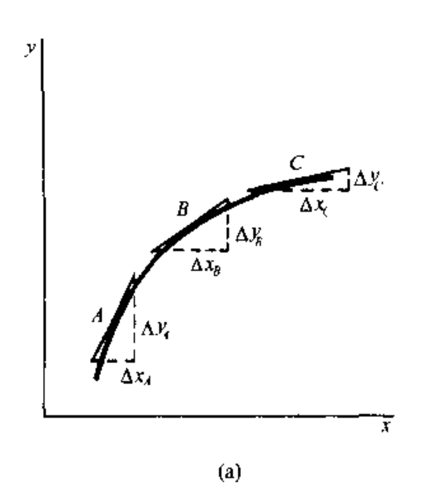
切线的斜率可从一族割线中得到．割线 S 是一条交曲线于两点的直线，见图 3-4(b)，这里

$$\text{斜率 } S=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

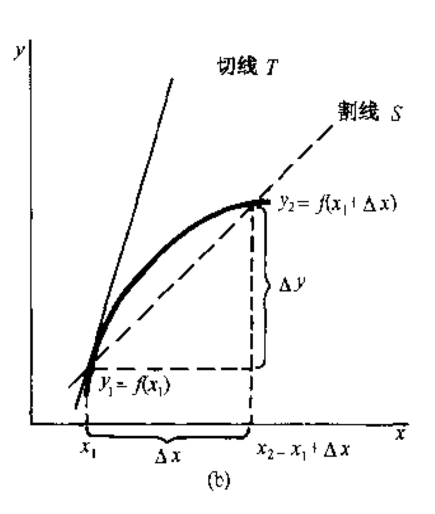
设 $x_2=x_1+\Delta x$，$y_2=f(x_1+\Delta x)$，割线的斜率也可以由差商表示：

$$\text{斜率 } S=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

如果 x_2 和 x_1 间的距离越来越小，即 $\Delta x\to 0$，则割线的斜率向左旋转，并且逐渐接近于切线．如果当 $\Delta x\to 0$ 时，割线的斜率的极限存在，则这个极限就为切线的斜率 T，也是函数在这点的斜率．写成



(a)



(b)

图 3-4

$$斜率\ T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

注　在许多教科书中，用 h 代替 Δx，得到

$$斜率\ T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \tag{3.1a}$$

例 4　计算一个曲线函数，如 $f(x)=2x^2$ 的斜率，(1)用代数式(3.1)或(3.1a)，并且分别代入 $x_1+\Delta x$(或 x_1+h)和 x_1，(2) 简化函数，(3)在函数的简化形式中，计算函数的极限．由(3.1)

$$斜率\ T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

解　☞(1)　对于函数 $f(x)=2x^2$，代入数据．

$$斜率\ T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2-2x^2}{\Delta x}$$

(2)　简化结果．

$$斜率\ T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2]-2x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x(\Delta x)+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

约去 Δx．

$$斜率\ T = \lim_{\Delta x \to 0}(4x+2\Delta x)$$

(3)　求简化式的极限．

$$斜率\ T = 4x$$

注　斜率的值依赖于所选的 x 的值．在 $x=1$，斜率 $T=4(1)=4$；在 $x=2$，斜率 $T=4(2)=8$．

3.4　导数

给定一个函数 $f(x)$，f 在 x 处的导数，写成 $f'(x)$或 dy/dx，定义为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (如果极限存在) \tag{3.2}$$

或由(3.1a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \tag{3.2a}$$

$f'(x)$读作"f 关于 x 的导数"或"$f'(x)$".

一个函数的导数 $f'(x)$，或简记为 f'，是原函数 $f(x)$在给定点的斜率或瞬时变化率的测度.

3.5 可微性和连续性

一个函数在一点是可微的，如果在这点的函数导数存在. 若函数在一点可微，则函数(1)在这点连续，并且(2) 在这点有惟一切线. 在图 3-5 中，$f(x)$在点 a 和 c 不可微，因为,在这些点上，函数存在缺口. 在不连续点上，导数不存在.

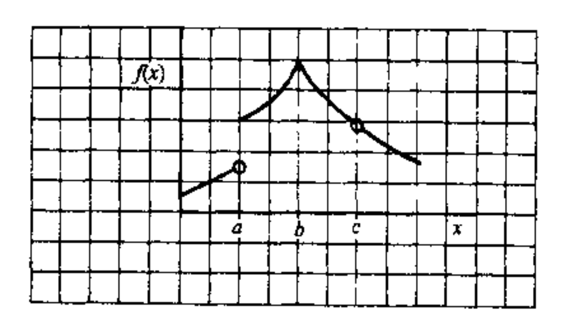


图 3-5

然而，只有连续不能保证(不是充分条件)可微. 在图 3-5 中，$f(x)$在 b 点连续，但在 b 点不可微，因为，在急转点或结点，称为尖点，有无数条切线(无惟一的切线).

3.6 导数符号

一个函数的导数能写成许多不同形式. 如果 $y=f(x)$，导数能表示成

$$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)] \qquad 或 \qquad D_x[f(x)]$$

如果 $y=\phi(x)$，则导数可写为

$$\phi'(t) \qquad y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\phi(t)] \qquad 或 \qquad D_t[\phi(t)]$$

如果计算 $y=f(x)$的导数在 $x=a$ 的值，其符号有 $f'(a)$和$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_a$.

例 5　如果 $y=5x^2+7x+12$，则函数的导数可写为

$$y' \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2+7x+12) \qquad 或 \qquad D_x(5x^2+7x+12)$$

如果 $z=\sqrt{8t-3}$，导数可表示为

$$z' \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{8t-3}) \qquad 或 \qquad D_t(\sqrt{8t-3})$$

见问题 3.6~3.8.

3.7 微分法则

微分法是求一个函数导数的过程. 它就是对给定的函数用一些基本法则或公式. 在讲一个函数(如 $y=f(x)$)的微分法时，对其他的函数，如 $g(x)$，$h(x)$，并且这些函数是 x 的非特殊函数，其法则完全适用. 下列是微分法法则,例解见问题 3.6~3.21. 法则的证明在问题 3.24~3.26 中.

3.7.1 常值函数法则

常值函数 $f(x)=k$ (k 是常数)的导数是零.

设 $f(x)=k$,　　　　$f'(x)=0$

例 6　设 $f(x)=8$,　　　　$f'(x)=0$

设 $f(x)=-6$,　　　　$f'(x)=0$

3.7.2　线性函数法则

线性函数 $f(x)=mx+b$ 的导数等于 x 的系数 m. 一个一次幂变量的导数是这个变量的系数, 此时常数的导数是零.

设 $f(x)=mx+b$,　　　　$f'(x)=m$

例 7　设 $f(x)=3x+2$,　　　　$f'(x)=3$

设 $f(x)=5-\frac{1}{4}x$,　　　　$f'(x)=-\frac{1}{4}$

设 $f(x)=12x$,　　　　$f'(x)=12$

3.7.3　幂函数法则

幂函数 $f(x)=kx^n$(k 是一个常数, n 是任意实数)的导数等于常数 k 乘以指数 n 乘以 x 的 $n-1$ 次幂.

设 $f(x)=kx^n$　　　　$f'(x)=k\cdot n\cdot x^{n-1}$

例 8　设 $f(x)=4x^3$,　　　　$f'(x)=4\cdot 3\cdot x^{3-1}=12x^2$

设 $f(x)=5x^2$,　　　　$f'(x)=5\cdot 2\cdot x^{2-1}=10x$

设 $f(x)=x^4$,　　　　$f'(x)=1\cdot 4\cdot x^{4-1}=4x^3$

也见问题 3.7.

3.7.4　和及差的法则

设 $g(x)$和 $h(x)$是可微函数, 则两个函数的和 $f(x)=g(x)+h(x)$的导数等于这两个函数导数的和. 类似地, 两个函数差的导数等于这两个函数导数的差.

设 $f(x)=g(x)\pm h(x)$,　　　　$f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$

例 9　设 $f(x)=12x^5-4x^4$,　　　　$f'(x)=60x^4-16x^3$

设 $f(x)=9x^2+2x-3$,　　　　$f'(x)=18x+2$

见问题 3.8. 法则的证明见问题 3.24.

3.7.5　乘积法则

设 $g(x)$和 $h(x)$是两个可微函数, 则乘积 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$的导数等于第一个函数乘以第二个函数的导数加上第二个函数乘以第一个函数的导数. 设 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$,

$$f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x) \tag{3.3}$$

例 10　给定 $f(x)=3x^4(2x-5)$, 设 $g(x)=3x^4$, $h(x)=2x-5$. 求各函数的导数 $g'(x)=12x^3$, $h'(x)=2$. 将这些代入乘法公式(3.3)得

$$f'(x)=3x^4(2)+(2x-5)(12x^3)$$

简化代数式得

$$f'(x)=6x^4+24x^4-60x^3=30x^4-60x^3$$

见问题 3.9~3.11; 法则的证明见问题 3.25.

3.7.6　商的法则

设 $g(x)$和 $h(x)$都是可微函数, 并且 $h(x)\neq 0$, 则商 $f(x)=g(x)/h(x)$的导数等于分母乘以分子的导数减去分子乘以分母的导数, 然后其差除以分母的平方. 设 $f(x)=g(x)/h(x)$,

$$f'(x) = \frac{h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2} \tag{3.4}$$

例 11　设

$$f(x) = \frac{5x^3}{4x+3}$$

这里，$g(x)=5x^3$，$h(x)=4x+3$，我们知道 $g'(x)=15x^2$，$h'(x)=4$，将这些代入商的求导公式(3.4)，

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(15x^2) - 5x^3(4)}{(4x+3)^2}$$

化简

$$f'(x) = \frac{60x^3+45x^2-20x^3}{(4x+3)^2} = \frac{40x^3+45x^2}{(4x+3)^2} = \frac{5x^2(8x+9)}{(4x+3)^2}$$

见问题 3.12 和 3.13．法则的证明见问题 3.26．

3.7.7　一般化的幂函数的导数

设 $g(x)$是可微函数，n 是任意实数，则一个函数幂($f(x)=[g(x)]^n$)的导数等于 n 乘以 $g(x)$的 $n-1$ 次幂，再乘以这个函数的导数 $g'(x)$．设 $f(x)=[g(x)]^n$，

$$f'(x) = n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x) \tag{3.5}$$

例 12　给定 $f(x)=(x^3+6)^5$，设 $g(x)=x^3+6$．代 $g(x)$到一般化的幂函数公式(3.5)得

$$f'(x) = 5(x^3+6)^{5-1}\cdot 3x^2$$

化简

$$f'(x) = 5(x^3+6)^4\cdot 3x^2 = 15x^2(x^3+6)^4$$

注　一般化的幂函数法则从下面的链式法则中推出．见问题 3.14 和 3.15．

3.7.8　链式法则

给一个复合函数，也称函数的函数，在这里，y 是 u 的函数，而 u 是 x 的函数，即 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则 $y=f[g(x)]$．y 关于 x 的导数等于第一个函数对 u 的导数乘以第二个函数对 x 的导数：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{3.6}$$

见问题 3.16 和 3.17．

例 13　考虑函数 $y=(5x^2+3)^4$．设 $y=u^4$，$u=5x^2+3$，则 $dy/du=4u^3$，$du/dx=10x$．将它们代入链式法则(3.6)：

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3\cdot 10x = 40xu^3$$

然后，将 u 换成 $5x^2+3$，使导数用一个变量表示．

$$\frac{dy}{dx} = 40x(5x^2+3)^3$$

对于更复杂的函数，可用基本法则的不同组合．见问题 3.18 和 3.19．

3.8　高阶导数

正像一阶导数是测度原函数的斜率和变化率，二阶导数 $f''(x)$是测度一阶导数的斜率和变化率．三阶导数 $f'''(x)$是测度二阶导数的斜率和变化率，等等．高阶导数是由低阶导数应用微分法则得到的，如例 14 中的例子及问题 3.20 和 3.21．

例 14　设 $y=f(x)$，二阶导数的符号通常为 f''，d^2y/dx^2，y''及 D^2y；三阶导数为 $f'''(x)$，d^3y/dx^3，y'''及 D^3y；四阶导数为 $f^{(4)}$，d^4y/dx^4，$y^{(4)}$及 D^4y；等等．

高阶导数是从前一阶导数通过微分法则得到．因此，如果 $f(x)=2x^4+5x^3+3x^2$，则

$$f'(x)=8x^3+15x^2+6x$$
$$f''(x)=24x^2+30x+6$$
$$f'''(x)=48x+30$$
$$f^{(4)}(x)=48 \qquad f^{(5)}(x)=0$$

见问题 3.20 和 3.21.

3.9 隐函数的微分法

经济学导引经常处理显函数，即非独立变量在等式的左端，独立变量在等式右端．然而，在高级经济学中，常见的是隐函数，即变量和常数都在等式的左端的函数．一些隐函数很容易通过将非独立变量解为独立变量的函数而变成显函数，而有些则不能．对于那些不能变成显函数的函数，其导数需要用隐函数微分法．见例 16 和问题 3.22，3.23，4.25 及 4.26；也见 5.10 节和问题 5.20，5.21，6.51 和 6.52.

例 15　显函数和隐函数的例子：

显函数：　$y=4x \qquad y=x^2+6x-7 \qquad y=\dfrac{x^4-9x^3}{x^2-13}$

隐函数：　$8x+5y-21=0 \quad 3x^2-8xy-5y-49=0 \quad 35x^3y^7-106=0$

例 16　设 $3x^4-7y^5-86=0$，导数 dy/dx 经过两步隐函数微分法得到．

1)　方程两边对 x 求导，此时，y 是 x 的函数，

$$\frac{d}{dx}(3x^4-7y^5-86)=\frac{d}{dx}(0) \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dx}(3x^4)-\frac{d}{dx}(7y^5)-\frac{d}{dx}(86)=\frac{d}{dx}(0)$$

这里，$\dfrac{d}{dx}(3x^4)=12x^3$，$\dfrac{d}{dx}(86)=0$，$\dfrac{d}{dx}(0)=0$．对 $\dfrac{d}{dx}(7y^5)$ 用一般幂函数法则，且 $\dfrac{d}{dx}(y)=\dfrac{dy}{dx}$，得到

$$\frac{d}{dx}(7y^5)=7\cdot 5\cdot y^{5-1}\cdot\frac{d}{dx}(y)=35y^4\frac{dy}{dx}$$

代式到(3.7)，

$$12x^3-35y^4\frac{dy}{dx}=0 \tag{3.8}$$

2)　从(3.8)解出 dy/dx：

$$-35y^4\frac{dy}{dx}=-12x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^3}{35y^4}$$

与第五章例 16 的结果进行比较．

习 题 解 答

极限和连续

3.1　用极限法则求下列函数的极限：

(a)　$\lim\limits_{x\to 2}[x^3(x+4)]$

解 ☞

$$\lim_{x\to 2}[x^3(x+4)]=\lim_{x\to 2}x^3\cdot\lim_{x\to 2}(x+4)$$

$$= (2)^3 \cdot (2+4) = 8 \cdot 6 = 48 \qquad (法则 5)$$

(b) $\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 5x}{x+6}$

解 ☞

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 5x}{x+6} = \frac{\lim_{x \to 4}(3x^2 - 5x)}{\lim_{x \to 4}(x+6)}$$
$$= \frac{3(4)^2 - 5(4)}{4+6} = \frac{48-20}{10} \qquad (法则 6)$$
$$= 2.8$$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{6x^3 + 1}$

解 ☞

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{6x^3+1} = \lim_{x \to 2}(6x^3+1)^{1/2}$$
$$= [\lim_{x \to 2}(6x^3+1)]^{1/2} \qquad (法则 7)$$
$$= [6(2)^3+1]^{1/2} = (49)^{1/2} = \pm 7$$

3.2 求下列多项式和有理函数的极限.

(a) $\lim_{x \to 3}(5x^2 - 4x + 9)$

解 ☞ 由极限的性质可以证明对于多项式和有理函数，有 $f(x)_{x \to a} = f(a)$. 因此，求这个极限可以简单地计算在 a 的函数值.

$$\lim_{x \to 3}(5x^2 - 4x + 9) = 5(3)^2 - 4(3) + 9 = 42$$

(b) $\lim_{x \to -4}(3x^2 + 7x - 12)$

解 ☞

$$\lim_{x \to -4}(3x^2 + 7x - 12) = 3(-4)^2 + 7(-4) - 12 = 8$$

(c) $\lim_{x \to 6} \frac{4x^2 - 2x - 8}{5x^2 + 6}$

解 ☞

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x^2 - 2x - 8}{5x^2+6} = \frac{4(6)^2 - 2(6) - 8}{5(6)^2 + 6} = \frac{124}{186} = \frac{2}{3}$$

3.3 求下列有理函数的极限. 如果分母的极限等于零，则法则 6 及上面对有理函数的一般法则都不适用.

(a) $\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{x^2 - 49}$

解 ☞ 分母的极限为零，则法则 6 就不适用了. 因为我们仅感兴趣当 x 趋近于 7 时函数的极限，而通过因式分解及约分，分母零的问题可以消除，所以这个函数的极限可被求出.

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{x^2-49} = \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{(x+7)(x-7)}$$
$$= \lim_{x \to 7} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{14}$$

(b) $\lim_{x \to -7} \frac{x-7}{x^2-49}$

解 ☞

$$\lim_{x \to -7} \frac{x-7}{x^2-49} = \lim_{x \to -7} \frac{x-7}{(x+7)(x-7)}$$
$$= \lim_{x \to -7} \frac{1}{x+7}$$

极限不存在.

(c) $\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 2x - 24}{x-6}$

解 ☞ 由于分母的极限等于零，因此分解因式.

$$\lim_{x \to 6} \frac{x^2 - 2x - 24}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{(x+4)(x-6)}{x-6} = \lim_{x \to 6}(x+4) = 10$$

3.4 求下列函数的极限. 注意无穷的作用.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$

解 ☞ 正像在图 1-3(a)中看到的，当 x 从 0 的右端趋于 $0(x\to0^+)$时，$f(x)$趋近于正无穷；而当 x 从 0 的左端趋于 $0(x\to0^-)$时，$f(x)$趋近于负无穷．如果极限既趋于正无穷，也趋于负无穷，则其极限不存在，写成

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{2}{x}=-\infty \qquad \text{极限不存在}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}$ 　 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}$

解 ☞ 正像在图 1-3(b)中看到的，当 x 趋于∞时，$f(x)$趋近于 0；当 x 趋于 $-\infty$时，$f(x)$也趋于 0，则极限在每种情况下都存在，写成

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x}{4x^2-21}$

解 ☞ 当 $x\to\infty$时，分子和分母都为无穷，使问题不确定．在这种情况下的一个处理方法是函数中的每一项都除以 x 的最高次幂．这里，所有项除 x^2 得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x}{4x^2-21}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-(7/x)}{4-(21/x^2)}=\frac{3-0}{4-0}=\frac{3}{4}$$

3.5 通过判定在给定的点，3.2 节所列的条件：(1) $f(x)$有定义；(2)$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在；(3)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$是否满足，指出下列函数是否连续．

解 ☞ (a) $f(x)=5x^2-8x+9$ 在 $x=3$

(1) $f(3)=5(3)^2-8(3)+9=30$,

(2) $\lim\limits_{x\to3}(5x^2-8x+9)=5(3)^2-8(3)+9=30$,

(3) $\lim\limits_{x\to3}f(x)=30=f(3)$，$f(x)$是连续的．

(b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+12}{x-3}$在 $x=4$

(1) $f(4)=\dfrac{(4)^2+3(4)+12}{4-3}=\dfrac{40}{1}=40$,

(2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+3x+12}{x-3}=40$,

(3) $\lim\limits_{x\to4}f(x)=40=f(4)$，$f(x)$是连续的．

(c) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$在 $x=3$

(1) $f(3)=\dfrac{3-3}{(3)^2-9}$

由于分母等于零，所以 $f(x)$在 $x=3$ 处没有定义．因此，尽管函数在 $x=3$ 处极限存在，但在$x=3$处函数不连续．见第 2，3 步．

(2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{1}{6}\neq f(3)$．所以 $f(x)$在 $x=3$ 处不连续．

导数符号和简单导数

3.6 求下列函数的导数，并用不同的函数符号表示．

解 ☞ (a) $f(x)=17$

$f'(x)=0$(常数法则)

(b) $y=-12$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

(c) $y=5x+12$

$y'=5$(线性函数法则)

(d) $f(x)=9x-6$

$f'=9$

3.7 用幂函数法则，求下列函数的导数．继续用不同的符号．

解 ☞ (a) $y=8x^3$　　　　(b) $f(x)=-6x^5$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8x^3)=24x^2$　　　　$f'=-30x^4$

(c) $f(x)=5x^{-2}$

$f'(x)=5(-2)\cdot x^{[-2-(1)]}=-10x^{-3}=-\frac{10}{x^3}$

(d) $y=-9x^{-4}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-9(-4)\cdot x^{[-4-(1)]}=36x^{-5}=\frac{36}{x^5}$

(e) $y=\frac{7}{x}=7x^{-1}$

$D_x(7x^{-1})=7(-1)x^{-2}=-7x^{-2}=-\frac{7}{x^2}$

(f) $f(x)=18\sqrt{x}=18x^{1/2}$

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=18\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^{1/2-1}=9x^{-1/2}=\frac{9}{\sqrt{x}}$

3.8 用和、差法则求下列函数的导数．左端的非独立变量视为 y，右端的独立变量视作 x．

解 ☞ (a) $R=8t^2+5t-6$

$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=16t+5$

(b) $C=4t^3-9t^2+28t-68$

$C'=12t^2-18t+28$

(c) $p=6q^5-3q^3$

$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=30q^4-9q^2$

(d) $q=7p^4+15p^{-3}$

$D_p(7p^4+15p^{-3})=28p^3-45p^{-4}$

乘法法则

3.9 设 $y=f(x)=5x^4(3x-7)$，(a)用乘法法则求导数．(b)先化简函数，然后求导数．(c)比较两个导数．

解 ☞ (a) 乘法的求导法则如(3.3)

$$f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

设 $g(x)=5x^4$，$h(x)=3x-7$，则 $g'(x)=20x^3$，$h'(x)=3$．因此，代入乘法导数公式得

$$y'=f'(x)=5x^4(3)+(3x-7)(20x^3)$$

化简为

$$y'=15x^4+60x^4-140x^3=75x^4-140x^3$$

(b) 代数整理

$$y=5x^4(3x-7)=15x^5-35x^4$$

求导数

$$y'=75x^4-140x^3$$

(c) (a)和(b)中函数的导数是一样的．对乘积函数可以用其中的任一方法来求，但是当函数很复杂时，乘法法则将是更有效的．其他的方法可以用来验证答案．

3.10 再解答问题 3.9，给定 $y=f(x)=(x^8+8)(x^6+11)$．

解 ☞ (a) 设 $g(x)=x^8+8$，$h(x)=x^6+11$，则 $g'(x)=8x^7$，$h'(x)=6x^5$，代入(3.3)，

$$y'=f'(x)=(x^8+8)(6x^5)+(x^6+11)(8x^7)$$
$$=6x^{13}+48x^5+8x^{13}+88x^7=14x^{13}+88x^7+48x^5$$

(b) 首先进行乘法运算简化函数，

$$y=(x^8+8)(x^6+11)=x^{14}+11x^8+8x^6+88$$

则

$$y'=14x^{13}+88x^7+48x^5$$

(c) 导数是相同的．

3.11　用乘法法则求下列函数的导数. 注意：在这里，是有意选择简单的问题，在本书的其他节里，学生们将能看到各法则的运用. 在求导前，对函数进行代数运算常是容易和合适的，但对问题用各种法则最终将帮助学生更熟练地掌握这些法则.

解　(a)　$y=(4x^2-3)(2x^5)$

$$\frac{dy}{dx}=(4x^2-3)(10x^4)+2x^5(8x)=40x^6-30x^4+16x^6=56x^6-30x^4$$

(b)　$y=7x^9(3x^2-12)$

$$\frac{dy}{dx}=7x^9(6x)+(3x^2-12)(63x^8)=42x^{10}+189x^{10}-756x^8=231x^{10}-756x^8$$

(c)　$y=(2x^4+5)(3x^5-8)$

$$\frac{dy}{dx}=(2x^4+5)(15x^4)+(3x^5-8)(8x^3)=30x^8+75x^4+24x^8-64x^3=54x^8+75x^4-64x^2$$

(d)　$z=(3-12t^3)(5+4t^6)$

$$\frac{dz}{dt}=(3-12t^3)(24t^5)+(5+4t^6)(-36t^2)=72t^5-288t^8-180t^2-144t^8=-432t^8+72t^5-180t^2$$

商的法则

3.12　设

$$y=\frac{10x^8-6x^7}{2x}$$

(a)用商的法则直接求导数. (b) 用除法简化函数，然后求导数. (c) 比较两个导数.

解　(a) 由(3.4)，商的导数公式为

$$f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

这里，$g(x)=$分子$=10x^8-6x^7$，$h(x)=$分母$=2x$. 分别求导数

$$g'(x)=80x^7-42x^6\qquad h'(x)=2$$

代入公式

$$y'=\frac{2x(80x^7-42x^6)-(10x^8-6x^7)(2)}{(2x)^2}$$

$$=\frac{160x^8-84x^7-20x^8+12x^7}{4x^2}=\frac{140x^8-72x^7}{4x^2}$$

$$=35x^6-18x^5$$

(b)　首先用除法简化函数，

$$y=\frac{10x^8-6x^7}{2x}=5x^7-3x^6$$

$$y'=35x^6-18x^5$$

(c)　如果直接求导，导数是一样的，但是当函数在复杂程度上提高时，商的求导法则更重要. 第二种方法也用来检验答案.

3.13　用商的求导法则求下列函数的导数. 在这里，对给定的函数继续用这一法则. 当所有的法则都掌握了以后，再考虑首先简化函数，然后选择最简单的法则.

解　(a)　$y=\dfrac{3x^8-4x^7}{4x^3}$

这里，$g(x)=3x^8-4x^7$，$h(x)=4x^3$，则 $g'(x)=24x^7-28x^6$，

$h'(x)=12x^2$，代入商的导数公式

$$y'=\frac{4x^3(24x^7-28x^6)-(3x^8-4x^7)(12x^2)}{(4x^3)^2}$$

$$=\frac{96x^{10}-112x^9-36x^{10}+48x^9}{16x^6}=\frac{60x^{10}-64x^9}{16x^6}=3.75x^4-4x^3$$

(b)　$y=\dfrac{4x^5}{1-3x}\qquad\left(x\neq\dfrac{1}{3}\right)$

（注：增加限制性条件是因为，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，分母等于零，函数没有定义.）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-3x)(20x^4)-4x^5(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{20x^4-60x^5+12x^5}{(1-3x)^2}=\frac{20x^4-48x^5}{(1-3x)^2}$$

(c) $y=\frac{15x^2}{2x^2+7x-3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2+7x-3)(30x)-15x^2(4x+7)}{(2x^2+7x-3)^2}$$

$$=\frac{60x^3+210x^2-90x-60x^3-105x^2}{(2x^2+7x-3)^2}=\frac{105x^2-90x}{(2x^2+7x-3)^2}$$

(d) $y=\frac{6x-7}{8x-5}$　$(x\neq\frac{5}{8})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(8x-5)(6)-(6x-7)(8)}{(8x-5)^2}=\frac{48x-30-48x+56}{(8x-5)^2}=\frac{26}{(8x-5)^2}$$

(e) $y=\frac{5x^2-9x+8}{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(10x-9)-(5x^2-9x+8)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{10x^3-9x^2+10x-9-10x^3+18x^2-16x}{(x^2+1)^2}=\frac{9x^2-6x-9}{(x^2+1)^2}$$

一般幂函数法则

3.14　设 $y=(5x+8)^2$. (a) 用一般幂函数求导法则求导数；(b) 首先对函数进行平方展开，然后求导数；(c) 比较两者答案.

解 (a) 由一般幂函数求导法则(3.5)，若 $f(x)=[g(x)]^n$

$$f'(x)=n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$$

这里，$g(x)=5x+8, g'(x)=5$，并且 $n=2$. 代入这些量到一般幂函数求导法则，

$$y'=2(5x+8)^{2-1}\cdot 5=10(5x+8)=50x+80$$

(b) 首先将函数平方展开，然后求导数

$$y=(5x+8)(5x+8)=25x^2+80x+64$$

$$y'=50x+80$$

(c) 这两个导数相同. 但当 n 的值比较大，或为负值、分数时，一般幂函数法则将更快和更实际.

3.15　用一般幂函数求导法则求下列函数的导数.

(a) $y=(6x^3+9)^4$

解 这里，$g(x)=6x^3+9$，$g'(x)=18x^2$，且 $n=4$. 代入一般幂函数导数公式

$$y'=4(6x^3+9)^{4-1}\cdot 18x^2$$

$$=4(6x^3+9)^3\cdot 18x^2=72x^2(6x^3+9)^3$$

(b) $y=(2x^2-5x+7)^3$

解

$$y'=3(2x^2-5x+7)^2\cdot(4x-5)$$

$$=(12x-15)(2x^2-5x+7)^2$$

(c) $y=\frac{1}{7x^3+13x+3}$

解 首先将此函数转换成等价形式

$$y=(7x^3+13x+3)^{-1}$$

然后，用一般幂函数法则，

$$y'=-1(7x^3+13x+3)^{-2}\cdot(21x^2+13)$$

$$=-(21x^2+13)(7x^3+13x+3)^{-2}$$

$$=\frac{-(21x^2+13)}{(7x^3+13x+3)^2}$$

(d)　$y=\sqrt{34-6x^2}$

解 ☞ 将根式转换成幂函数，然后求微分.

$$y=(34-6x^2)^{1/2}$$

$$y'=\frac{1}{2}(34-6x^2)^{1/2}\cdot(-12x)$$

$$=-6x(34-6x^2)^{-1/2}=\frac{-6x}{\sqrt{34-6x^2}}$$

(e)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^3+94}}$

解 ☞ 进行等价转换，然后求导数.

$$y=(4x^3+94)^{-1/2}$$

$$y'=-\frac{1}{2}(4x^3+94)^{-3/2}\cdot(12x^2)=-6x^2(4x^3+94)^{3/2}$$

$$=\frac{-6x^2}{(4x^3+94)^{3/2}}=\frac{-6x^2}{\sqrt{(4x^3+94)^3}}$$

链式法则

3.16　对下列每个函数，用链式法则求导数 dy/dx. 你自己用一般幂函数法则检验每个答案. 注意到，一般幂函数法则恰是一个特殊的链式法则.

(a)　$y=(3x^4+5)^6$

解 ☞ 设 $y=u^6$，$u=3x^4+5$，则 $dy/du=6u^5$，并且 $du/dx=12x^3$，由链式法则(3.6).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

代入，得

$$\frac{dy}{dx}=6u^5\cdot12x^3=72x^3u^5$$

但是，$u=3x64+5$，再次代入，得

$$\frac{dy}{dx}=72x^3(3x^4+5)^5$$

(b)　$y=(7x+9)^2$

解 ☞ 设 $y=u^2$，$u=7x+9$，则 $dy/du=2u$，$du/dx=7$，代入链式法则得，

$$\frac{dy}{dx}=2u\cdot7=14u$$

则代 $7x+9$ 到 u.

$$\frac{dy}{dx}=14(7x+9)=98x+126$$

(c)　$y=(4x^5-1)^7$

解 ☞ 设 $y=u^7$，$u=4x^5-1$，则 $dy/du=7u^6$，$du/dx=20x^4$，且

$$\frac{dy}{dx}=7u^6\cdot20x^4=140x^4u^6$$

代 $u=4x^5-1$

$$\frac{dy}{dx}=140x^4(4x^5-1)^6$$

3.17　再解答问题 3.16，给定：

(a)　$y=(x^2+3x-1)^5$

解 ☞ 设 $y=u^5$，$u=x^2+3x-1$，则 $dy/du=5u^4$，$du/dx=2x+3$. 代入(3.6)得.

$$\frac{dy}{dx}=5u^4(2x+3)=(10x+15)u^4$$

但 $u=x^2+3x-1$，因此，

$$\frac{dy}{dx}=(10x+15)(x^2+3x-1)^4$$

(b) $y=-3(x^2-8x+7)^4$

解 ☞ 设 $y=-3u^4$, $u=x^2-8x+7$. 则 $dy/du=-12u^3$, $du/dx=2x-8$, 且

$$\frac{dy}{dx}=-12u^3(2x-8)=(-24x+96)u^3$$
$$=(-24x+96)(x^2-8x+7)^3$$

法则的组合

3.18 用各法则的组合求下列函数的导数. 不事先简化原始函数，以方便各法则的实施.

(a) $y=\dfrac{3x(2x-1)}{5x-2}$

解 ☞ 此函数为商的形式，其分子为两个函数相乘，因此，需要乘法及商的法则. 先用(3.4)的商的法则

$$y'=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

这里，$g(x)=3x(2x-1)$, $h(x)=5x-2$ 且 $h'(x)=5$. 则对 $g'(x)$ 用(3.3)的乘法法则得

$$g'(x)=3x\cdot 2+(2x-1)\cdot 3=12x-3$$

将此式代入商的公式中

$$y'=\frac{(5x-2)(12x-3)-[3x(2x-1)]\cdot 5}{(5x-2)^2}$$

代数简化

$$y'=\frac{60x^2-15x-24x+6-30x^2+15x}{(5x-2)^2}=\frac{30x^2-24x+6}{(5x-2)^2}$$

注 可以设

$$y=3x\cdot\frac{2x-1}{5x-2}\quad 或\quad y=\frac{3x}{5x-2}\cdot(2x-1)$$

然后用包含商的乘法法则来检验答案.

(b) $y=3x(4x-5)^2$

解 ☞ 此函数为两个函数的乘积，其中一个函数是幂函数. 这需要用乘法法则及幂函数求导法则，先用乘法法则.

$$y'=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

这里

$$g(x)=3x\qquad h(x)=(4x-5)^2\quad 且\quad g'(x)=3$$

用幂函数求导法求 $h'(x)$

$$h'(x)=2(4x-5)\cdot 4=8(4x-5)=32x-40$$

将相应的值代入乘法公式中

$$y'=3x\cdot(32x-40)+(4x-5)^2\cdot 3$$

进行代数简化

$$y'=96x^2-120x+3(16x^2-40x+25)=144x^2-240x+75$$

(c) $y=(3x-4)\cdot\dfrac{5x+1}{2x+7}$

解 ☞ 这是包含商的函数乘法，需要用乘法及商的求导法则. 先用乘法法则

$$y'=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

这里

$$g(x)=3x-4\qquad h(x)=\frac{5x+1}{2x+7}\quad 且\quad g'(x)=3$$

用商的求导法则求 $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{(2x+7)(5)-(5x+1)(2)}{(2x+7)^2} = \frac{33}{(2x+7)^2}$$

将相应的结果代入乘法公式中

$$y' = (3x-4)\cdot\frac{33}{(2x+7)^2} + \frac{5x+1}{2x+7}\cdot 3 = \frac{99x-132}{(2x-7)^2} + \frac{15x+3}{2x+7}$$

$$= \frac{99x-132+(15x+3)(2x+7)}{(2x+7)^2} = \frac{30x^2+210x-111}{(2x+7)^2}$$

可以设 $y=(3x-4)(5x+1)/(2x+7)$，然后用乘法及商的求导法则来检验答案.

(d)　$y=\dfrac{(8x-5)^3}{(7x+4)}$

解 ☞ 先用商的法则，这里

$$g(x) = (8x-5)^3 \qquad h(x) = 7x+4 \qquad h'(x) = 7$$

用幂函数的求导法则求 $g'(x)$

$$g'(x) = 3(8x-5)^2\cdot 8 = 24(8x-5)^2$$

将这些结果代入商的求导法则中

$$y' = \frac{(7x+4)\cdot 24(8x-5)^2-(8x-5)^3\cdot 7}{(7x+4)^2}$$

$$= \frac{(168x+96)(8x-5)^2-7(8x-5)^3}{(7x+4)^2}$$

设 $y=(8x-5)^3(7x+4)^{-1}$，然后用乘法法则及两次幂函数求导法则可检验此答案.

(e)　$y=\left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^2$

解 ☞ 先用幂函数求导法则

$$y' = 2\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right) \tag{3.9}$$

然后用商的求导法则

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right) = \frac{(2x+5)(3)-(3x+4)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{7}{(2x+5)^2}$$

将结果代入(3.9)

$$y' = 2\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)\cdot\frac{7}{(2x+5)^2} = \frac{14(3x+4)}{(2x+5)^3} = \frac{42x+56}{(2x+5)^3}$$

设 $y=(3x+4)^2(2x+5)^{-2}$，用乘法法则及两次幂函数求导法则可检验答案.

3.19　用必要的求导法则求下列函数的导数

(a)　$y=(5x-1)(3x+4)^3$

解 ☞ 用乘法法则及幂函数求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = (5x-1)[3(3x+4)^2(3)] + (3x+4)^3(5)$$

代数简化得

$$\frac{dy}{dx} = (5x-1)(9)(3x+4)^2 + 5(3x+4)^3 = (45x-9)(3x+4)^2 + 5(3x+4)^3$$

(b)　$y=\dfrac{(9x^2-2)(7x+3)}{5x}$

解 ☞ 用商及乘法法则得

$$y' = \frac{5x[(9x^2-2)(7)+(7x+3)(18x)]-(9x^2-2)(7x+3)(5)}{(5x)^2}$$

代数简化得

$$y' = \frac{5x(63x^2-14+126x^2-54x)-5(63x^3+27x^2-14x-6)}{25x^2}$$

$$= \frac{630x^3+135x^2+30}{25x^2}$$

(c)　$y=\frac{15x+23}{(3x+1)^2}$

解　☞ 用商及幂函数求导法则得

$$y'=\frac{(3x+1)^2(15)-(15x+23)[2(3x+1)(3)]}{(3x+1)^4}$$

代数简化得

$$y'=\frac{15(3x+1)^2-(15x+23)(18x+6)}{(3x+1)^4}=\frac{-135x^2-414x-123}{(3x+1)^4}$$

(d)　$y=(6x+1)\frac{4x}{9x-1}$

解　☞ 用乘法及商的法则得

$$D_x=(6x+1)\frac{(9x-1)(4)-4x(9)}{(9x-1)^2}+\frac{4x}{9x-1}(6)$$

代数简化得

$$D_x=\frac{(6x+1)(36x-4-36x)}{(9x-1)^2}+\frac{24x}{9x-1}=\frac{216x^2-48x-4}{(9x-1)^2}$$

(e)　$y=\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^3$

解　☞ 用幂函数及商的求导法则得

$$y'=3\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^2\frac{(2x+5)(3)-(3x-1)(2)}{(2x+5)^2}$$

代数简化得

$$y'=\frac{3(3x-1)^2}{(2x+5)^2}\cdot\frac{17}{(2x+5)^2}=\frac{51(3x-1)^2}{(2x+5)^4}$$

高阶导数

3.20　对下列函数，(1) 求二阶导数，(2) 求其在 $x=2$ 时的值，并分别用不同的二阶导数表示法表示.

(a)　$y=7x^3+5x^2+12$

解　☞ (1)　$\frac{dy}{dx}=21x^2+10x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=42x+10$

(2)　在 $x=2$ 点，$\frac{d^2y}{dx^2}=42(2)+10=94$

(b)　$f(x)=x^6+3x^4+x$

解　☞ (1)　$f'(x)=6x^5+12x^3+1$

$f''(x)=30x^4+36x^2$

(2)　在 $x=2$ 点，$f''(x)=30(2)^4+36(2)^2=624$

(c)　$y=(2x+3)(8x^2-6)$

解　☞ (1)　$Dy=(2x+3)(16x)+(8x^2-6)(2)$

$=32x^2+48x+16x^2-12$

$=48x^2+48x-12$

$D^2y=96x+48$

(2)　在 $x=2$ 点，$D^2y=96(2)+48=240$

(d)　$f(x)=(x^4-3)(x^3-2)$

解　☞ (1)　$f'=(x^4-3)(3x^2)+(x^3-2)(4x^3)$

$=3x^6-9x^2+4x^6-8x^3$

$=7x^6-8x^3-9x^2$

$f''=42x^5-24x^2-18x$

(2)　在 $x=2$ 点，$f''=42(2)^5-24(2)^2-18(2)=1212$

(e)　$y=\frac{5x}{1-3x}$

解 ☞ (1) $y' = \dfrac{(1-3x)(5)-5x(-3)}{(1-3x)^2}$

$= \dfrac{5-15x+15x}{(1-3x)^2} = \dfrac{5}{(1-3x)^2}$

$y'' = \dfrac{(1-3x)^2(0)-5[2(1-3x)(-3)]}{(1-3x)^4}$

$= \dfrac{-5(-6+18x)}{(1-3x)^4} = \dfrac{30-90x}{(1-3x)^4} = \dfrac{30}{(1-3x)^3}$

(2) 在 $x=2$ 点，$y'' = \dfrac{30-90(2)}{[1-3(2)]^4} = \dfrac{-150}{(-5)^4} = -\dfrac{6}{25}$

(f) $y = \dfrac{7x^2}{x-1}$

解 ☞ (1) $y' = \dfrac{(x-1)(14x)-7x^2(1)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{14x^2-14x-7x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{7x^2-14x}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{(x-1)^2(14x-14)-(7x^2-14x)[2(x-1)(1)]}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{(x^2-2x+1)(14x-14)-(7x^2-14x)(2x-2)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{14(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{14}{(x-1)^3}$

(2) 在 $x=2$ 点，$y'' = \dfrac{14}{(2-1)^3} = 14$

(g) $f(x) = (8x-4)^3$

解 ☞ (1) $f' = 3(8x-4)^2(8)$

$= 24(8x-4)^2$

$f'' = 2(24)(8x-4)(8)$

$= 384(8x-4)$

(2) 在 $x=2$ 点，$f'' = 384[8(2)-4]$

$= 4608$

(h) $y = (5x^3-7x^2)^2$

解 ☞ 1) $Dy = 2(5x^3-7x^2)(15x^2-14x) = 150x^5-350x^4+196x^3$

$D^2y = 750x^4-1400x^3+588x^2$

2) 在 $x=2$ 点，$D^2y = 750(2)^4-1400(2)^3+588(2)^2 = 3152$

3.21 对下列函数，(1)求逐次导数，(2)求它们在 $x=3$ 时的值.

(a) $y = x^3+3x^2+9x-7$

解 ☞ (1) $y' = 3x^2+6x+9$

$y'' = 6x+6$

$y''' = 6$

$y^{(4)} = 0$

(2) 在 $x=3$ 点，$y' = 3(3)^2+6(3)+9 = 54$

$y'' = 6(3)+6 = 24$

$y''' = 6$

$y^{(4)} = 0$

(b) $y = (4x-7)(9x+12)$

解 ☞ (1) $y' = (4x-7)(9)+(9x+2)(4)$

$= 36x-63+36x+8 = 72x-55$

$y'' = 72$

$y''' = 0$

(2) 在 $x=3$ 点，$y' = 72(3)-55 = 161$

$y'' = 72$

$y''' = 0$

(c) $y = (5-x)^4$

解 ☞ (1) $D_x = 4(5-x)^3(-1) = -4(5-x)^3$

$D_x^2 = -12(5-x)^2(-1) = 12(5-x)^2$

$D_x^3 = 24(5-x)(-1)$

$= -24(5-x) = 24x-120$

$D_x^4 = 24$

$D_x^5 = 0$

(2) 在 $x=3$ 点，$D_x = -4(5-3)^3 = -32$

$D_x^2 = 12(5-3)^2 = 48$

$D_x^3 = 24(3)-120 = -48$

$D_x^4 = 24$

$D_x^5 = 0$

隐函数微分法

3.22 用隐函数微分法求下列方程的导数 dy/dx.

(a)　$4x^2-y^3=97$

解 ☞ 两边同时对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(97) \tag{3.10}$$

这里，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2)=8x$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(97)=0$，因为 y 是 x 的函数，所以用幂函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^3)=3\cdot y^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y)$$

将这些结果代入(3.10)，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$8x-3y^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

$$-3y^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-8x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{8x}{3y^2}$$

(b)　$3y^5-6y^4+5x^6=243$

解 ☞ 两边同时对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3y^5)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(6y^4)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^6)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(243)$$

$$15y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-24y^3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+30x^5=0$$

解出 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$

$$(15y^4-24y^3)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-30x^5$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-30x^5}{15y^4-24y^3}$$

(c)　$2x^4+7x^3+8y^5=136$

解 ☞

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^4)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7x^3)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8y^5)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(136)$$

$$8x^3+21x^2+40y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

$$40y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-(8x^3+21x^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-(8x^3+21x^2)}{40y^4}$$

3.23　在隐函数微分法中，用不同的求导法则求下列隐函数的导数.

(a)　$x^4y^6=89$

解 ☞

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4y^6)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(89)$$

用乘法及幂函数的求导法则得

$$x^4\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^6)+y^6\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(89)$$

$$x^4\cdot 6y^5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^6\cdot 4x^3=0$$

解出 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$

$$6x^4y^5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-4x^3y^6$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-4x^3y^6}{6x^4y^5}=\frac{-2y}{3x}$$

(b)　$2x^3+5xy+6y^2=87$

解 ☞

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^3+5xy+6y^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(87)$$

注意，求 $5xy$ 的导数需要用乘法法则

$$6x^2+\left[5x\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\cdot(5)\right]+12y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

解出 dy/dx

$$(5x+12y)\left(\frac{dy}{dx}\right)=-6x^2-5y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(6x^2+5y)}{5x+12y}$$

(c)　$7x^4+3x^3y+9xy^2=496$

解 ☞

$$28x^3+\left[3x^3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\cdot 9x^2\right]+\left[9x\cdot 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)+y^2\cdot 9\right]=0$$

$$28x^3+3x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)+9x^2y+18xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+9y^2=0$$

$$(3x^3+18xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)=-28x^3-9x^2y-9y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(28x^3+9x^2y+9y^2)}{3x^3+18xy}$$

(d)　$(5y-21)^3=6x^5$

解 ☞

$$\frac{d}{dx}[(5y-21)^3]=\frac{d}{dx}(6x^5)$$

用幂函数求导法则得

$$3(5y-21)^2\cdot 5\left(\frac{dy}{dx}\right)=30x^4$$

$$15(5y-21)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)=30x^4$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{30x^4}{15(5y-21)^2}$$

(e)　$(2x^3+7y)^2=x^5$

解 ☞

$$\frac{d}{dx}(2x^3+7y)^2=\frac{d}{dx}(x^5)$$

$$2(2x^3+7y)\cdot\frac{d}{dx}(2x^3+7y)=5x^4$$

$$(4x^3+14y)\left[6x^2+7\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=5x^4$$

$$24x^5+28x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)+84x^2y+98y\left(\frac{dy}{dx}\right)=5x^4$$

$$(28x^3+98y)\frac{dy}{dx}=5x^4-24x^5-84x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x^4-24x^5-84x^2y}{28x^3+98y}$$

也见问题 4.24, 4.25, 5.20, 5.21, 6.51 和 6.52.

微分法则的推导

3.24　给定 $f(x)=g(x)+h(x)$，这里 $g(x)$和 $h(x)$是可导函数，证明加法法则 $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

证 ☞ 由(3.2)，$f(x)$的导数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

代入 $f(x)=g(x)+h(x)$,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x)+h(x+\Delta x)]-[g(x)+h(x)]}{\Delta x}$$

调整各项得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)+h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

分成两项，并求极限得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$=g'(x)+h'(x)$$

3.25　给定 $f(x)=g(x)h(x)$，这里 $g'(x)$和 $h'(x)$都存在，证明乘法法则为 $f'(x)=g(x)h'(x)+h(x)g'(x)$.

证 ☞

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

代入 $f(x)=g(x)h(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)-g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

加减 $g(x+\Delta x)h(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)h(x+\Delta x)-g(x+\Delta x)h(x)+g(x+\Delta x)h(x)-g(x)h(x)}{\Delta x}$$

分别提出 $g(x+\Delta x)$和 $h(x)$得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x)-h(x)]+h(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}h(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$$

3.26　给定 $f(x)=g(x)/h(x)$，这里 $g'(x)$和 $h'(x)$都存在、且 $h(x)\neq 0$，证明商的法则为

$$f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

证 ☞ 先从 $f(x)=g(x)/h(x)$中解出 $g(x)=f(x)h(x)$

$$g(x)=f(x)\cdot h(x)$$

然后用乘法法则求 $g(x)$的导数

$$g'(x)=f(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot f'(x)$$

解出 $f'(x)$

$$h(x)\cdot f'(x)=g'(x)-f(x)\cdot h'(x)$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)-f(x)\cdot h'(x)}{h(x)}$$

用 $g(x)/h(x)$代替 $f(x)$得

$$f'(x)=\frac{g'(x)-\dfrac{g(x)\cdot h'(x)}{h(x)}}{h(x)}$$

分子和分母同乘以 $h(x)$得.

$$f'(x)=\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

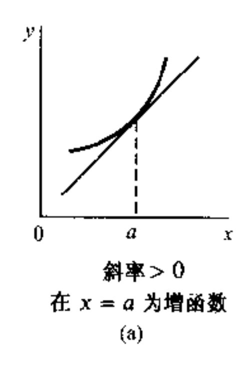
第四章　导数在数学和经济学中的应用

4.1　增函数和减函数

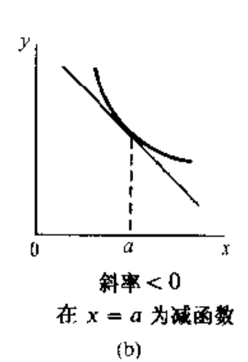
如果函数 $f(x)$ 在 $[a, f(a)]$ 的邻域内的图形随着 x 从左向右移动时上升(下降)，则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 增加(减少)．由于一阶导数度量函数的变化率和斜率，所以，在 $x=a$ 处的一阶导数为正，这意味着函数在 a 点增加；导数为负，意味着函数在 a 点减少．即

$$f'(a)>0:\quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 增加}$$
$$f'(a)<0:\quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 减少}$$

见图 4-1.



斜率 > 0
在 $x=a$ 为增函数
(a)



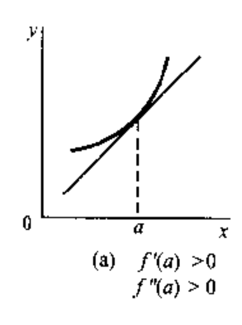
斜率 < 0
在 $x=a$ 为减函数
(b)

图 4-1

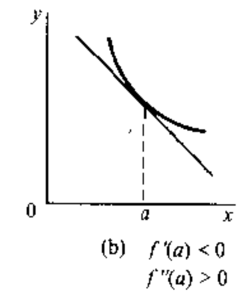
在整个定义域内增加(减少)的函数称为单调函数，也称它单调地增加(减少)．见问题 4.1～4.3.

4.2　凹凸性

对于函数 $f(x)$ 及 $x=a$，如果其位于 $[a, f(a)]$ 的某一个邻域内的图形全部位于切线之

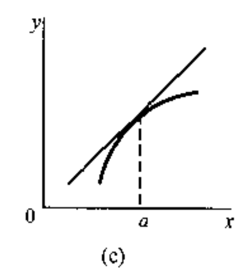


(a)　$f'(a)>0$
$f''(a)>0$

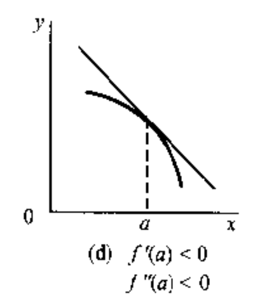


(b)　$f'(a)<0$
$f''(a)>0$

在 $x=a$ 点凸



(c)



(d)　$f'(a)<0$
$f''(a)<0$

在 $x=a$ 点凹

图 4-2

下,则 $f(x)$在 $x=a$ 是凹的. 如果在$[a,f(a)]$的一个邻域内函数的图形全部位于切线之上,则 $f(x)$在 $x=a$ 为凸的. 在 $x=a$ 的二阶导数为正,意味着函数在 $x=a$ 是凸的;在 $x=a$ 的二阶导数为负,则意味着函数在 a 点是凹的. 一阶导数的符号与凸凹性无关.即

$$f''(a)>0: \quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 凸的}$$
$$f''(a)<0: \quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 凹的}$$

简单地,见图 4-2 及问题 4.1~4.4.

如果对定义域内的所有 x,都有 $f''(x)>0$,则 $f(x)$是严格凸的. 如果对定义域内的所有 x,有 $f''(x)<0$,则 $f(x)$是严格凹的.

4.3 极值

当函数在某点达到极大值或极小值时,该点称为极值点. 此时,函数处于严格相对"平台"上,即,既不增加,也不减少. 如果一个函数在 a 处既不增加,也不减少,则函数在 a 处的一阶导数为零或不存在. 称定义域中这样的点为驻点.

为了从数学上区分极大值与极小值,采用二阶导数进行检测. 设 $f'(a)=0$,

1. 如果 $f''(a)>0$,意味着函数为凸的,并且函数的图形完全位于 $x=a$ 处切线之上,则函数在 $x=a$ 达到极小值.

2. 如果 $f''(a)<0$,意味着函数为凹函数,函数的图形全部位于 $x=a$ 处切线之下,则函数在 $x=a$ 处达到极大值.

3. 如果 $f''(a)=0$,则结果不确定.

对于处处可微或光滑函数来说,求其驻点,只需考察 $f'(x)=0$ 的情况即可. 即有

$$f'(a)=0 \quad f''(a)>0: \quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 取极小值}$$
$$f'(a)=0 \quad f''(a)<0: \quad f(x)\text{在 } x=a \text{ 取极大值}$$

见图 4-3 及问题 4.5 和 4.6.

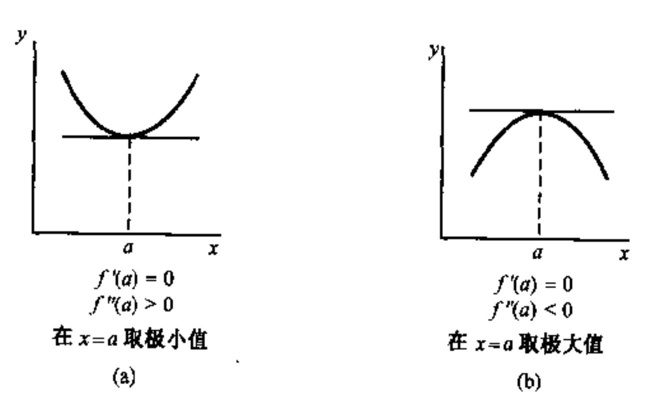


图 4-3

4.4 拐点

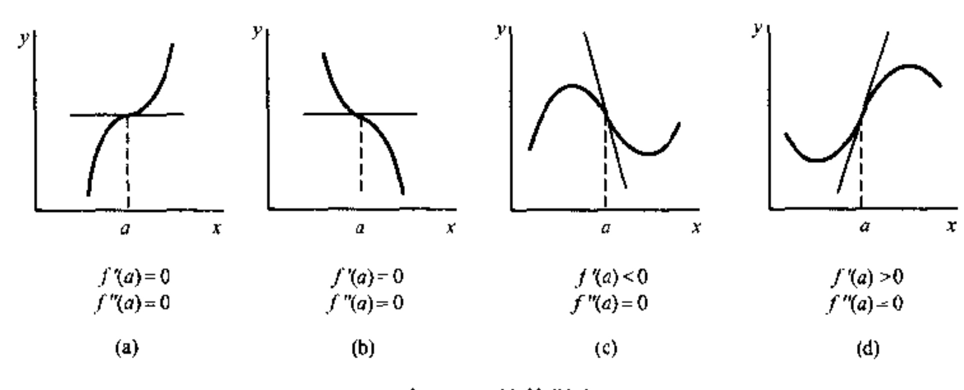
拐点是图形上的一点,在此点,函数穿过其切线并由凹变为凸,或恰好相反. 只有当二阶导数等于零或不存在,拐点才会发生. 一阶导数的符号与拐点无关. 总之,对于在 a 处的拐点,满足:

1. $f''(a)=0$,或不存在.

2. 在 $x=a$ 处,凸凹性发生改变.

3. 图形与在 $x=a$ 处的切线相交.

见图 4-4,及问题 4.6 和 4.7(c).



在 $x=a$ 处的拐点

图 4-4

4.5　函数的最优化

最优化是指求解函数的极大值或极小值的过程．仅用在 4.3 至 4.4 节中的过程，我们完全可以完成上述过程，而不必借用图形．步骤如下：对一个给定的可微函数，

1．求一阶导数，并令其为零，解出驻点．这便是所谓的一阶条件，即必要条件．该步求出了所有的使函数既不增，也不减的点．它们是极值嫌疑点．

2．求二阶导数，计算其在驻点的值，并判定符号．如果在驻点 a 处，

$f''(a)<0$，　函数在 a 处为凹的，从而取极大值

$f''(a)>0$，　函数在 a 处为凸的，从而取极小值

$f''(a)=0$，　结果不确定，见 4.6 节

假设一阶条件已满足，这一步称为二阶导数检测，或简称为二阶条件．它是充分条件，即有

极大值	极小值
$f'(a)=0$	$f'(a)=0$
$f''(a)<0$	$f''(a)>0$

注意到，如果函数为严格凹（凸）的，则极大值（极小值）惟一，称其为全局最大值（最小值）．见例 1 及问题 4.7～4.9．

例 1　求 $f(x)=2x^3-30x^2+126x+59$．

解　☞(a)　求驻点：求一阶导数，令其等于零，求解 x．

$$f'(x)=6x^2-60x+126=0$$
$$6(x-3)(x-7)=0$$
$$x=3\quad x=7\quad 驻点$$

(b)　检验凸凹性：求二阶导数，并计算其在驻点处的值，然后判断其值的符号，以此区分极大值与极小值．

$$f''(x)=12x-60$$
$$f''(3)=12(3)-60=-24<0\qquad 凹的，极大值$$
$$f''(7)=12(7)-60=24>0\qquad 凸的，极小值$$

函数在 $x=3$ 处达到极大值，在 $x=7$ 处达到极小值．

4.6　最优化的高阶导数检验

如果 $f''(a)=0$（如图 4-4(a)～(d)），二阶导数检验无法得到确切的结论．在这种情况下，通过对高阶导数的检验，不用图形，同样可以得到结论．

1. 如果在驻点处首次出现高阶导数值不为零，且导数的阶数是奇数(3阶，5阶等等)，则函数达到拐点. 见问题 4.6(b)、4.6(d)和 4.7(c).

2. 如果在一驻点 a 处首次出现高阶导数值不为零，且导数的阶数是偶数，则函数在 a 点取极值. 如果导数值为负，意味着函数是凹的，取相对极大值；如果导数值为正，则函数为凸的，取相对极小值. 见问题 4.6(a)，4.6(c)，4.7(d)及 4.9(c)，4.9(d).

4.7 边际的概念

经济学中，边际成本定义为：一单位额外产出所引起的总成本的改变量. 边际收益定义为：一单位的额外销售量所引起的总收益的改变量. 由于总成本(TC)和总收益(TR)都是产出量水平(Q)的函数，边际成本(MC)和边际收益(MR)都可从数学角度，由它们各自总函数的导数来表示，即

如果 $TC = TC(Q)$，则 $MC = \mathrm{d}TC/\mathrm{d}Q$

如果 $TR = TR(Q)$，则 $MR = \mathrm{d}MR/\mathrm{d}Q$

总之，任何经济函数的边际概念都可以用总函数的导数来表示. 见例 2，例 3 和问题 4.10～4.16.

例 2 1. 如果 $TR = 75Q - Q^2$，则 $MR = \mathrm{d}TR/\mathrm{d}Q = 75 - 8Q$

2. 如果 $TC = Q^2 + 7Q + 23$，则 $MC = \mathrm{d}TC/\mathrm{d}Q = 2Q + 7$

例 3 已知需求函数 $P = 30 - 2Q$，先求出总收益函数，然后求其关于 Q 的导数，便得到了边际收益函数. 即

$$TR = PQ = (30 - 2Q)Q = 30Q - 2Q^2$$

则

$$MR = \frac{\mathrm{d}TR}{\mathrm{d}Q} = 30 - 4Q$$

如果 $Q = 4$，$MR = 30 - 4(4) = 14$；如果 $Q = 5$，$MR = 30 - 4(5) = 10$.

4.8 经济函数的最优

经济学家经常被要求帮助一个企业，使其利润、产出水平和生产率尽可能地大；而使其成本、污染程度、稀缺自然资源的利用近可能地小. 有前面技术的帮助，这些是完全可以做的到的. 见例 4，问题 4.17 和 4.13 的说明.

例 4 已知一个企业的总收益水平是 $R = 4000Q - 33Q^2$，总成本函数是 $C = 2Q^3 - 3Q^2 + 400Q + 500$，设 $Q > 0$，求其最大的利润 π.

解 ☞ (a) 建立利润函数：$\pi = R - C$.

$$\pi = 4000Q - 33Q^2 - (2Q^2 - 3Q^2 + 400Q + 500)$$
$$= -2Q^3 - 3Q^2 + 3600Q - 500$$

(b) 求一阶导数，并令其为零，求解 Q，以确定驻点.

$$\pi' = -6Q^2 - 60Q + 3600$$
$$= -6(Q^2 + 10Q - 600)$$
$$= -6(Q + 30)(Q - 20) = 0$$
$$Q = -30 \quad Q = 20 \quad \text{驻点}$$

(c) 求二阶导数，求其在驻点处的值. 舍去负的驻点，因为产量为负，没有经济意义. 然后，检验凸凹性，以进一步确定此函数取得极大值.

$$\pi'' = -12Q - 60$$
$$\pi''(20) = -12(20) - 60 = -300 < 0 \qquad \text{凸的，极大值}$$

当 $Q = 20$ 时，利润达到最大

$$\pi(20) = -10(20)^3 - 30(20)^2 + 3600(20) - 500 = 39000$$

4.9　总的、边际的、平均的概念之间的关系

一种投入要素(不妨设资本)的总产品(TP)曲线是由生产函数导出的，令其他的投入要素(劳动和土地)保持不变，而产出随着该种投入(资本)的变化而变化．在例 5 中，我们用熟悉的方法很容易画出表明总产品、边际产品和平均产品之间的图形曲线．

例 5　已知 $\mathrm{TP}=90K^2-K^3$，用图示说明总产品、平均产品和边际产品之间的关系．

解　☞ 1．检验一阶条件，以求驻点．

$$\mathrm{TP}' = 180K - 3K^2 = 0$$
$$3K(60-K) = 0$$
$$K - 0 \quad K = 60 \quad 驻点$$

验证二阶条件

$$\mathrm{TP}'' = 180 - K$$
$$\mathrm{TP}''(0) = 180 > 0 \qquad 凸，极小值$$
$$\mathrm{TP}''(60) = -180 < 0 \quad 凹，极大值$$

求拐点

$$\mathrm{TP}'' = 180 - 6K = 0$$
$$K = 30$$
$$K < 30 \quad \mathrm{TP}'' > 0 \quad 凸$$
$$K > 30 \quad \mathrm{TP}'' < 0 \quad 凹$$

由于在 $K=30$ 处、$\mathrm{TP}''=0$ 及凸凹性的变化，则在 $K=30$ 处有拐点．

2．求资本的平均产品 AP_K，并使其极大化．

$$\mathrm{AP}_K = \frac{\mathrm{TP}}{K} = 90K - K^2$$
$$\mathrm{AP}_K' = 90 - 2K = 0$$
$$K = 45 \qquad 驻点$$
$$\mathrm{AP}_K'' = -2 \qquad 凹的，极大值$$

3．求资本的边际产品 MP_K，并使其极大化．$\mathrm{MP}_K=\mathrm{TP}'=189K-3K^2$．

$$\mathrm{MP}_K = 180 - 6K = 0$$

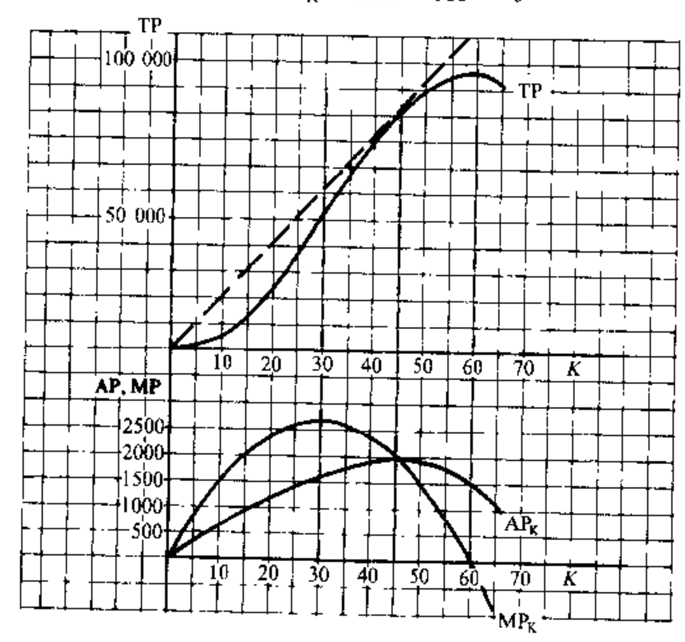


图 4-5

$$K = 30 \quad 驻点$$

$$MP''_K = -6 < 0 \quad 凹的，极大值$$

4. 描绘图形，见图 4-5.

注意到，(a) 当 TP 为凸，并以递增的速度增加时，MP_K 上升，当 TP 达到拐点时，MP_K 取得极大值；当 TP 为凹，并以递减的速度上升时，MP_K 为下降的；(b) 当 MP_K 为正的时，TP 上升，当 $MP_K=0$ 时，TP 达到极大值. 当 MP_K 为负时，TP 下降；(c) 当过原点的直线与 TP 曲线相切，即 $MP_K=AP_K$ 时，AP_K 取得极大值；(d) 当 AP_K 上升时，$MP_K > AP_K$，当 $MP_K=AP_K$ 时，AP_K 取得极大值. 当 $MP_K < AP_K$ 时，AP_K 下降；(e) 当 TP 下降时，MP_K 为负值. 见问题 4.26.

习题解答

增函数和减函数，凹性和凸性

4.1 见图 4-6 中的曲线，指出哪些图形满足：(1) 对所有的 x 是上升的；(2)对所有 x 是下降的；(3)对所有 x 是凸的；(4)对所有 x 是凹的；(5)有极值点；(6)有拐点.

解 (1) (a),(d)：对所有 x 增加；

(2) (b),(f)：对所有 x 减少；

(3) (b),(c)：对所有 x 是凸的；

(4) (d),(e)：对所有 x 是凹的；

(5) (c),(e)：有极值点；

(6) (a),(f)：有拐点.

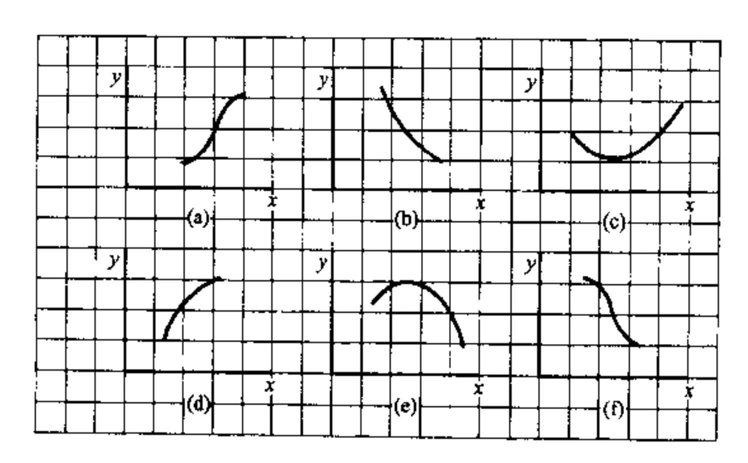


图 4-6

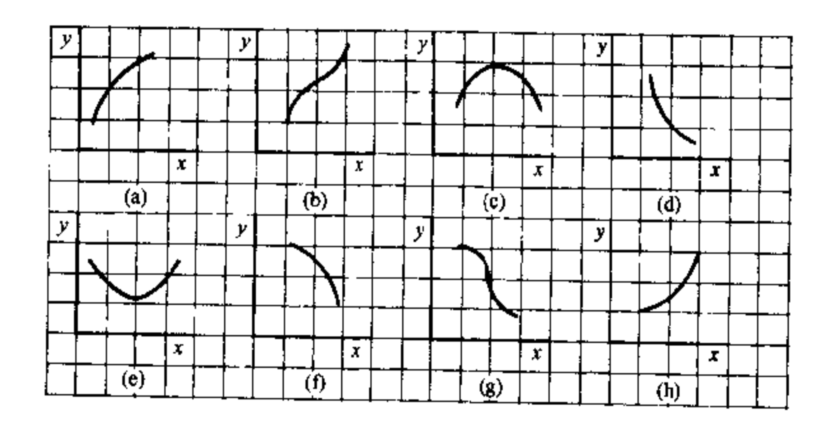


图 4-7

4.2　见图 4-7 中的曲线，指出哪些图形满足：(1) 对所有 x，一阶导数为正；(2) 对所有 x，一阶导数为负；(3) 对所有 x，二阶导数为正；(4) 对所有 x，二阶导数为负；(5) 一阶导数等于零或在某点无定义；(6)二阶导数等于零或在某点无定义.

解 ☞ (1)　(a)，(b)，(h)：图形从左至右是上升的；

(2)　(d)，(f)，(g)：图形从左至右是下降的；

(3)　(d)，(e)，(f)：图形是凸的；

(4)　(a)，(c)，(f)：图形是凹的；

(5)　(c)，(e)：图形达到一个稳定状态(在极值点)；

(6)　(b)，(g)：图形有拐点.

4.3　检验下列函数在 $x=4$ 处是上升的，下降的，平稳的.

(a)　$y=3x^3-14x+5$

解 ☞

$$y'=6x-4$$

$$y'(4)=6(4)-14=10>0 \qquad \text{函数是上升的}$$

(b)　$y=x^3-7x^2+6x-2$

解 ☞

$$y'=3x^2-14x+6$$

$$y'(4)=3(4)^2-14(4)+6=-2<0 \qquad \text{函数是上升的}$$

(c)　$y=x^4-6x^3+4x^2-13$

解 ☞

$$y'=4x^3-18x^2+8x$$

$$y'(4)=4(4)^3-18(4)^2+8(4)=0 \qquad \text{函数是稳定的}$$

4.4　检验下列函数在 $x=3$ 点处是凸的或凹的.

(a)　$y=-2x^3+4x^2+9x-15$

解 ☞

$$y'=-6x^2+8x+9$$

$$y''=-12x+8$$

$$y''(3)=-12(3)+8=-28<0 \qquad \text{凹的}$$

(b)　$y=(5x^2-8)^2$

解 ☞

$$y'=2(5x^2-8)(10x)=20x(5x^2-8)=100x^3-160x$$

$$y''=300x^2-160$$

$$y''(3)=300(3)^2-160=2540>0 \qquad \text{凸的}$$

极值

4.5　用(1) 求驻点，(2)决定在驻点处函数是否是相对极大或极小的步骤，求下列函数的极值.

(a)　$f(x)=-7x^2+126x-23$

解 ☞ (1)　求一阶导数，令其等于零，求解 x，以确定驻点.

$$f'(x)=-14x+126=0$$

$$x=9 \quad \text{驻点}$$

(2)　求二阶导数，计算其在驻点处的值，检验凸凹性去区分相对极大和极小.

$$f''(x)=-14$$

$$f''(9)=-14 \qquad \text{凹的，相对极大}$$

(b)　$f(x)=3x^3-36x^2+135x-13$

解 ☞ (1)

$$f'(x)=9x^2-72x+135=0$$

$$=9(x^2-8x+15)=0$$

$$=9(x-3)(x-5)=0$$

$$x=3 \quad x=5 \quad \text{驻点}$$

(2) $$f''(x)=18x-72$$

$$f''(3)=18(3)-72=-18<0 \quad 凹的，相对极大$$

$$f''(5)=18(5)-72=18>0 \quad 凸的，相对极小$$

(c) $f(x)=2x^4-16x^3+32x^2+5$

解 ☞ (1) $$f'(x)=8x^3-48x^2+64x=0$$

$$=8x(x^2-6x+8)=0$$

$$=8x(x-2)(x-4)=0$$

$$x=0 \quad x=2 \quad x=4 \quad 驻点$$

(2) $$f''(x)=24x^2-96x+64$$

$$f''(0)=24(0)^2-96(0)+64=64>0 \quad 凸的，相对极小$$

$$f''(2)=24(2)^2-96(2)+64=-32<0 \quad 凹的，相对极大$$

$$f''(4)=24(4)^2-96(4)+64=64>0 \quad 凸的，相对极小$$

4.6 对下列函数，(1)求驻点，(2)判断函数在驻点处，函数取相对极大，极小或拐点.

(a) $y=-(x-8)^4$

解 ☞ (1) 求一阶导数，令其等于零，求解 x，以确定驻点.

$$y'=-4(x-8)^3=0$$

$$x-8=0$$

$$x=8 \quad 驻点$$

(2) 求二阶导数，计算其在驻点处的值，检验凸凹性符号，去区分相对极大，极小和拐点.

$$y''=-12(x-8)^2$$

$$y''(8)=-12(8-8)^2=0 \quad 无法判别$$

如果二阶导数无法判别，继续求更高阶的导数，并求其在驻点的值，直到某个高阶导数的值不为零为止.

$$y'''=-24(x-8)$$

$$y'''(8)=-24(8-8)=0 \quad 无法判别$$

$$y^{(4)}=-24$$

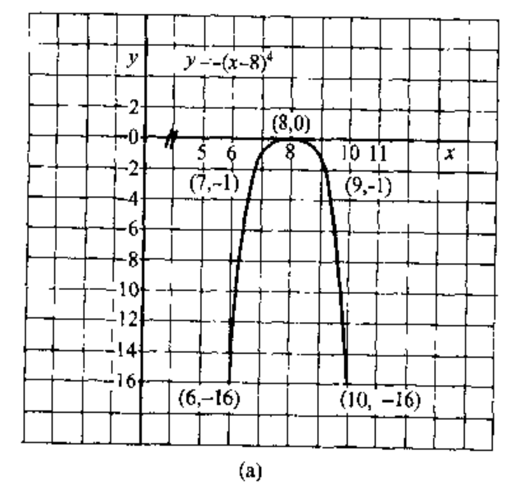
$$y^{(4)}(8)=-24<0$$

正如 4.6 节的解释，首次不为零的高阶导数的阶数为偶数，则 y 有极值. 由于导数值为负，则 y 为凹的，y 取极大值. 见图 4-8(a).

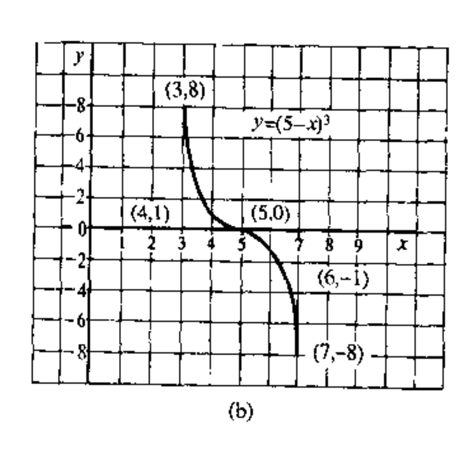
(b) $y=(5-x)^3$

解 ☞ (1) $$y'=3(5-x)^2(-1)=-3(5-x)^2=0$$

$$x=5 \quad 驻点$$



(a)



(b)

图 4-8

(2)
$$y''=6(5-x)$$
$$f''(5)=6(5-5)=0 \qquad \text{无法判别}$$
继续求更高阶导数及其在驻点处的值，寻找首次不为零的高阶导数.
$$y'''=-6$$
$$y'''(5)=-6$$
正如 4.6 节所讲，由于首次不为零的高阶导数的阶数为奇数，则 y 在拐点处，而非极值点. 见图 4-8.

(c)　$y=-2(x-6)^6$

解 ☞ (1)
$$y'=-12(x-6)^5=0$$
$$x=6 \quad \text{驻点}$$
(2)
$$y''=-60(x-6)^4$$
$$y''(6)=-60(0)^4=0 \qquad \text{无法判别}$$
继续，有
$$y'''=-240(x-6)^3 \qquad y'''(6)=0 \qquad \text{无法判别}$$
$$y^{(4)}=-720(x-6)^2 \qquad y^{(4)}(6)=0 \qquad \text{无法判别}$$
$$y^{(5)}=-1440(x-6) \qquad y^{(5)}(6)=0 \qquad \text{无法判别}$$
$$y^{(6)}=-1440 \qquad y^{(4)}(6)=-1440<0$$
由于首次非零高阶导数的阶数为偶数，所以 y 取到极值. 由于 $y^{(6)}(6)<0$，y 为凹的，则取得相对极大值.

(d)　$y=(4-x)^5$

解 ☞ (1)
$$y'=5(4-x)^4(-1)=-5(4-x)^4=0$$
$$x=4 \quad \text{驻点}$$
(2)
$$y''=20(4-x)^3$$
$$y''(4)=20(0)^3=0 \qquad \text{无法判别}$$
继续求三阶及更高阶导数，有
$$y'''=-60(4-x)^2 \qquad y'''(4)=0 \qquad \text{无法判别}$$
$$y^{(4)}=120(x-6) \qquad y^{(4)}(4)=0 \qquad \text{无法判别}$$
$$y^{(5)}=-1440 \qquad y^{(5)}(4)=-120<0$$
由于首次非零的高阶导数的阶数为奇数，则 $x=4$ 为 y 拐点.

优化

4.7　对下列函数，(1) 求驻点，(2)判断凸凹性，确定极值，(3)检验拐点，(4)求函数在驻点及拐点处的值.

(a)　$f(x)=x^3-18x^2+96x-80$

解 ☞ (1)
$$f'(x)=3x^2-36x+96=0$$
$$3(x-4)(x-8)=0$$
$$x=4 \qquad x=6 \qquad \text{驻点}$$
(2)
$$f''(x)=60x-36$$
$$f''(4)=6(4)-36=-12<0 \qquad \text{凹的，极大值}$$
$$f''(8)=6(8)-36=12>0 \qquad \text{凸的，极小值}$$
(3)
$$f''(x)=60x-36=0$$
$$x=6$$
由于 $f''(6)=0$，且凸凹性在 $x=4$ 和 $x=8$ 之间发生变化，见步骤 2)，所以，$x=6$ 为拐点.

(4)
$$f(4)=(4)^3-18(4)^2+96(4)-80=80 \quad (4,80) \quad \text{极大值点}$$
$$f(6)=(6)^3-18(6)^2+96(6)-80=64 \quad (6,64) \quad \text{拐点}$$
$$f(8)=(8)^3-18(8)^2+96(8)-80=48 \quad (8,48) \quad \text{极小值点}$$

(b)　$f(x)=-x^3+6x^2+15x-32$

解 ☞ (1) $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15 = 0$

$$-3(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 5 \quad \text{驻点}$$

(2) $f''(x) = -6x + 12$

$$f''(-1) = -6(-1) + 12 = 18 > 0 \quad \text{凸的，极小值}$$

$$f''(5) = -6(5) + 12 = 18 < 0 \quad \text{凹的，极大值}$$

(3) $f''(x) = -6x + 12 = 0$

$$x = 2 \quad x = 2 \text{ 为拐点}$$

(4) $f(-1) = -40 \quad (-1, 40) \quad$ 极小值点

$f(2) = 14 \quad (2, 14) \quad$ 拐点

$f(5) = 68 \quad (5, 68) \quad$ 极大值点

(c) $f(x) = (2x-7)^3$

解 ☞ (1) $f'(x) = 3(2x-7)^2(2) = 6(2x-7)^2 = 0$

$$x = 3.5 \quad \text{驻点}$$

(2) $f''(x) = 12(2x-7)(2) = 24(2x-7)$

$$f''(3.5) = 24[2(3.5) - 7] = 0 \quad \text{无法判别}$$

继续求更高阶的导数

$$f''' = 48$$

$$f'''(3.5) = 48 > 0$$

(3) 正如 4.6 节所讲，由于首次不为零的高阶导数的阶数为奇数，$x = 3.5$ 为函数的拐点．由于拐点在惟一的驻点处，所以此函数没有极值点．

(4) $f(3.5) = 0 \quad (3.5, 0) \quad$ 拐点

检验 $x = 3.5$ 左侧（$x = 3$）和右侧（$x = 4$）的凸凹性，有

$$f''(3) = 24[2(3) - 7] = -24 < 0 \quad \text{凹}$$

$$f''(4) = 24[2(3) - 7] = 24 > 0 \quad \text{凸}$$

(d) $f(x) = (x+2)^4$

解 ☞ (1) $f'(x) = 4(x+2)^3 = 0$

$$x = -2 \quad \text{驻点}$$

(2) $f''(x) = 12(x+2)^2$

$$f''(-2) = 12(-2+2) = 0 \quad \text{无法判别}$$

继续，正如 4.6 节所讲，有

$$f'''(x) = 24(x+2)$$

$$f'''(-2) = 24(-2+2) = 0 \quad \text{无法判别}$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$f^{(4)}(-2) = 24 > 0$ 极小值

由于首次不为零的高阶导数的阶数为偶数，且导数值大于 0，所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 取极小值．

(3) 没有拐点．

(4) $f(-2) = 0 \quad (-2, 0) \quad$ 极小值点

4.8 通过以下两个步骤，求下列二次或三次函数的最优值．(1) 求函数最优值的驻点，(2) 判断二阶条件，并区分极大值和极小值．

(a) $y = 7x^2 + 112x - 54$

解 ☞ (1) 求一阶导数，令其为零，并求解 x 以确定驻点．

$$y' = 14x + 112 = 0$$

$$x = -8 \quad \text{驻点}$$

(2) 求二阶导数，并求其在驻点处的值，检验符号以判断极值．

$$y'' = 14$$

$$y''(-8) = 14 > 0 \quad \text{凸的，极小值}$$

这样，由于 y'' 为恒大于 0 的常数，y 是严格凸的，所以可以得到结论，y 在 $x=-8$ 处取全局最小值.

(b)　$y=-9x^2+72x-13$

解 ☞ (1)
$$y'=-18x+72=0$$
$$x=4 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=-18$$
$$f''(4)=-18<0 \quad \text{凹的，极大值}$$

这样，由于 y'' 为恒小于 0 的常数，y 是严格凹的，所以可以得到结论，y 在 $x=4$ 处取全局最大值.

(c)　$y=x^3-6x^2-135x+4$

解 ☞ (1)
$$y'=3x^2-12x-135=0$$
$$=3(x^2-4x-45)$$
$$=3(x+5)(x-9)$$
$$x=-5 \quad x=9 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=6x-12$$
$$y''(-5)=6(-5)-12=-42<0 \quad \text{凹的，极大值}$$
$$y''(9)=6(9)-12=42>0 \quad \text{凸的，极小值}$$

(d)　$y=-2x^3+15x^2+84x-25$

解 ☞ (1)
$$y'=-6x^2+39x+84=0$$
$$=-6(x+2)(x-7)=0$$
$$x=-2 \quad x=7 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=-12x+30$$
$$f''(-2)=-12(-2)+30=54>0 \quad \text{凸的，极小值}$$
$$f''(7)=-12(7)+30=-54<0 \quad \text{凹的，极大值}$$

4.9　用问题 4.8 中相同的步骤，求下列高阶多项式函数的最优值.

(a)　$y=x^4-8x^3-80x^2+15$

解 ☞ (1)
$$y'=4x^3-24x^2-160x=0$$
$$=4x(x+4)(x-10)=0$$
$$x=0 \quad x=-4 \quad x=10 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=12x^2-48x-160$$
$$y''(-4)=12(-4)^2-48(-4)-160=224>0 \quad \text{凸的，极小值}$$
$$y''(0)=12(0)^2-48(0)-160=-160<0 \quad \text{凹的，极大值}$$
$$y''(10)=12(10)^2-48(10)-160=560>0 \quad \text{凸的，极小值}$$

(b)　$y=-3x^4-20x^3+144x^2+17$

解 ☞ (1)
$$y'=-12x^3-60x^2+288x=0$$
$$=-12x(x-3)(x+8)$$
$$x=0 \quad x=3 \quad x=-8 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=-36x^2-120x+288$$
$$y''(-8)=-36(-8)^2-120(-8)+288=-1056<0 \quad \text{凹的，极大值}$$
$$y''(0)=-36(0)^2-120(0)+288=288>0 \quad \text{凸的，极小值}$$
$$y''(3)=-36(3)^2-120(3)+288=-396<0 \quad \text{凹的，极大值}$$

(c)　$y=-(x+13)^4$

解 ☞ (1)
$$y'=-4(x+13)^3=0$$
$$x+13=0 \quad x=-13 \quad \text{驻点}$$

(2)
$$y''=-12(x+13)^2$$
$$y''(-13)=-12(-13+13)^2=0 \quad \text{无法判别}$$

用 4.6 节及问题 4.6 所述，有

$$y''' = -24(x+13)$$

$$y'''(-13) = -24(0) = 0 \quad \text{无法判别}$$

$$y^{(4)} = -24$$

$$y^{(4)}(-13) = -24 < 0 \quad \text{凹的，极大值}$$

(d) $y=(9-4x)^4$

解 ☞ (1)

$$y' = 4(9-4x)^3(-4) = -16(9-4x)^3 = 0$$

$$9-4x=0 \quad x = 2\frac{1}{2} \quad \text{驻点}$$

(2)

$$y'' = -48(9-4x)^2(-4)$$

$$y''\left(2\frac{1}{2}\right) = 192(0)^2 = 0 \quad \text{无法判别}$$

$$y''' = 384(9-4x)(-4) = -1536(9-4x)$$

$$y'''\left(2\frac{1}{2}\right) = -1536(0) = 0 \quad \text{无法判别}$$

$$y^{(4)} = 6144$$

$$y^{(4)}\left(2\frac{1}{2}\right) = 6144 > 0 \quad \text{凸的、极小值}$$

边际，平均和总的概念

4.10 求下列总函数的(1)边际函数，(2)平均函数，并分别求出在 $Q=3$ 和 $Q+5$ 处的值.

(a) $TC=3Q^2+7Q+12$

解 ☞ 1) $MC=\frac{dTC}{dQ}=6Q+7$

在 $Q=3$，$MC=6(3)+7=25$

在 $Q=5$，$MC=6(5)+7=37$

2) $AC=\frac{TC}{Q}=3Q+7+\frac{12}{Q}$

在 $Q=3$，$AC=3(3)+7+\frac{12}{3}=20$

在 $Q-5$，$AC=3(5)+7+\frac{12}{3}=24.4$

注：当求平均函数时，务必将常数项除以 Q.

(b) $\pi=Q^2-13Q+78$

解 ☞ 1) $\frac{d\pi}{dQ}=2Q-13$

在 $Q=3$，$\frac{d\pi}{dQ}=2(3)137=-7$

在 $Q=5$，$\frac{d\pi}{dQ}=2(5)13=-3$

2) $AC=\frac{\pi}{Q}=Q-13+\frac{78}{Q}$

在 $Q=3$，$A\pi=3-13+\frac{78}{3}=16$

在 $Q=5$，$A\pi=5-15+\frac{78}{3}=7.6$

(c) $TR=12Q-Q^2$

解 ☞ 1) $MR=\frac{dTR}{dQ}=12-2Q$

在 $Q=3$，$MR=12-2(3)=6$

在 $Q=5$，$MR=12-2(5)=2$

2) $AR=\frac{TR}{Q}=12-Q$

在 $Q=3$，$AR=12-3=9$

在 $Q=5$，$AR=12-5=7$

(d) $TC=35+5Q-2Q^2+2Q^3$

解 ☞ 1) $MC=\frac{dTC}{dQ}=5-4Q+6Q^2$

在 $Q=3$，$MC=5-4(3)+6(3)^2=47$

在 $Q=5$，$MC=5-4(5)+6(5)^2=135$

2) $AC=\frac{TC}{Q}=\frac{35}{Q}-2Q+Q^2$

在 $Q=3$，$AC=\frac{35}{3}+5-2(3)+2(3)^2 28.67$

在 $Q=5$，$AC=\frac{35}{3}+5-2(5)+2(5)^2=52$

4.11 求与下列供给函数相关联的边际支出(ME)函数，并求在 $Q=4$ 与 $Q=10$ 处的值.

(a) $P=Q^2+2Q+1$

解 ☞ 对已知的供给函数，先求出总支出(TE)函数，再求 TE 关于 Q 的导数，得到 ME.

$$TE = PQ = (Q^2+2Q+1)Q = Q^3+2Q^2+Q$$

$$ME = \frac{dTE}{dQ} = 3Q^2+4Q+1$$

在 $Q=3$，$\text{ME}=3(4)^2+4(3)+1=65$. 在 $Q=10$，$\text{ME}=3(10)^2+4(10)+1=341$

(b)　$P=Q^2+0.5Q+3$

解 ☞
$$\text{TE}=PQ=(Q^2+0.5Q+3)Q=Q^3+0.5Q^2+3Q$$
$$\text{ME}=3Q^2+Q+3$$

在 $Q=4$，$\text{ME}=3(4)^2+4+3=55$. 在 $Q=10$，$\text{ME}=3(10)^2+10+3=313$

4.12　求与下列需求函数相关联的边际收益(MR)函数，并求在 $Q=4$ 和 $Q=10$ 处的值.

(a)　$Q=36-2P$

解 ☞ $P=18-0.5Q$

$\text{TR}=(18-0.5Q)Q=18Q-0.5Q^2$

$\text{MR}=\dfrac{\text{dTR}}{\text{d}Q}=18-Q$

在 $Q=4$，$\text{MR}=18-4=14$

在 $Q=10$，$\text{MR}=18-10=8$

(b)　$44-4P-Q=0$

$P=11-0.25Q$

$\text{TR}=(11-0.25Q)Q=11Q-0.25Q^2$

$\text{MR}=\dfrac{\text{dTR}}{\text{d}Q}=11-0.5Q$

在 $Q=4$，$\text{MR}=11-0.5(4)=9$

在 $Q=10$，$\text{MR}=11-0.5(10)=6$

4.13　对下列消费函数，利用导数求边际消费倾向 $\text{MPC}=\text{d}C/\text{d}Y$.

(a)　$C=C_0+bY$　　(b)　$C=1500+0.75Y$

解 ☞ (a)　$\text{MPC}=\dfrac{\text{d}C}{\text{d}Y}=b$　　(b)　$\text{MPC}=\dfrac{\text{d}C}{\text{d}Y}=0.75$

4.14　已知 $C=1200+0.8Yd$，其中 $Yd=Y-T$，$T=100$，利用导数，求 MPC.

解 ☞ 当 $C=f(Yd)$时，先求出 $C=f(Y)$，再求导数，则有
$$C=1200+0.8(Y-100)=1120-0.8Y$$
$$\text{MPC}=\frac{\text{d}C}{\text{d}Y}=0.8$$

注，在收入决定模型中引入总额赋税不会影响 MPC(或乘子)的值.

4.15　已知 $C=2000+0.9Yd$，其中 $Yd=Y-T$，$T=300+0.2Y$，利用导数，求 MPC.

解 ☞ $C=2000+0.9(Y-300-0.2Y)=2000+0.9Y-270-0.18Y=1730+0.72Y$
$$\text{MPC}=\frac{\text{d}C}{\text{d}Y}=0.72$$

在收入决定模型中引入比例税不会影响 MPC 的值，从而不会影响乘子的值.

4.16　对下列平均成本函数，求边际成本函数.

解 ☞ (a)　$\text{AC}=1.5Q+4+\dfrac{46}{Q}$

已知平均成本函数，先求出总成本函数，再求导数，得到边际成本函数如下：
$$\text{TC}=(\text{AC})Q=(1.5Q+4+\frac{46}{Q})Q=1.5Q^2+4Q+46$$
$$\text{MC}=\frac{\text{dTC}}{\text{d}Q}=3Q+4$$

(b)　$\text{AC}=\dfrac{160}{Q}+5-3Q+2Q^2$
$$\text{TC}=(\frac{160}{Q}+5-3Q+2Q^2)Q=160+5Q-3Q^2+2Q^3$$
$$\text{MC}=\frac{\text{dTC}}{\text{d}Q}=5-6Q+6Q^2$$

优化经济函数

4.17　通过以下步骤求下列总收益 TR 和总利润 π 函数的最大值.(1)求驻点.(2)检验二阶条件，(3)计算 TR 和 π 的最大值.

解 ☞ (a)　$\text{TR}=32Q-Q^2$

(1)　$\text{TR}'=32-2Q=0$

$Q=16$　驻点

$TR'' = -2 < 0$ 凹的，极大值

$TR = 32(16) - (16)^2 = 256$

注意到：当二阶导数在整个定义域中均为负值时，见(2)，我们可以得到函数为严格凹的，并达到全局极大值、即最大值的结论.

(b) $\pi = -Q^2 + 11Q - 24$

解 ☞ (1) $\pi' = -Q^2 + 11Q - 24$

$Q = 5.5$ 驻点

(2) $\pi'' = -2 < 0$ 凹的，极大值

(3) $\pi = -(5.5)^2 + 11(5.5) - 24 = 6.25$

(c) $\pi = -\frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 2000Q - 326$

解 ☞ (1)

$$\pi' = -Q^2 - 10Q + 2000 = 0 \tag{4.1}$$

$$-1(Q^2 + 10Q - 2000) = 0 \tag{4.2}$$

$$(Q + 50)(Q - 40) = 0$$

$$Q = -50 \quad Q = 40 \quad \text{驻点}$$

(2)

$$\pi'' = -2Q - 10$$

$$\pi''(40) = -2(40) - 10 = -90 < 0 \quad \text{凹的，极大值}$$

$$\pi''(-50) = -2(50) - 10 = 90 > 0 \quad \text{凸的，极小值}$$

由于负的驻点没有经济意义，所以被忽略.

(3) $\pi = -\frac{1}{3}(40)^3 - 5(40)^2 + 2000(40) - 326 = 50,340.67$

注 在第二步检验二阶条件时，总在负数因子被忽略之前，对一阶导数原式(4.1)求二阶导数. 如果先去掉负因子，再由(4.2)求二阶导数，则会得到相反的二阶导数条件，即函数在 $Q = -50$ 处取得最大值，而在 $Q = 40$ 处取得最小值. 自己验证.

(d) $\pi = -Q^3 - 6Q^2 + 1440Q - 545$

解 ☞ (1)

$$\pi' = -3Q^2 - 12Q + 1440 = 0$$

$$-3(Q - 20)(Q + 24) = 0$$

$$Q = 20 \quad Q = -24 \quad \text{驻点}$$

(2)

$$\pi'' = -6Q - 12$$

$$\pi''(20) = -6(20) - 12 = -132 < 0 \quad \text{凹的，极大值}$$

$$\pi = -(20)^3 - 6(20)^2 + 1440(20) - 545 = 17855$$

4.18 根据下列总成本函数 TC，求(1)平均成本函数 AC，(2)AC 取得最小的驻点，(3)平均成本的最小值.

解 ☞ (a) $TC = Q^3 - 5Q^2 + 60Q$

(1) $AC = \frac{TC}{Q} = \frac{Q^3 - 5Q^2 + 60Q}{Q} = Q^2 - 5Q + 60$

(2) $AC' = 2Q - 5 = 0 \quad Q = 2.5$

$AC'' = 2 > 0$ 凸的，极小值

(3) $AC(2.5) = (2.5)^2 - 5(2.5) + 60 = 53.75$

注 当二阶导数在整个定义域上均为正时，见前面的(2)，我们也可以得到结论：函数为严格凸的，且取得极小值.

(b) $TC = Q^3 - 21Q^2 + 500Q$

(1) $AC = \frac{Q^3 - 21Q^2 + 500Q}{Q} = Q^2 - 21Q + 500$

(2) $AC' = 2Q - 21 = 0 \quad Q = 10.5$

$AC'' = 2 > 0$ 凸的，极小值

(3) $AC = (10.5)^2 - 21(10.5) + 500 = 389.75$

4.19 已知下列不同企业的总收益和总成本函数，用如下方法求出企业最大利润.
(1)建立利润函数 $\pi = \text{TR} - \text{TC}$，(2)求关于利润 π 的驻点，并检验二阶条件，(3)计算最大利润.

(a) $\text{TR} = 1\,400Q - 6Q^2 \qquad \text{TC} = 1\,500 + 80Q$

解 (1) $\pi = 1\,400 - 6Q^2 - (1\,500 + 80Q)$

$$= -6Q^2 + 132Q - 1500$$

(2) $\pi' = -12Q + 1\,320 = 0$

$Q = 110$ 驻点

$\pi'' = -12 < 0$ 凹的，极大值

(3) $\pi = -6(110)^2 + 1\,320(110) - 1500 = 71000$

(b) $\text{TR} = 1\,400Q - 7.5Q^2 \qquad \text{TC} = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$

解 (1) $\pi = 1\,400Q - 7.5Q^2 - (Q^3 + 140Q + 750) \qquad (4.3)$

$$= -Q^3 - 1.5Q^2 + 1\,260Q - 750$$

(2) $\pi' = 3Q^2 - 3Q + 1\,260 = 0$

$= -3(Q^2 + Q - 420) = 0$

$= -3(Q + 21)(Q - 20) = 0$

$Q = -21 \quad Q = 20$ 驻点

对(4.3)求二阶导数，正如问题 4.17(c)中的解释，忽略所有负的驻点.

$$\pi'' - -6Q - 3$$

$$\pi''(20) = -6(20) - 3 = -123 < 0 \qquad \text{凹的，极大值}$$

(3) $\pi = -(20)^3 \quad 1.5(20)^2 + 1\,260(20) - 750 = 15\,850$

(c) $\text{TR} = 4\,350Q - 13Q^2 \quad \text{TC} = Q^3 - 5.5Q^2 + 150Q + 675$

解 (1) $\pi = 4\,350Q - 13Q^2 - (Q^3 - 5.5Q^2 + 150Q + 675)$

$$= -Q^3 - 7.5Q^2 + 4\,200Q - 675$$

(2) $\pi' = -3Q^2 - 15Q + 4\,200 = 0$

$= -3(Q^2 + 5Q - 1400) = 0$

$= -3(Q + 40)(Q - 35) = 0$

$Q = -40 \quad Q = 35$ 驻点

$\pi'' = -6Q - 15$

$\pi''(35) = -6(35) - 15 = -225 < 0$ 凹的，极大值

(3) $\pi = -(35)^3 - 7.5(35)^2 + 4\,200(35) - 675 = 94262.50$

(d) $\text{TR} = 5\,900Q - 10Q^2 \quad TC = 2Q^3 - 4Q^2 + 140Q + 845$

解 (1) $\pi = 5\,900Q - 10Q^2 - (2Q^3 - 4Q^2 + 140Q + 845)$

$$= -2Q^3 - 6Q^2 + 5\,760Q - 845$$

(2) $\pi' = -6Q^2 - 12Q + 5\,760 = 0$

$= -6(Q^2 + 2Q - 960) = 0$

$= -6(Q + 32)(Q - 30) = 0$

$Q = -32 \quad Q = 30$ 驻点

$\pi'' = -12Q - 12$

$\pi''(30) = -12(30) - 12 = -372 < 0$ 凹的，极大值

(3) $\pi = -2(30)^3 - 6(30)^2 + 5\,760(30) - 845 = 112\,555$

4.20 证明：对于利润最大的产出水平，边际成本(MC)等于边际收益(MR).

证

$$\pi = \text{TR} - \text{TC}$$

为使利润最大，必有

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{d\text{TR}}{dQ} - \frac{d\text{TC}}{Q} = 0$$

$$\frac{dTR}{dQ}=\frac{dTC}{dQ}$$

$$MR=MC \quad Q.E.D$$

4.21 假设一厂商可以对一产品的国内与国外市场采取差别定价，其需求函数分别为

$$Q_1 = 21 - 0.1P_1 \tag{4.4}$$

$$Q_2 = 50 - 0.4P_2 \tag{4.5}$$

总成本 $TC=2\,000+10Q$，其中，$Q=Q_1+Q_2$. 为使利润最大，厂商如何定价？(a) 有差别的市场，(b)没有差别的市场. (3)比较两种情况下的利润.

解 (a) 在价格歧视下，厂商为追求利润最大，一定会在每个市场上，使 MC = MR. 所以，$MC=MR_1=MR_2$，由于 $TC=2\,000+10Q$

$$MC=\frac{dTC}{dQ}=10$$

因此 MC 在任何产量水平上相等，在国内市场上，

$$Q_1=21-0.1P_1$$

则

$$P_1=21-10Q_1$$

$$TR_1=(210-10Q_1)Q_1=210Q_1-10Q_1^2$$

且

$$MR_1=\frac{dTR_1}{dQ_1}=210-20Q_1$$

当 $MR_1=MC$ 时，

$$210-20Q_1=10 \quad Q_1=10$$

当 $Q_1=10$ 时，

$$P_1=210-10(10)=110$$

在国外市场上，

$$Q_2=50-0.4P_2$$

因此

$$P_2=125-2.5Q_2$$

$$MR_2=(125-2.5Q_2)Q_2=125Q_2-2.5Q_2^2$$

则

$$MR_2=\frac{dTR_2}{dQ_2}=125-5Q_2$$

当 $MR_2=MC$ 时，

$$125-5Q_2=10 \quad Q_2=23$$

当 $Q_2=23$ 时，

$$P_2=125-2.5(23)=67.5$$

价格歧视的厂商在具有较高需求弹性的国外市场上开低价，而在需求弹性相对较低的国内市场开高价($P_1=110$).

(b) 如果厂商不能进行差别定价，$P_1=P_2$，将(4.4)和(4.5)的两个需求函数简单地叠加，有

$$Q=Q_1+Q_2=21-0.1P+50-0.4P=71-0.5P$$

因此

$$P=142-2Q$$

$$TR=(142-2Q)Q=142Q-2Q^2$$

且

$$MR=\frac{dTR}{dQ}=142-4Q$$

当 MR = MC 时，

$$142-4Q=10 \quad Q=33$$

当 $Q=33$ 时，

$$P=142-2(33)=76$$

当没有价格歧视发生时，价格下降到介于国内市场高价与国外市场低价之间的某一位置.注意：销售数量仍然保持不变：在 $P=76$ 时，$Q_1=13.4$，$Q_2=19.6$，$Q=33$.

(c) 在价格歧视情况下，

$$TR=TR_1+TR_2=P_1Q_1+P_2Q_2=110(10)+67.5(23)=2652.50$$

$TC=2000+10Q$，其中，$Q=Q_1+Q_2$

$$TC+2000+10(10+23)=2330$$

则

$$\pi=TR-TC=2652.50-2330=322.50$$

在没有价格歧视情况下，

$$TR=PQ=76(33)=2508$$

由于成本并不随有无歧视而变化，所以 TC = 2330. 这样，$\pi = 2508 - 2330 = 178$. 可见有价格歧视时的利润比无价格歧视时的利润要高.

4.22 面临两个不同的需求函数

$$Q_1 = 24 - 0.2P_1 \qquad Q_2 = 10 - 0.05P_2$$

而 $TC = 35 + 40Q$，在(a)有价格歧视，(b)无价格歧视两种情况下，企业分别开什么样的价？

解 ☞ (a) 由于 $Q_1 = 24 - 0.2P_1$,

$$P_1 = 120 - 5Q_1$$
$$TR_1 = (120 - 5Q_1)Q_1 = 120Q_1 - 5Q_1^2$$
$$MR_1 = 120 - 10Q_1$$

当 $MC = MR_1 = MR_2$ 时，企业达到了最大利润.

$$TC = 35 + 40Q$$
$$MC = 40$$

当 $MC = MR_1$ 时，　$40 = 120Q_1 \qquad Q_1 = 8$

当 $Q_1 = 8$ 时，　$P_1 = 120 - 5(8) = 80$

在第二个市场上，由于 $Q_2 = 10 - 0.05P_2$,

$$P_2 = 200 - 20Q_2$$
$$TR_2 = (200 - 20Q_2)Q_2 = 200Q_2 - 20Q_2^2$$
$$MR_2 = 200 - 40Q_2$$

当 $MC = MR_2$ 时，　$40 = 200 - 40Q_2 \qquad Q_2 = 4$

当 $Q_2 = 4$ 时，　$P_2 = 200 - 20(4) = 120$

(b) 如果厂商不进行价格歧视，$P_1 = P_2 = P$，则将两个需求函数合并，有

$$Q = Q_2 + Q_2 = 24 - 0.2P + 10 - 0.05P = 34 - 0.25P$$

则

$$P = 136 - 4Q$$
$$TR = (136 - 4Q)Q = 136Q - 4Q^2$$
$$MR = 136 - 8Q$$

在利润最大时，有 MC = MR

$$40 = 136 \qquad Q = 12$$

在 $Q = 12$ 时，　$P = 136 - 4(12) = 88$

4.23 用 MR = MC，(a)求最大利润 π，(b)检验二阶条件. 设

$$TR = 1400Q - 7.5Q^2 \qquad TC = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$$

解 ☞ (a) $MR = TR' = 1400 - 15Q$，$MC = TC' = 3Q^2 - 12Q + 140$

等式 MR = MC，　$1400 - 15Q = 3Q^2 - 12Q + 140$

移项，整理得

$$3Q^2 + 3Q - 1260 = 0$$
$$3(Q + 21)(Q - 20) = 0$$
$$Q = -21 \quad Q = 20 \quad \text{驻点}$$

(b) $TR'' = -15$，$TC'' = 6Q - 12$

由于 $\pi = TR - TC$，且以最大化 π 为目标，则务必从 TR″中减去 TC″，否则会颠倒二阶条件，并选择错误的驻点.

$$\pi'' = TR'' - TC''$$
$$= -15 - 6Q + 12 = -6Q - 3$$
$$\pi'' = -6(20) - 3 = -123 < 0 \qquad \text{凹，的极大值}$$

与问题 4.19(b)的结果进行比较.

边际技术替代率

4.24 等量线描述了用于生产一特定产出量 Q 的投入 K 与 L 的不同组合. 对产出水平 $Q =$

2144 的等产量线为

$$16K^{1/4}L^{3/4}=2144$$

(a)利用 3.9 节中的隐函数微分法求等产量线的斜率 dK/dL,在经济学上称其为边际技术替代率(MRTS).(b)求在 $K=256$, $L=108$ 处的边际技术替代率.

解 ☞ (a) 将 K 看成 L 的函数, 等产量线方程两边对 L 求导数,

$$\frac{d}{dL}(16K^{1/4}L^{3/4})\frac{d}{dL}(2144)$$

因 K 是 L 的函数, 利用乘法法则, 有

$$16K^{1/4}\frac{d}{dL}\left(L^{3/4}-L^{3/4}\frac{d}{dL}(16K^{1/4})\right)=\frac{d}{dL}(2144)$$

$$\left(16K^{1/4}\frac{3}{4}L^{-1/4}\right)+\left(L^{3/4}\cdot 4\cdot\frac{1}{4}K^{-3/4}\frac{dK}{dL}\right)=0$$

$$12K^{1/4}L^{-1/4}+4K^{-3/4}L^{3/4}\frac{dK}{dL}=0$$

解出 dK/dL,

$$\frac{dK}{dL}=\frac{-12K^{1/4}L^{-1/4}}{4K^{-3/4}L^{3/4}}=\frac{-3K}{L}$$

(b) 当 $K=256$, $L=108$ 时,

$$\text{MRTS}=\frac{dK}{dL}=\frac{-3(256)}{108}=-7.11$$

这意味着: 如果增加一个相当小单位的 L, 为保持在原来的等量线上, 就必须减少 7.11 个相当小单位的 K. 参见问题 6.51.

4.25 等产量线方程为

$$25K^{3/5}L^{2/5}=5400$$

(a)求 MRTS, (b)求在 $K=243$, $L=181$ 处的 MRTS 的值.

解 ☞ (a) 将 K 视为 L 的函数, 并利用乘法法则求 dK/dL, 即为 MRTS.

$$25K^{3/5}\frac{2}{5}L^{-3/5}+L^{2/5}\cdot 25\cdot\frac{3}{5}K^{-2/5}\frac{dK}{dL}=0$$

$$10K^{3/5}L^{-3/5}+15K^{-2/5}L^{2/5}\frac{dK}{dL}=0$$

解出 dK/dL

$$\frac{dK}{dL}=\frac{-10K^{3/5}L^{-3/5}}{15K^{-2/5}L^{2/5}}=\frac{-2K}{3L}=\text{MRTS}$$

(b) 当 $K=243$, $L=181$ 时,

$$\text{MRTS}=\frac{dK}{dL}=\frac{-2(243)}{3(181)}=-0.895$$

这意味着:为保持在原来的等产量线上, 增加一相当小单位的 L, 必须减少 0.895 个相当小单位的 K. 见问题 6.52.

函数与图形的关系

4.26 已知总成本函数 $C=Q^3-18Q^2+750Q$, 利用微积分知识描述出总成本、平均成本、边际成本三者关系的图形.

解 ☞ (a) 对总成本函数, 求一阶导数和二阶导数

$$C'=3Q^2-36Q+750$$
$$C''=6Q-36$$

检验(1)凸凹性,(2)拐点.

1) 对 $Q<6$, 　　$C''<0$ 　凹

　对 $Q>6$, 　　$C''>0$ 　凸

2)

$$6Q-36=0$$
$$Q=6$$

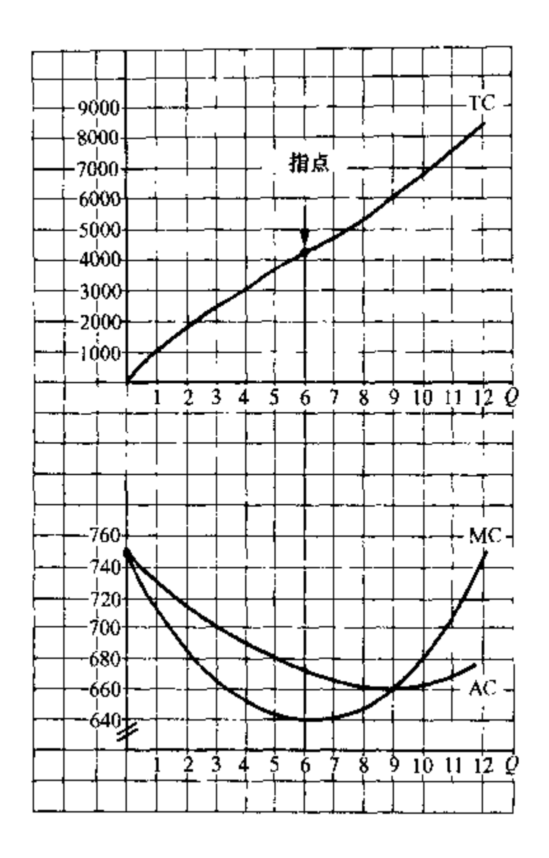


图 4-9

$$C(6) = (6)^3 - 18(6)^2 + 750(6) = 4068$$

由于 $C(Q)$在 $Q=6$ 处从凹变成凸，则(6,4068)为拐点.

(b)　求平均函数 AC 及极值.

$$AC = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 18Q + 750$$

$$AC' = 2Q \quad 18 \qquad Q = 9 \quad 驻点$$

$$AC'' = 2 > 0 \qquad 凸的，极小值$$

(c)　同样求边际成本函数，

$$MC = C' = 3Q^2 - 36Q + 750$$

$$MC' = 6Q - 36 = 0 \qquad Q = 6 \quad 驻点$$

$$MC'' = 6 > 0 \qquad 凸，的极小值$$

(d)　描绘图 4-9，注意到(1)当 TC 凹，并以递减的速度上升时，MC 下降；当 TC 凸，并以递增的速度上升时，MC 上升；当 TC 处于拐点处，凸凹性改变时，MC 达到极小值. (2)在 MC＜AC 的整个区域内，AC 下降；在 MC＝AC 时，AC 达到最小值；当 MC＞AC 时，AC 上升.

第五章　多元函数的微积分

5.1　多元函数和偏导数

在第四章中仅就形如 $y=f(x)$ 的一元自变量函数的导数进行了研究. 然而, 许多经济活动涉及的是多元函数. $z=f(x,y)$ 被定义为二元函数, 如果对 f 的定义域内每一有序的实数对 (x,y) 都有且仅有 f 的值域中的一个 z 值. 习惯上称 z 为因变量, x 和 y 为自变量.

为了度量单个自变量(x 或 y)的变化对因变量的影响, 引进偏导数. z 关于 x 的偏导数度量的是当 y 保持不变时 z 关于 x 的瞬时变化率, 记作 $\partial z/\partial x$, $\partial f/\partial x$, $f_x(x,y)$, f_x, 或 z_x. z 关于 y 的偏导数是指当 x 保持不变时 z 关于 y 的瞬时变化率. 记作 $\partial z/\partial y$, $\partial f/\partial y$, $f_y(x,y)$, f_y, 或 z_y. 用数学表达如下,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{5.1a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{5.1b}$$

关于单变量的偏微分与将另一变量视为不变时的常微分一样, 遵循相同的运算规则. 见例 1, 例 2 和问题 5.1, 5.23.

例 1　求多元函数 $z=3x^2y^3$ 的偏导数.

解　☞ (a)　在对 x 求导时, 将 y 视为常数, 同系数一样对待:

$$z=[3y^3]\cdot x^2$$

对 x 求导数, y 保持不变,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=[3y^3]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=[3y^3]\cdot 2x$$

在求导时常系数保持不变, 简单地相乘并整理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=6xy^3$$

(b)　在对 y 求导时, 将 x 视为常数, 同系数一样对待; 于是同前一样求导数:

$$z=[3x^2]\cdot y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y=[3x^2]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^3)=[3x^2]\cdot 3y^2=9x^2y^2$$

例 2　求 $z=5x^3-3x^2y^2+7y^5$ 的偏导数.

解　☞ (a)　在对 x 求导时, 在心里将 y 当作常数一样看待:

$$z=5x^3-[3y^2]x^2+[7y^5]$$

于是逐项求导数. 记住相乘的常系数保持不变, 但附加的常数项要去掉, 这是因为常数的导数为零.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3)-[3y^2]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[7y^5]=15x^2-[3y^2]\cdot 2x+0$$
$$=15x^2-6xy^2$$

(b)　当对 y 求导时, 去掉仅含 x 的项, 同前一样微分:

$$z=[5x^3]-[3x^2]y^2+7y^5$$

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[5x^3]-[3x^2]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(7y^5)$$
$$=0-[3x^2]\cdot 2y+35y^4=-6x^2y+35y^4$$

见问题 5.1.

5.2　偏微分法则

偏导数遵循 3.7 节中的微分基本法则. 下面给出几个重要的规则, 并用例 3、例 5 加以说明, 在问题 5.2 和 5.3 中得到应用, 在问题 5.23 中证明.

5.2.1　乘法法则

给定 $z=g(x,y)\cdot h(x,y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(x,y)\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \tag{5.2a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=g(x,y)\cdot\frac{\partial h}{\partial y}+h(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \tag{5.2b}$$

例 3　给定 $z=(3x+5)(2x+6y)$, 由乘法法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(3x+5)(2)+(2x+6y)(3)=12x+10+18y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(3x+5)(6)+(2x+6y)(0)=18x+30$$

5.2.2　除法法则

给定 $z=g(x,y)/h(x,y)$和 $h(x,y)\neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{h(x,y)\cdot\partial g/\partial x-g(x,y)\cdot\partial h/\partial x}{[h(x,y)]^2} \tag{5.3a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{h(x,y)\cdot\partial g/\partial y-g(x,y)\cdot\partial h/\partial y}{[h(x,y)]^2} \tag{5.3b}$$

例 4　给定 $z=(6x+7y)/(5x+3y)$, 由除法法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(5x+3y)(6)-(6x+7y)(5)}{(5x+3y)^2}=\frac{30x+18y-30x-35y}{(5x+3y)^2}=\frac{-17y}{(5x+3y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(5x+3y)(7)-(6x+7y)(3)}{(5x+3y)^2}=\frac{35x+21y-18x-21y}{(5x+3y)^2}=\frac{17x}{(5x+3y)^2}$$

5.2.3　一般幂函数法则

给定 $z=[g(x,y)]^n$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=n[g(x,y)]^{n-1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \tag{5.4a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=n[g(x,y)]^{n-1}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \tag{5.4b}$$

例 5　给定 $z=(x^3+7y^2)^4$, 由一般幂函数法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4(x^3+7y^2)^3\cdot(3x^2)=12x^2(x^3+7y^2)^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4(x^3+7y^2)^3\cdot(14y)=56y(x^3+7y^2)^3$$

5.3　二阶偏导数

已知函数 $z=f(x,y)$, 二阶(直接)偏导数是指当其他自变量保持不变时, 该函数对一个自变量求导两次:

$$f_{xx}=(f_x)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\quad f_{yy}=(f_y)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

事实上, f_{xx}度量的是当 y 保持不变时, 一阶偏导数关于 x 的变化率. f_{yy}是完全对称的. 见问题

5.6 和 5.8.

交叉(混合)偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 是指原函数对一个变量偏微分后的偏导数再对另一个自变量偏导数：

$$f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\quad f_{yx}=(f_y)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

简言之,交叉偏导数度量的是一阶偏导数关于另一变量的变化率.注意在不同的记号中自变量的顺序.见问题 5.7 和 5.9.

例 6　$z=7x^3+9xy+2y^5$ 的(a)一阶　(b)二阶　(c)交叉偏导数的求法如下：

(a) $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=21x^2+9y$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y=9x+10y^4$

(b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}=42x$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}=40y^3$

(c) $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(21x^2+9y)=z_{xy}=9$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(9x+10y^4)=z_{yx}=9$

例 7　求 $z=3x^2y^3$ 的(a)一阶　(b)二阶　(c)交叉偏导数在 $x=4,y=1$ 处的值.

解 ☞

(a) $z_x=6xy^3$　　　$z_y=9x^2y^2$

$z_x(4,1)=6(4)(1)^3=24$　　　$z_y(4,1)=9(4)^2(1)^2=144$

(b) $z_{xx}=6y^3$　　　$z_{yy}=18x^2y$

$z_{xx}(4,1)=6(1)^3=6$　　　$z_{yy}(4,1)=18(4)^2(1)=288$

(c) $z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(6xy^3)=18xy^2$　　　$z_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(9x^2y^2)=18xy^2$

$z_{xy}(4,1)=18(4)(1)^2=72$　　　$z_{yx}(4,1)=18(4)(1)^2=72$

由 Young 定理有:如果两个交叉偏导数均连续,则它们必相等.见问题 5.7 至 5.9.

5.4 多元函数的最优化

形如 $z=f(x,y)$ 的多元函数达到极值,必须满足三个条件：

1. 一阶偏导数必须同时为零.这意味着在给定的点 (a,b) 即驻点处,函数关于主轴既不增也不减,达到一个相对稳定状态.

2. 当二阶偏导数在驻点 (a,b) 处的值均为负时,函数达到极大,即函数在 (a,b) 处为凹并相对于主轴下降;当二阶偏导数在驻点 (a,b) 处的值均为正时,函数达到极小,即函数在 (a,b) 处为凸并相对于主轴上升.

3. 二阶直接偏导数在驻点处的值的乘积一定超过交叉偏导数在驻点处的值之积,该附加条件是判断拐点或鞍点所必须的.

总之,当在驻点 (a,b) 处的值满足时,见图 5-1.

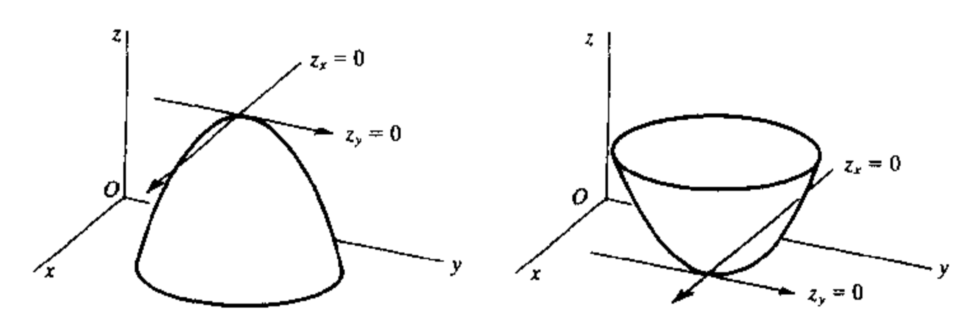


图 5-1

极大点	极小点
1. $f_x, f_y=0$	1. $f_x, f_y=0$
2. $f_{xx}, f_{yy}<0$	2. $f_{xx}, f_{yy}>0$
3. $f_{xx}\cdot f_{yy}>(f_{xy})^2$	3. $f_{xx}\cdot f_{yy}>(f_{xy})^2$

注意　1)　由于根据 Young 定理，$f_{xy}=f_{yx}$，所以有 $f_{xy}\cdot f_{yx}=(f_{xy})^2$·3 也可写成 $f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2>0$.

2)　$f_{xx}\cdot f_{yy}<(f_{xy})^2$，如果 f_{xx}、f_{yy}有相同的符号，则函数有拐点；如果符号相反，则函数有鞍点，见图 5-2，此时从一轴看函数取得极大值，而从另一轴看却取得极小值.

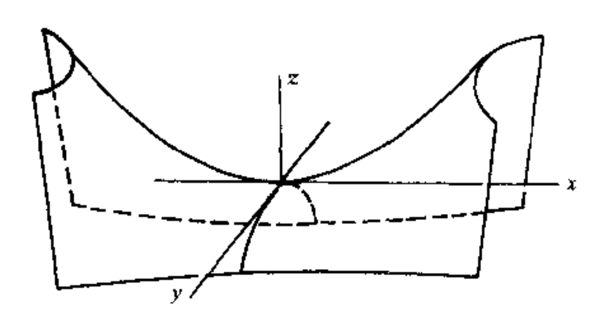


图 5-2

3)　$f_{xx}\cdot f_{yy}=(f_{xy})^2$，无法判断，见例 8、问题 5.10 和 5.11；对于拐点，见问题 5.10(c)、5.11(b)和(c)；对于鞍点，见问题 5.10(d)、5.11(a)和(d).

4)　如果像图 5-1 中函数关于 x，y 为严格凹(凸)，则有惟一的极大值(极小值)，称为全局最大值(最小值). 如果函数在一区间内关于 x，y 为凹(凸)，则驻点为相对或局部最大(最小).

例 8　已知：$z=2y^3-x^3+147x-54y+12$. (a)求驻点，(b)判断函数有极大值还是极小值.

解　☞(a)　求一阶偏导数，令它们等于零，并求解 x 和 y：

$$z_x=-3x^2+147=0 \qquad z_y=6y^2-54=0$$
$$x^2=49 \qquad y^2=9 \tag{5.5}$$
$$x=\pm 7 \qquad y=\pm 3$$

由于 $x=\pm7$，$y=\pm3$，有四个不同的驻点：(7，3)，(7，−3)，(−7，3)和(−7，−3).

(b)　由(5.5)求二阶直接偏导数，并求出在驻点处的值，检查符号：

$$z_{xx}=-6x \qquad z_{yy}=12y$$

1)　$z_{xx}(7,3)=-6(7)=-42<0$　　$z_{yy}(7,3)=12(3)=36>0$

2)　$z_{xx}(7,-3)=-6(7)=-42<0$　　$z_{yy}(7,-3)=12(-3)=-36<0$

3)　$z_{xx}(-7,3)=-6(-7)=42>0$　　$z_{yy}(-7,3)=12(3)=36>0$

4)　$z_{xx}(-7,-3)=-6(-7)=42>0$　　$z_{yy}(-7,-3)=12(-3)=-36<0$

由于在(1)、(4)中的二阶直接偏导数异号，则函数在(7，3)、(−7，−3)处不能达到极值. 此时 $f_{xx}\cdot f_{yy}$不可能大于$(f_{xy})^2$，所以函数有鞍点.

由于在(2)、(3)中二阶直接偏导数在(2)中为负，则在(7，−3)取极大值；二阶直接偏导数在(3)中为正，则在(−7，3)取极小值. 但第三个条件必须先得到验证，以排除拐点的可能.

(c)　由(5.5)求交叉偏导数并验证

$$z_{xy}=0 \qquad z_{yx}=0$$
$$z_{xx}(a,b)\cdot z_{yy}(a,b)>[z_{xy}(a,b)]^2$$

对于(2)，
$$(-42)\cdot(-36)>(0)^2$$

$$1512>0$$

对于(3)，
$$(42)\cdot(36)>(0)^2$$
$$1512>0$$

函数在(7, −3)取得极大和在(−7,3)取得极小；对于拐点，见问题5.10(c)和5.11(b),(c).

5.5 带有拉格朗日乘子的约束优化

微积分也应用于带约束的函数的最大值与最小值问题. 给定函数 $f(x,y)$，满足约束 $g(x,y)=k$(常数)，通过下述步骤可得到新的函数 F，(1) 令约束等于零，(2) 乘以 λ(拉格朗日乘子)，(3) 将乘积加到原函数上：

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda[k-g(x,y)] \tag{5.6}$$

这里 $F(x,y,\lambda)$ 称为拉格朗日函数，$f(x,y)$ 称为原函数或目标函数，$g(x,y)$ 称为约束. 由于约束总令为零，乘积 $\lambda[k-g(x,y)]$ 也为零，所以加上该项并不改变目标函数的值. 函数最优时的驻点 x_0, y_0 和 λ_0，可由求 F 关于三个变量的偏导数，并令它们为零，同时求解得到：

$$F_x(x,y,\lambda)=0 \qquad F_y(x,y,\lambda)=0 \qquad F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

二阶条件与无约束最优化不同，将在12.5节中讲解. 见例9、问题5.12～5.14；6.6节、6.9节和6.10节；问题6.28～6.39和6.41～6.44.

当约束涉及不等式时，见13章的凹规划.

例 9 求解函数 $z=4x^2+3xy+6y^2$ 满足约束 $x+y=56$ 的优化问题.

解 ☞ 1. 通过用常数减去变量的方法令约束为零，见(5.6)，至于原因在5.6节中给出.

$$56-x-y=0$$

用 λ 乘上差，并将二者的积加到目标函数上，构造拉格朗日函数 Z

$$Z=4x^2+3xy+6y^2+\lambda(56-x-y) \tag{5.7}$$

2. 求一阶偏导，令它们为零，并联立求解，

$$Z_x=8x+3y-\lambda=0 \tag{5.8}$$
$$Z_y=3x+12y-\lambda=0 \tag{5.9}$$
$$Z_\lambda=56-x-y=0 \tag{5.10}$$

从(5.8)中减去(5.9)，消去 λ 有

$$5x-9y=0 \qquad x=1.8y$$

将 $x=1.8y$ 代入(5.10)，

$$56-1.8y-y=0 \qquad y_0=20$$

由此，我们得到

$$x_0=36 \qquad \lambda_0=348$$

将驻点代入(5.7)，

$$\begin{aligned}Z&=4(36)^2+3(36)(20)+6(20)^2+(348)(56-36-20)\\&=4(1296)+3(720)+6(400)+348(0)=9744\end{aligned}$$

在第12章例5中，我们将知道 Z 达到最小值. 注意到，由于约束等于零，拉格朗日函数 Z 与目标函数 z 在驻点处有相同的值. 见问题5.12～5.14和6.6节，6.9节，6.10节.

5.6 拉格朗日乘子的重要意义

拉格朗日乘子 λ 近似于由于约束的常数很小的变化而对目标函数产生的边际影响. 例如，在例9中 $\lambda=348$，增加(减少)约束常数的一个单位，会引起 Z 增加(减少)大约348个单位，见例10的说明. 拉格朗日乘子经常被称为影子价格. 例如，在满足预算约束，效用最大化的

问题中，λ 将估算一元额外收入的边际效用. 见问题 6.36.

注意　由于在前面(5.6)中，$\lambda[k-g(x,y)]=\lambda[g(x,y)-k]=0$，从目标函数中加或减无论哪种形式都不会改变 x 和 y 的驻点值. 只有 λ 的符号会受到影响. 为使(5.6)节中的 λ 的解释有意义，必须给出上述(5.6)方程中的那一项确切的形式. 见问题 6.36.

例 10　为了证明增加一单位的约束常数会引起例 9 中 Z 大约变化 348，我们取原目标函数 $z=4x^2+3xy+6y^2$，求其满足新的约束 $x+y=57$ 的最优值，即约束常数增加了一单位.

$$
\begin{aligned}
Z &= 4x^2+3xy+6y^2+\lambda(57-x-y)\\
Z_x &= 8x+3y-\lambda=0\\
Z_y &= 3x+12y-\lambda=0\\
Z_\lambda &= 57-x-y=0
\end{aligned}
$$

联立求解得到

$$x_0=36.64 \qquad y_0=20.36 \qquad \lambda_0=354.2$$

代入拉格朗日函数 Z 有 $Z=10095$，它比原来的约束最优值 9744 多了 351，接近于 λ 的值 348.

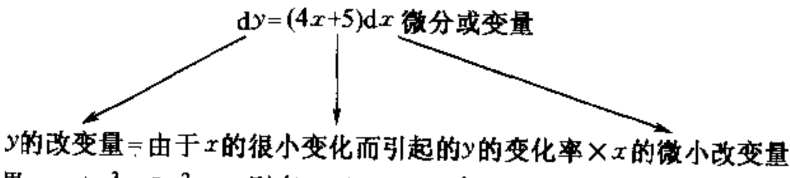
5.7　微分

在 3.4 节中，导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 可以由当 Δx 趋于零时，$\Delta y/\Delta x$ 的极限这一符号表示. 导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 也可以看作是 y 的微分 $\mathrm{d}y$ 与 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 的比. 对于一元函数 $y=f(x)$，y 的微分 $\mathrm{d}y$ 度量的是由于 x 的很小变化 $\mathrm{d}x$ 引起 y 的变化.

对于 $y=2x^2+5x+4$，y 的微分可通过求 y 关于 x 的导数而得到，该导数度量由于 x 的微小变化而引起的 y 的变化与 x 的微小变化之比率.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x+5 \qquad \text{导数或变化率}$$

接着，用 x 的一个特定变化 $\mathrm{d}x$ 乘以该比率，以求 y 的变化 $\mathrm{d}y$.



例 11　1. 如果 $y=4x^3+5x^2-7$，则有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=12x^2+10x$　及微分

$$\mathrm{d}y=(12x^2+10x)\mathrm{d}x$$

2. 如果 $y=(2x-5)^2$，则有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=2(2x-5)(2)=8x-20$　及微分

$$\mathrm{d}y=(8x-20)\mathrm{d}x$$

见问题 5.15.

5.8　全微分与偏微分

对于两个或更多个自变量的函数，全微分度量的是由于每一个自变量的微小变化而引起的因变量的改变量. 如果 $z=f(x,y)$，全微分 $\mathrm{d}z$ 的数学公式如下：

$$\mathrm{d}z=z_x\mathrm{d}x+z_y\mathrm{d}y \tag{5.11}$$

其中，z_x 和 z_y 分别是 z 关于 x 和 y 的偏导数，$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 是 x 和 y 的小改变量. 这样，全微分可以通过求函数关于每一个自变量的偏导数并代入上述公式求得.

例 12　如下求全微分

1. 已知：$z=x^4+8xy+3y^3$

$$z_x=4x^3+8y \qquad z_y=8x+9y^2$$

将其代入公式，得到

$$dz = (4x^3 + 8y)dx + (8x + 9y^2)dy$$

2. 已知：$z = (x-y)/(x+1)$

$$z_x = \frac{(x+1)(1)-(x-y)(1)}{(x+1)^2} = \frac{y+1}{(x+1)^2}$$

$$z_y = \frac{(x+1)(-1)-(x-y)(0)}{(x+1)^2} = \frac{-1(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1}$$

全微分是

$$dz = \frac{y+1}{(x+1)^2}dx - \left(\frac{1}{x+1}\right)dy$$

如果其中的一个自变量为常数，例如 $dy=0$，则有全微分：

$$dz = z_x dx$$

偏微分度量的是：当假设另一个自变量保持不变时，一个自变量的微小变化所引起的因变量的改变．见问题 5.16,5.17,6.45 和 6.52.

5.9 全导数

现在我们研究这样一种情形：$z=f(x,y)$，而 $y=g(x)$，即当 x 和 y 不是相互独立的变量时，x 的变化会通过函数 f 对 z 产生直接的影响，通过函数 g 对 z 产生间接的影响．正如图 5-3 中路径图所示．当 x 和 y 非相互独立时，要想度量 x 的变化对 z 的影响，必须给出全导数的概念．全导数是 x 对 z 的直接影响 $\partial z/\partial x$ 与通过 y 对 z 的间接影响 $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ 之和．即，全导数为

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx} \tag{5.12}$$

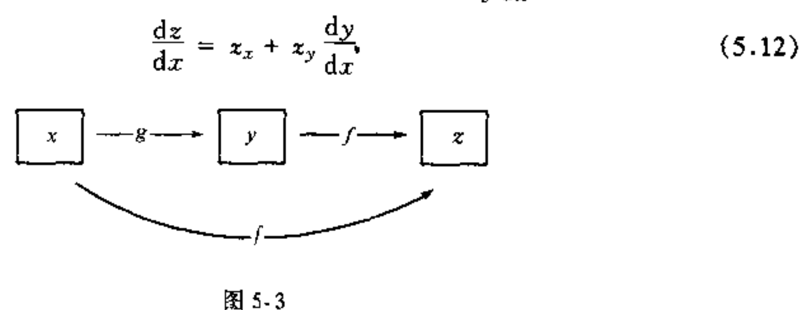


图 5-3

见例 13～15 和问题 5.18 和 5.19.

例 13　求全导数的另一方法：先求 z 的全微分

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

再将方程两边同除以 dx（在心里可以这样想），于是有

$$\frac{dz}{dx} = z_x\frac{dx}{dx} + z_y\frac{dy}{dx}$$

由于 $dx/dx=1$，有

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx}$$

例 14　已知

$$z = f(x,y) = 6x^3 + 7y$$

其中 $y=g(x)=4x^2+3x+8$，关于 x 的全导数 dz/dx 为

$$\frac{dz}{dx} = z_x + z_y\frac{dy}{dx}$$

其中 $z_x = 18x^2$，$z_y = 7$，和 $dy/dx = 8x+3$．代入上式，

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 7(8x+3) = 18x^2 + 56x + 21$$

为了检验答案，将 $y=4x^2+3x+8$ 代入原函数得到 z 关于 x 的一元函数，然后求导数：

$$z = 6x^3 + 7(4x^2 + 3x + 8) = 6x^3 + 28x^2 + 21x + 56$$

所以，

$$\frac{dz}{dx} = 18x^2 + 56x + 21$$

例 15　全导数同样可以进行扩展以适用其他的函数表达方式．对于

$$z = 8x^2 + 3y^2 \quad x = 4t \quad y = 5t$$

z 关于 t 的全导数则变成：

$$\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt}$$

其中 $z_x=16x, z_y=6y, dx/dt=4$ 和 $dy/dt=5$，代入上式

$$\frac{dz}{dt} = 16x(4) + 6y(5) = 64x + 30y$$

再将 $x=4t$ 和 $y=5t$ 代入上式，

$$\frac{dz}{dt} = 64(4t) + 30(5t) = 406t$$

5.10　隐函数和反函数法则

正如在 3.9 节所见，形如 $y=f(x)$ 的函数用 x 解析地表达出 y 来，我们称该种形式的函数为显函数．形如 $f(x,y)=0$ 的函数不能由 x 解析地表达出 y，称其为隐函数．如果隐函数 $f(x,y)$ 存在且在隐函数有定义的点附近 $f_y \neq 0$，则全微分为 $f_x dx + f_y dy = 0$．

由于导数即微分的比率，于是我们可以将之变形得到隐函数法则：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} \tag{5.13}$$

不难发现导数 dy/dx 是其相应偏导数之比的负倒数．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y} = -\frac{1}{f_y/f_x}$$

给定一个函数 $y=f(x)$，如果每一个 y 都对应一个而且仅一个 x 值，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在．假设反函数存在，则反函数的导数是原函数的导数的倒数，这便是反函数规则．所以，如果 $Q=f(P)$ 是原函数，其导数为 dQ/dP，反函数 $[P=f^{-1}(Q)]$ 的导数是 dP/dQ 且有

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{dQ/dP} \quad \text{只要} \quad \frac{dQ}{dP} \neq 0 \tag{5.14}$$

见例 16，例 17 和问题 5.20～5.22，6.51，6.52．

例 16　已知隐函数

(a)　$7x^2 - y = 0$　　(b)　$3x^4 - 7y^5 - 86 = 0$

导数 dy/dx 如下求得：

(a)　由(5.13)有，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

这里 $f_x=14x$ 和 $f_y=-1$，代入上式，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{14x}{(-1)} = 14x$$

本例中的函数有意地安排的很简单，即可以解出 y，将 y 以 x 表达，于是直接求导数：由于 $y=7x^2$，$dy/dx=14x$．这样一来就很容易地验证了答案．

(b) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{12x^3}{-35y^4}=\frac{12x^3}{35y^4}$$

将该答案与第三章的例 16 进行比较.

例 17 求下列函数的反函数:

1. 设 $Q=20-2P$,

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}$$

其中 $dQ/dP=-2$,所以,

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

2. 设 $Q=25+3P^3$,

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}=\frac{1}{9P^2}\quad(P\neq 0)$$

习 题 解 答

一阶偏导数

5.1 求下列函数的一阶偏导数:

解 ☞ (a) $z=8x^2+14xy+5y^2$

$z_x=16x+14y$

$z_y=14x+10y$

(b) $z=4x^3+2x^2y-7y^5$

$z_x=12x^2+4xy$

$z_y=2x^2-35y^4$

(c) $z=6w^3+4wx+3x^2-7xy-8y^2$

$z_w=18w^2+4x$

$z_x=4w+6x-7y$

$z_y=-7x-16y$

(d) $z=2w^2+8wxy-x^2+y^3$

$z_w=4w+8xy$

$z_x=8wy-2x$

$z_y=8wx+3y^2$

5.2 利用(5.2)乘积法则,求下列函数的一阶偏导数:

(a) $z=3x^2(5x+7y)$

解 ☞
$$\begin{aligned}z_x&=3x^2(5)+(5x+7y)(6x)\\&=45x^2+42xy\end{aligned}$$
及
$$\begin{aligned}z_y&=3x^2(7)+(5x+7y)(0)\\&=21x^2\end{aligned}$$

(b) $z=(9x-4y)(12x+2y)$

解 ☞
$$\begin{aligned}z_x&=(9x-4y)(12)+(12x+2y)(9)\\&=108x-48y+108x+18y=216x-30y\end{aligned}$$
及
$$\begin{aligned}z_y&=(9x-4y)(2)+(12x+2y)(-4)\\&=18x-8y-48x-8y=-30x-16y\end{aligned}$$

(c) $z=(2x^2+6y)(5x-3y^3)$

解 ☞
$$\begin{aligned}z_x&=(2x^2+6y)(5)+(5x-3y^3)(4x)\\&=10x^2+30y+20x^2-12xy^3\\&=30x^2+30y-12xy^3\end{aligned}$$
及
$$\begin{aligned}z_y&=(2x^2+6y)(-9y^2)+(5x-3y^3)(6)\\&=-18x^2y^2-54y^3+30x-18y^3\\&=-72y^3-18x^2y^2+30x\end{aligned}$$

(d) $z=(w-x-y)(3w+2x-4y)$

解 ☞
$$z_w=(w-x-y)(3)+(3w+2x-4y)(1)$$

$$= 6w - x - 7y$$

$$z_x = (w - x - y)(2) + (3w + 2x - 4y)(-1)$$

$$= -w - 4x + 2y$$

及 $z_y = (w - x - y)(-4) + (3w + 2x - 4y)(-1)$

$$= -7w + 2x + 8y$$

5.3　利用(5.3)除法法则，求下列函数的一阶偏导数：

(a)　$z = \dfrac{5x}{6x - 7y}$

解 ☞　$z_x = \dfrac{(6x-7y)(5)-(5x)(6)}{(6x-7y)^2} = \dfrac{-35y}{(6x-7y)^2}$

及　$z_y = \dfrac{(6x-7y)(0)-(5x)(-7)}{(6x-7y)^2} = \dfrac{35x}{(6x-7y)^2}$

(b)　$z = \dfrac{x+y}{3y}$

解 ☞　$z_x = \dfrac{3y(1)-(x+y)(0)}{(3y)^2} = \dfrac{1}{3y}$

及　$z_y = \dfrac{3y(1)-(x+y)(3)}{(3y)^2} = \dfrac{-3x}{(3y)^2} = \dfrac{-x}{3y^2}$

(c)　$z = \dfrac{4x-9y}{5x+2y}$

解 ☞　$z_x = \dfrac{(5x+2y)(4)-(4x-9y)(5)}{(5x+2y)^2} = \dfrac{53y}{(5x+2y)^2}$

及　$z_y = \dfrac{(5x+2y)(-9)-(4x-9y)(2)}{(5x+2y)^2} = \dfrac{-53x}{(5x+2y)^2}$

(d)　$z = \dfrac{x^2-y^2}{3x+2y}$

解 ☞　$z_x = \dfrac{(3x+2y)(2x)-(x^2-y^2)(3)}{(3x+2y)^2} = \dfrac{3x^2+4xy+3y^2}{(3x+2y)^2}$

及　$z_y = \dfrac{(3x+2y)(-2y)-(x^2-y^2)(2)}{(3x+2y)^2} = \dfrac{-2x^2-6xy-2y^2}{(3x+2y)^2}$

5.4　利用(5.4)一般幂函数法则，求下列函数的一阶偏导数：

(a)　$z = (x+y)^2$

解 ☞　$z_x = 2(x+y)(1) = 2(x+y)$

及　$z_y = 2(x+y)(1) = 2(x+y)$

(b)　$z = (2x-5y)^3$

解 ☞　$z_x = 3(2x-5y)^2(2) = 6(2x-5y)^2$

及　$z_y = 3(2x-5y)^2(-5) = -15(2x-5y)^2$

(c)　$z = (7x^2+4y^3)^5$

解 ☞　$z_x = 5(7x^2+4y^3)^4(14x) = 70x(7x^2+4y^3)^4$

及　$z_y = 5(7x^2+4y^3)^4(12y^2) = 60y^2(7x^2+4y^3)^4$

(d)　$z = (5w+4x+7y)^3$

解 ☞　$z_w = 3(5w+4x+7y)^2(5) = 15(5w+4x+7y)^2$

$z_x = 3(5w+4x+7y)^2(4) = 12(5w+4x+7y)^2$

及　$z_y = 3(5w+4x+7y)^2(7) = 21(5w+4x+7y)^2$

5.5　利用必要的法则运算，求下列函数的一阶偏导数：

(a)　$z = \dfrac{(5x^2-7y)(3x^2+8y)}{4x+2y}$

解 ☞ 利用除法和乘积法则，

$$z_x=\frac{(4x+2y)[(5x^2-7y)(6x)+(3x^2+8y)(10x)]-(5x^2-7y)(3x^2+8y)(4)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(30x^3-42xy+30x^3+80xy)-(5x^2-7y)(12x^2+32y)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(60x^3+38xy)-(5x^2-7y)(12x^2+32y)}{(4x+2y)^2}$$

及
$$z_y=\frac{(4x+2y)[(5x^2-7y)(8)+(3x^2+8y)(-7)]-(5x^2-7y)(3x^2+8y)(2)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(40x^2-56y-21x^2-56y)-(5x^2-7y)(6x^2+16y)}{(4x+2y)^2}$$
$$=\frac{(4x+2y)(19x^2-112y)-(5x^2-7y)(6x^2+16y)}{(4x+2y)^2}$$

(b)　$z=(5x^2-4y)^2(2x+7y^3)$

解 ☞ 利用乘积法则和一般幂函数法则,

$$z_x=(5x^2-4y)^2(2)+(2x+7y^3)[2(5x^2-4y)(10x)]$$
$$=2(5x^2-4y)^2+(2x+7y^3)(100x^3-80xy)$$

及
$$z_y=(5x^2-4y)^2(21y^2)+(2x+7y^3)[2(5x^2-4y)(-4)]$$
$$=21y^2(5x^2-4y)^2+(2x+7y^3)(-40x^2+32y)$$

(c)　$z=\dfrac{(3x+11y)^3}{2x+6y}$

解 ☞ 利用除法法则和一般幂函数法则,

$$z_x=\frac{(2x+6y)[3(3x+11y)^2(3)]-(3x+11y)^3(2)}{(2x+6y)^2}$$
$$=\frac{(18x+54y)(3x+11y)^2-2(3x+11y)^3}{(2x+6y)^2}$$
$$z_y=\frac{(2x+6y)[3(3x+11y)^2(11)]-(3x+11y)^3(6)}{(2x+6y)^2}$$
$$=\frac{(66x+198y)(3x+11y)^2-6(3x+11y)^3}{(2x+6y)^2}$$

(d)　$z=\left(\dfrac{8x+7y}{5x+2y}\right)^2$

解 ☞ 利用一般幂函数法则和除法法则,

$$z_x=2\left(\frac{8x+7y}{5x+2y}\right)\left[\frac{(5x+2y)(8)-(8x+7y)(5)}{(5x+2y)^2}\right]$$
$$=\frac{16x+14y}{5x+2y}\left[\frac{-19y}{(5x+2y)^2}\right]=\frac{-(266y^2+304xy)}{(5x+2y)^3}$$

及
$$z_y=2\left(\frac{8x+7y}{5x+2y}\right)\left[\frac{(5x+2y)(7)-(8x+7y)(2)}{(5x+2y)^2}\right]$$
$$=\frac{16x+14y}{5x+2y}\left[\frac{19x}{(5x+2y)^2}\right]=\frac{304x^2+266xy}{(5x+2y)^3}$$

二阶偏导数

5.6　求下列函数的二阶直接偏导数 z_{xx} 和 z_{yy}:

(a)　$z=x^2+2xy+y^2$

解 ☞

$$z_x=2x+2y \qquad z_y=2x+2y$$
$$z_{xx}=2 \qquad z_{yy}=2$$

(b)　$z = x^3 - 9xy - 3y^3$

解 ☞　$z_x = 3x^2 - 9y$　　$z_y = -9x - 9y^2$

$z_{xx} = 6x$　　$z_{yy} = -18y$

(c)　$z = 2xy^4 + 7x^3y$

解 ☞　$z_x = 2y^4 + 21x^2y$　　$z_y = 8xy^3 + 7x^3$

$z_{xx} = 42xy$　　$z_{yy} = 24xy^2$

(d)　$z = x^4 + x^3y^2 - 3xy^3 - 2y^3$

解 ☞　$z_x = 4x^3 - 3x^2y^2 - 3y^3$　　$z_y = 2x^3y - 9xy^2 - 6y^2$

$z_{xx} = 12x^2 + 6xy^2$　　$z_{yy} = 2x^3 - 18xy - 12y$

(e)　$z = (12x - 7y)^2$

解 ☞　$z_x = 2(12r - 7y)(12)$　　$z_y = 2(12x - 7y)(-7)$

$= 288x - 168y$　　$= -168x + 98y$

$z_{xx} = 288$　　$z_{yy} = 98$

(f)　$z = (7x + 3y)^3$

解 ☞　$z_x = 3(7x + 3y)^2(7)$　　$z_y = 3(7x + 3y)^2(3)$

$= 21(7x + 3y)^2$　　$= 9(7x + 3y)^2$

$z_{xx} = 42(7x + 3y)(7)$　　$z_{yy} = 18(7x + 3y)(3)$

$= 2058x + 882y$　　$= 378x + 162y$

(g)　$z = (x^2 + 2y)^4$

解 ☞　$z_x = 4(x^2 + 2y)^3(2x) = 8x(x^2 + 2y)^3$　　$z_y = 4(x^2 + 2y)^3(2) = 8(x^2 + 2y)^3$

* $z_{xx} = 8x[3(x^2 + 2y)^2(2x)] + (x^2 + 2y)^3(8)$　　$z_{yy} = 24(x^2 + 2y)^2(2) = 48(x^2 + 2y)^2$

$= 48x^2(x^2 + 2y)^2 + 8(x^2 + 2y)^3$

5.7　求下列函数的交叉偏导数：

(a)　$z = 3x^2 + 12xy + 5y^2$

解 ☞　$z_x = 6x + 12y$　　$z_y = 12x + 10y$

$z_{xy} = 12$　　$z_{yx} = 12$

(b)　$z = x^3 - xy - 2y^3$

解 ☞　$z_x = 3x^2 - y$　　$z_y = -x - 6y^2$

$z_{xy} = -1$　　$z_{yx} = -1$

(c)　$z = 8x^2y - 11xy^3$

解 ☞　$z_x = 16xy - 11y^3$　　$z_y = 8x^2 - 33xy^2$

$z_{xy} = 16x - 33y^2$　　$z_{yx} = 16x - 33y^2$

(d)　$z = (8x - 4y)^5$

解 ☞　$z_x = 5(8x - 4y)^4(8)$　　$z_y = 5(8x - 4y)^4(-4)$

$= 40(8x - 4y)^4$　　$= -20(8x - 4y)^4$

$z_{xy} = 160(8x - 4y)^3(-4)$　　$z_{yx} = -80(8x - 4y)^3(8)$

$= -640(8x - 4y)^3$　　$= -640(8x - 4y)^3$

通过上面(a)–(d)的求导过程，我们发现这里的交叉偏导数与求导的先后顺序无关，这与 Young 定理恰好一致.

5.8　求下列函数的一阶和二阶直接偏导数：

* 根据乘积法则.

(a)　$z = x^{0.4}y^{0.6}$

解 ☞　$z_x = 0.4x^{-0.6}y^{0.6}$　　$z_y = 0.6x^{0.4}y^{-0.4}$

$z_{xx} = -0.24x^{-1.6}y^{0.6}$　　$z_{yy} = -0.24x^{0.4}y^{-1.4}$

(b)　$f(x, y) = x^{0.7}y^{0.2}$

解 ☞　$f_x = 0.7x^{-0.3}y^{0.2}$　　$f_y = 0.2x^{0.7}y^{-0.8}$

$f_{xx} = -0.21x^{-1.3}y^{0.2}$　　$f_{yy} = -0.16x^{0.7}y^{-1.8}$

(c)　$z = 2w^6x^5y^3$

解 ☞　$z_w = 12w^5x^5y^3$　　$z_x = 10w^6x^4y^3$　　$z_y = 6w^6x^5y^2$

$z_{ww} = 60w^4x^5y^3$　　$z_{xx} = 40w^6x^3y^3$　　$z_{yy} = 12w^6x^5y$

(d)　$f(x, y, z) = 10x^3y^2z^4$

解 ☞　$f_x = 30x^2y^2z^4$　　$f_y = 20x^3yz^4$　　$f_z = 40x^3y^2z^3$

$f_{xx} = 60xy^2z^4$　　$f_{yy} = 20x^3z^4$　　$f_{zz} = 120x^3y^2z^2$

5.9　求下列函数的交叉偏导数：

(a)　$z = x^{0.3}y^{0.5}$

解 ☞　$z_x = 0.3x^{-0.7}y^{0.5}$　　$z_y = 0.5x^{0.3}y^{-0.5}$

$z_{xy} = 0.15x^{-0.7}y^{-0.5}$　　$z_{yx} = 0.15x^{-0.7}y^{-0.5}$

(b)　$f(x, y) = x^{0.1}y^{0.8}$

解 ☞　$f_x = 0.1x^{-0.9}y^{0.8}$　　$f_y = 0.8x^{0.1}y^{-0.2}$

$f_{xy} = 0.08x^{-0.9}y^{-0.2}$　　$f_{yx} = 0.08x^{-0.9}y^{-0.2}$

(c)　$z = w^3x^4y^3$

解 ☞　$z_w = 3w^2x^4y^3$　　$z_x = 4w^3x^3y^3$　　$z_y = 3w^3x^4y^2$

$z_{wx} = 12w^2x^3y^3$　　$z_{xw} = 12w^2x^3y^3$　　$z_{yw} = 9w^2x^4y^2$

$z_{wy} = 9w^2x^4y^2$　　$z_{xy} = 12w^3x^3y^2$　　$z_{yx} = 12w^3x^3y^2$

(d)　$f(x, y, z) = x^3y^{-4}z^{-5}$

解 ☞　$f_x = 3x^2y^{-4}z^{-5}$　　$f_y = -4x^3y^{-5}z^{-5}$　　$f_z = -5x^3y^{-4}z^{-6}$

$f_{xy} = -12x^2y^{-5}z^{-5}$　　$f_{yx} = -12x^2y^{-5}z^{-5}$　　$f_{zx} = -15x^2y^{-4}z^{-6}$

$f_{xz} = -15x^2y^{-4}z^{-6}$　　$f_{yz} = 20x^3y^{-5}z^{-6}$　　$f_{zy} = 20x^3y^{-5}z^{-6}$

注意　young 定理在(c) $z_{wx} = z_{xw}$, $z_{yw} = z_{wy}$, $z_{xy} = z_{yx}$和(d) $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zy}$中的体现.

多元函数的优化问题

5.10　对下列二次函数,(1) 求函数可能达到极值的驻点,(2) 判断函数在驻点处是取得极大值、极小值、拐点还是鞍点.

(a)　$z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 12$

解 ☞ (1)　利用 1.4 节的方法,求一阶偏导数,令其等于零,并联立求解.

$$z_x = 6x - y - 4 = 0 \tag{5.15}$$

$$z_y = -x + 4y - 7 = 0 \tag{5.16}$$

$x = 1 \quad y = 2 \quad (1,2)$　驻点

(2)　由(5.15)和(5.16)求二阶直接偏导数,求其在驻点的值,并检验其符号.

$z_{xx} = 6$　　$z_{yy} = 4$

$z_{xx}(1,2) = 6 > 0$　　$z_{yy}(1,2) = 4 > 0$

由于二阶直接偏导数恒正,函数可能取得全局最小值.由(5.15)或(5.16)求交叉偏导数,

$$z_{xy} = -1 = z_{yx}$$

求其在驻点的值,并检验三阶条件:

$$z_{xy}(1,2) = -1 = z_{yx}(1,2)$$
$$z_{xx}(1,2) \cdot z_{yy}(1,2) > [z_{xy}(1,2)]^2$$
$$6 \cdot 4 > (-1)^2$$

由于 $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$ 和 $z_{xx}, z_{yy} > 0$,函数在(1,2)处取得全局最小值.

(b)　$f(x,y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$

解　☞ (1)　求一阶偏导数,令其等于零,并求解.

$$f_x = 60 - 4y - 12x = 0 \tag{5.17}$$
$$f_y = 34 - 6y - 4x = 0 \tag{5.18}$$
$$x = 4 \quad y = 3 \quad (4,3) \quad 驻点$$

(2)　求二阶直接偏导数,求其在驻点的值并检查符号.

$$f_{xx} = -12 \qquad f_{yy} = -6$$
$$f_{xx}(4,3) = -12 < 0 \qquad f_{yy}(4,3) = -6 < 0$$

由(5.17)或(5.18)求交叉偏导数,

$$f_{xy} = -4 = f_{yx}$$

求其在驻点的值并验证三阶条件:

$$f_{xy}(4,3) = -4 = f_{yx}(4,3)$$
$$f_{xx}(4,3) \cdot f_{yy}(4,3) > [f_{xy}(4,3)]^2$$
$$-12 \cdot -6 > (-4)^2$$

由于 $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$ 和 $f_{xx}, f_{yy} < 0$,函数在(4,3)处取得全局最大值.

(c)　$z = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$

解　☞ (1)

$$z_x = -6x - 6y + 72 = 0$$
$$z_y = -6x - 4y + 48 = 0$$
$$x = 0 \quad y = 12 \quad (0,12) \quad 驻点$$

(2)　求驻点处的二阶直接偏导数.

$$z_{xx} = -6 \qquad z_{yy} = -4$$
$$z_{xx}(0,12) = -6 < 0 \qquad z_{yy}(0,12) = -4 < 0$$

由于 z_{xx} 和 z_{yy} 对所有的值均为负,函数可能取得全局最大值.为得到证实,进一步检验交叉偏导数.

$$z_{xy} = -6 = z_{yx}$$
$$z_{xy}(0,12) = -6 = z_{yx}(0,12)$$
$$z_{xx}(0,12) \cdot z_{yy}(0,12) > [z_{xy}(0,12)]^2$$
$$-6 \cdot -4 < (-6)^2$$

由于 z_{xx} 和 z_{yy} 符号相同且 $z_{xx}z_{yy} < (z_{xy})^2$,函数在(0,12)处达到拐点.

(d)　$f(x,y) = 5x^2 - 3y^2 - 30x + 7y + 4xy$

解　☞ (1)

$$f_x = 10x + 4y - 30 = 0$$
$$f_y = 4x - 6y + 7 = 0$$
$$x = 2 \quad y = 2.5 \quad (2, 2.5) \quad 驻点$$

(2)

$$f_{xx} = 10 \qquad f_{yy} = -6$$
$$f_{xx}(2,2.5) = 10 > 0 \qquad f_{yy}(2,2.5) = -6 < 0$$

检验交叉偏导数,

$$f_{xy} = 4 = f_{yx}$$
$$f_{xx}(2,2.5) \cdot f_{yy}(2,2.5) > [f_{xy}(2,2.5)]^2$$
$$10 \cdot -6 < 4^2$$

只要 f_{xx} 和 f_{yy} 异号,$f_{xx}f_{yy}$ 就不可能大于 $(f_{xy})^2$,则函数将达到鞍点.

5.11　对于下列三次函数,(1) 求解驻点,(2) 判断函数在驻点处是取得极大值、极小值、拐点

还是鞍点.

(a) $z(x,y)=3x^3-5y^2-225x+70y+23$

解 ☞ (1) 求一阶偏导数并令其等于零.

$$z_x=9x^2-225=0 \tag{5.19}$$

$$z_y=-10y+70=0 \tag{5.20}$$

求解驻点.

$$9x^2=225 \qquad -10y=-70$$

$$x^2=25 \qquad y=7$$

$$x=\pm 5$$

$$(5,7) \qquad (-5,7) \qquad \text{驻点}$$

(2) 由(5.19)和(5.20)求二阶直接偏导数,

$$z_{xx}=18x \qquad z_{yy}=-10$$

求其在驻点处的值并注明符号.

$$z_{xx}(5,7)=18(5)=90>0 \qquad z_{yy}(5,7)=-10<0$$

$$z_{xx}(-5,7)=18(-5)=-90<0 \qquad z_{yy}(-5,7)=-10<0$$

再由(5.19)或(5.20)求交叉偏导数,

$$z_{xy}=0=z_{yx}$$

求其在驻点的值并检验三阶条件.

$$z_{xx}(a,b)\cdot z_{yy}(a,b)>[z_{xy}(a,b)]^2$$

在点(5,7), $\quad 90\cdot -10<0$

在点(-5,7), $\quad -90\cdot -10>0$

由于在(-5,7)处有 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$ 和 $z_{xx},z_{yy}<0$ 成立, $z(-5,7)$是极大值. 由于在(5,7)处有 $z_{xx}z_{yy}<(z_{xy})^2$ 且 z_{xx}和 z_{yy}异号, 则 $z(5,7)$是鞍点.

(b) $f(x,y)=3x^3+1.5y^2-18xy+17$

解 ☞ (1) 求一阶偏导数并令其等于零.

$$f_x=9x^2-18y=0 \tag{5.21}$$

$$f_y=3y-18x=0 \tag{5.22}$$

求解驻点.

$$18y=9x^2 \qquad 3y=18x$$

$$y=\frac{1}{2}x^2 \qquad y=6x \tag{5.23}$$

令两个 y 的表达式相等,

$$\frac{1}{2}x^2=6x$$

$$x^2-12x=0$$

$$x(x-12)=0$$

$$x=0 \qquad x=12$$

将 $x=0$ 和 $x=12$ 代入(5.23)的 $y=6x$ 中,

$$y=6(0)=0$$

$$y=6(12)=72$$

所以

$$(0,0),(12,72)\text{为驻点.}$$

(2) 由(5.21)和(5.22)求二阶偏导数,

$$f_{xx}=18x \qquad f_{yy}=3$$

求其在驻点的值并注明符号,

$$f_{xx}(0,0)=18(0)=0 \qquad f_{yy}(0,0)=3>0$$

$$f_{xx}(12,72)=18(12)=216>0 \qquad f_{yy}(12,72)=3>0$$

再由(5.21)或(5.22)求交叉偏导数,

$$f_{xy}=-18=f_{yx}$$

求其在驻点的值,并检验三阶条件.

$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)>[f_{xy}(a,b)]^2$$

在点(0,0)， $0\cdot 3<(-18)^2$

在点(12,72)， $216\cdot 3>(-18)^2$

$$648>324$$

由于在(12,72)处有 $f_{xx}f_{yy}>(f_{xy})^2$ 和 $f_{xx},f_{yy}>0$ 成立，$f(12,72)$是极小值. 由于在(0,0)处有 $f_{xx}f_{yy}<(f_{xy})^2$ 成立且 f_{xx}和 f_{yy}符号相同，则 $f(0,0)$是拐点.

(c) $f=3x^3-9xy+3y^3$

解 ☞ (1)

$$f_x=9x^2-9y=0 \tag{5.24}$$

$$f_y=9y^2-9x=0 \tag{5.25}$$

由(5.24)， $9y=9x^2 \qquad y=x^2$

将 $y=x^2$ 代入(5.25)，

$$9(x^2)^2-9x=0$$

$$9x^4-9x=0$$

$$9x(x^3-1)=0$$

$$9x=0 \qquad 或 \qquad x^3-1=0$$

$$x=0 \qquad\qquad x^3=1$$

$$x=1$$

将 x 的值代入(5.24)，当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x=1$ 时，$y=1$.

所以

$$(0,0) \quad (1,1) \qquad 驻点$$

(2) 由(5.24)和(5.25)验证二条件，

$$f_{xx}=18x \qquad f_{yy}=18y$$

$$f_{xx}(0,0)=18(0)=0 \qquad f_{yy}(0,0)=18(0)=0$$

$$f_{xx}(1,1)=18(1)=18>0 \qquad f_{yy}(1,1)=18(1)=18>0$$

$$f_{xy}=-9=f_{yx}$$

$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)>[f_{xy}(a,b)]^2$$

在点(0,0)， $0\cdot 0<(-9)^2$

在点(1,1)， $18\cdot 18>(-9)^2$

由于在(1,1)处 f_{xx}和 f_{yy}都大于零且有 $f_{xx}f_{yy}>(f_{xy})^2$ 成立，则函数在(1,1)处取得极小值. 由于在(0,0)处，f_{xx}和 f_{yy}同号且有 $f_{xx}f_{yy}<(f_{xy})^2$ 成立，则函数在(0,0)处是拐点.

(d) $f(x,y)=x^3-6x^2+2y^3+9y^2-63x-60y$

解 ☞ (1)

$$f_x=3x^2-12x-63=0 \qquad f_y=6y^2+18y-60=0 \tag{5.26}$$

$$3(x^2-4x-21)=0 \qquad 6(y^2+3y-10)=0$$

$$(x+3)(x-7)=0 \qquad (y-2)(y+5)=0$$

$$x=-3 \quad x=7 \qquad y=2 \quad y=-5$$

所以(−3,2) (−3,−5) (7,2) (7,−5)是驻点.

(2) 由(5.26)，求二阶直接偏导数，并检查在驻点处的情况.

$$f_{xx}=6x-12 \qquad f_{yy}=12y+18$$

(i) $f_{xx}(-3,2)=-30<0$ $\qquad f_{yy}(-3,2)=42>0$

(ii) $f_{xx}(-3,-5)=-30<0$ $\qquad f_{yy}(-3,-5)=-42<0$

(iii) $f_{xx}(7,2)=30>0$ $\qquad f_{yy}(7,2)=42>0$

(iv) $f_{xx}(7,-5)=30>0$ $\qquad f_{yy}(7,-5)=-42<0$

由于在(i)和(iv)中的二阶直接偏导数异号，(−3,2)和(7,−5)可以不必考虑，因为它们是鞍点. 现在由(5.26)求交叉偏导数，并验证三阶条件：

$$f_{xy}=0=f_{yx}$$

$$f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b)>[f_{xy}(a,b)]^2$$

由(ii)， $(-30)\cdot(-42)>(0)^2$

由(iii)， $(30)\cdot(42)>(0)^2$

函数在点$(-3,-5)$得到极大值,在点$(7,2)$取得极小值,$(-3,2)$和$(7,-5)$是鞍点.

带约束的极值与拉格朗日乘子

5.12 (1)利用拉格朗日乘子,求下列函数满足约束的极值,(2)估计约束常数一单位的变化对目标函数的影响.

(a) $z=4x^2-2xy+6y^2$ 使得 $x+y=72$

解 ☞ (1) 令约束等于零,乘上 λ 并与目标函数相加,得到

$$Z=4x^2-2xy+6y^2+\lambda(72-x-y)$$

一阶条件为

$$Z_x=8x-2y-\lambda=0 \tag{5.27}$$

$$Z_y=-2x+12y-\lambda=0 \tag{5.28}$$

$$Z_\lambda=72-x-y=0 \tag{5.29}$$

从(5.27)中减去(5.28)消去 λ.

$$10x-14y=0 \quad x=1.4y$$

将 $x=4y$ 代入(5.29)并整理.

$$1.4y+y=72 \quad y_0=30$$

将 $y_0=30$ 代入前面的方程以求出驻点

$$x_0=42 \quad y_0=30 \quad \lambda_0=276$$

所以 $Z=4(42)^2-2(42)(30)+6(30)^2-276(72-42-30)=9936.$

(2) 由于 $\lambda=276$,则一个单位约束常数的增加会导致目标函数的值增加大约 276 个单位. $Z\approx 10,212$.

(b) $f(x,y)=26x-3x^2+5xy-6y^2+12y$ 约束条件 $3x+y=170$

解 ☞ (1) 拉格朗日函数为

$$F=26x-3x^2+5xy-6y^2+12y+\lambda(170-3x-y)$$

所以

$$F_x=26-6x+5y-3\lambda=0 \tag{5.30}$$

$$F_y=5x-12y+12-\lambda=0 \tag{5.31}$$

$$F_\lambda=170-3x-y=0 \tag{5.32}$$

用 3 乘以(5.31)并从(5.30)中减去该方程以消去 λ.

$$-21x+41y-10=0 \tag{5.33}$$

用 7 乘以(5.23)并从(5.33)中减去该方程以消去 x.

$$48y-1200=0 \quad y_0=25$$

再将 $y_0=25$ 代入前面的方程,得到驻点

$$x_0=\frac{145}{3}=48\frac{1}{3} \quad y_0=25 \quad \lambda_0=\frac{-139}{3}=-46\frac{1}{3}$$

从而 $F=-3160.$

(2) 由于 $\lambda=-46\frac{1}{3}$,所以增加一个单位的约束常数将会导致目标函数大约减少 $46\frac{1}{3}$ 个单位.且有 $F\approx-3206.33$.

(c) $f(x,y,z)=4xyz^2$ 使得 $x+y+z=56$

解 ☞ (1)

$$F=4xyz^2+\lambda(56-x-y-z)$$

$$F_x=4yz^2-\lambda=0 \tag{5.34}$$

$$F_y=4xz^2-\lambda=0 \tag{5.35}$$

$$F_z=8xyz-\lambda=0 \tag{5.36}$$

$$F_\lambda=56-x-y-z=0 \tag{5.37}$$

由(5.34)和(5.35)解出 λ,得到方程,

$$4yz^2=4xz^2 \quad y=x$$

由(5.34)和(5.36)解出 λ,得到方程

$$4yz^2 = 8xyz \quad z = 2x$$

将 $y=x$, $z=2x$ 代入(5.37).

$$56 - x - x - 2x = 0 \quad 4x = 56 \quad x_0 = 14$$

再将 $x_0=14$ 代入上述方程,有

$$x_0 = 14 \quad y_0 = 14 \quad z_0 = 28 \quad \lambda_0 = 43\,904$$

$$F_0 = 614\,656$$

(2)
$$F_1 \approx F_0 + \lambda_2 \approx 614\,656 + 43\,904 \approx 658\,560$$

关于二阶条件请见问题 12.28.

(d)　$f(x,y,z)=5xy+8xz+3yz$ 使得 $2xyz=1920$

解 ☞ (1)
$$F = 5xy + 8xz + 3yz + \lambda(1920 - 2xyz)$$

$$F_x = 5y + 8z - 2\lambda yz = 0 \tag{5.38}$$

$$F_y = 5x + 3z - 2\lambda xz = 0 \tag{5.39}$$

$$F_z = 8x + 3y - 2\lambda xy = 0 \tag{5.40}$$

$$F_\lambda = 1920 - 2xyz = 0 \tag{5.41}$$

求解(5.38)、(5.39)和(5.40),得到

$$\lambda = \frac{5y+8z}{2yz} = \frac{2.5}{z} + \frac{4}{y} \tag{5.42}$$

$$\lambda = \frac{5x+3z}{2xz} = \frac{2.5}{z} + \frac{1.5}{x} \tag{5.43}$$

$$\lambda = \frac{8x+3y}{2xy} = \frac{4}{y} + \frac{1.5}{x} \tag{5.44}$$

令(5.42)、(5.43)中的 λ 相等并消去 $2.5/z$,

$$\frac{4}{y} = \frac{1.5}{x} \quad 4x = 1.5y \quad x = \frac{1.5}{4}y$$

令(5.43)、(5.44)中的 λ 相等并消去 $1.5/x$,

$$\frac{2.5}{z} = \frac{4}{y} \quad 4z = 2.5y \quad z = \frac{2.5}{4}y$$

再将 $x=(1.5/4)y$ 和 $z=(2.5/4)y$ 代入(5.41).

$$1920 = 2 \cdot \left(\frac{1.5}{4}y\right) \cdot y \cdot \left(\frac{2.5}{4}y\right)$$

$$y^3 = 1920 \cdot \frac{16}{7.5} = 4096$$

$$y_0 = 16$$

则驻点为

$$x_0 = 6,\ y_0 = 16,\ z_0 = 10,\text{及 } \lambda_0 = 0.5.$$

$$F_0 = 1440$$

(2)
$$F_1 \approx F_0 + \lambda_0 \approx 1440 + 0.5 \approx 1440.5$$

5.13　我们曾在问题 5.12(a)中估算了:当约束常数增加一个单位时,带约束的最优值将近似地增加 276 个单位,即 Z 由 9936 近似地增至 10 212. 为了检测一下估算的精确程度,求原函数 $z=4x^2-2xy+6y^2$ 满足新的约束 $x+y=73$ 的极值.

解 ☞
$$Z = 4x^2 - 2xy + 6y^2 + \lambda(73 - x - y)$$

$$Z_x = 8x - 2y - \lambda = 0$$

$$Z_y = -2x + 12y - \lambda = 0$$

$$Z_\lambda = 73 - x - y = 0$$

联立求解得,$x_0=42.58$, $y_0=30.42$, $\lambda_0=279.8$. 从而 $Z_0=10\,213.9$, 与由 λ 估算的 10 212 相比,相差了 1.9 个单位或 0.02%.

5.14　约束也可以被用来保证两个自变量始终保持固定的比例,在这种情形中,没有任何经济意义,这是因为此时如果增加约束常数一个单位,则会改变自变量的固定比例关系.

在求带有固定比例关系的约束极值时，要特别注意这一点.

(a) $z=4x^2-3x+5xy-8y+2y^2$ 使得 $x=2y$

解 ☞ 由于 $x-2y=0$，拉格朗日函数为

$$Z=4x^2-3x+5xy-8y+2y^2+\lambda(x-2y)$$

$$Z_x=8x-3+5y+\lambda=0$$

$$Z_y=5x-8+4y-2\lambda=0$$

$$Z_\lambda=x-2y=0$$

联立求解得，$x_0=0.5, y_0=0.25$，和 $\lambda_0=-2.25$. 从而 $Z_0=-1.75$.

(b) $z=-5x^2+7x+10xy+9y-2y^2$ 使得 $y=5x$

解 ☞ 拉格朗日函数为 $Z=-5x^2+7x+10xy+9y-2y^2+\lambda(5x-y)$

$$Z_x=-10x+7+10y+5\lambda=0$$

$$Z_y=10x+9-4y-\lambda=0$$

$$Z_\lambda=5x-y=0$$

联立求解得，$x_0=5.2, y_0=26$，和 $\lambda_0=-43$. 从而 $Z_0=135.2$.

见问题 12.19～12.28.

微分

5.15 求下列函数的微分 dy：

(a) $y=7x^3-5x^2+6x-3$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=21x^2-10x+6$

所以 $dy=(21x^2-10x+6)dx$

(b) $y=(4x+3)(3x-8)$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=(4x+3)(3)+(3x-8)(4)=24x-23$

所以 $dy=(24x-23)dx$

(c) $y=\frac{9x-4}{5x}$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{5x(9)-(9x-4)(5)}{(5x)^2}=\frac{20}{25x^2}$

$dy=\frac{4}{5x^2}dx$

(d) $y=(11x+9)^3$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=3(11x+9)^2(11)$

$dy=33(11x+9)^2dx$

5.16 求下列函数的全微分 $dz=z_x\,dx+z_y dy$：

(a) $z=5x^3-12xy-6y^5$

解 ☞

$$z_x=15x^2-12y \qquad z_y=-12x-30y^4$$

$$dz=(15x^2-12y)dx-(12x+30y^4)dy$$

(b) $z=7x^2y^3$

解 ☞

$$z_x=14xy^3 \qquad z_y=21x^2y^2$$

$$dz=14xy^3dx+21x^2y^2dy$$

(c) $z=3x^2(8x-7y)$

解 ☞

$$z_x=3x^2(8)+(8x-7y)(6x) \qquad z_y=3x^2(-7)+(8x-7y)(0)$$

$$dz=(72x^2-42xy)dx-21x^2dy$$

(d) $z=(5x^2+7y)(2x-4y^3)$

解 ☞ $z_x=(5x^2+7y)(2)+(2x-4y^3)(10x)\quad z_y=(5x^2+7y)(-12y^2)+(2x-4y^3)(7)$

$$dz=(30x^2-40xy^3+14y)dx-(112y^3+60x^2y^2-14x)dy$$

(e) $z=\dfrac{9y^3}{x-y}$

解 ☞ $z_x=\dfrac{(x-y)(0)-9y^3(1)}{(x-y)^2}\qquad z_y=\dfrac{(x-y)(27y^2)-9y^3(-1)}{(x-y)^2}$

$$dz=\frac{-9y^3}{(x-y)^2}dx+\frac{27xy^2-18y^3}{(x-y)^2}dy$$

(f) $z=(x-3y)^3$

解 ☞ $z_x=3(x-3y)^2(1)\quad z_y=3(x\quad 3y)^2(-3)$

$$dz=3(x-3y)dx-9(x-3y)^2dy$$

5.17 假设 $dy=0$,求问题 5.16 中给定的函数关于 x 的很小改变量的偏微分:

解 ☞ (a) $dz=(15x^2-12y)dx$　(b) $dz=14xy^3dx$　(c) $dz=(72x^2-42xy)dx$

(d) $dz=(30x^2-40xy^3+14y)dx$　(e) $dz=\dfrac{-9y^3}{(x-y)^2}dx$　(f) $dz=3(x-3y)^2dx$

全微分

5.18 求下列函数的全微分 dz/dx:

(a) $z=6x^2+15xy+3y^2$　其中 $y=7x$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dx}=z_x+z_y\dfrac{dy}{dx}=(12x+15y)+(15x+6y)(14x)=210x^2+84xy+12x+15y$

(b) $z=(13x-18y)^2$　其中 $y=x+6$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dx}=z_x+z_y\dfrac{dy}{dx}=26(13x-18y)-36(13x-18y)(1)=-10(13x-18y)$

(c) $z=\dfrac{9x-7y}{2x+5y}$　其中 $y=3x-4$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dx}=z_x+z_y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{59y}{(2x+5y)^2}-\dfrac{59x}{(2x+5y)^2}(3)=\dfrac{59(y-3x)}{(2x+5y)^2}$

(d) $z=8x-12y$　其中 $y=(x+1)/x^2$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dx}=z_x+z_y\dfrac{dy}{dx}=8-\dfrac{12(-x^2-2x)}{x^4}=8+\dfrac{12(x+2)}{x^3}$

5.19 求下列函数全微分 dz/dw:

(a) $z=7x^2+4y^2$　其中 $x=5w,y=4w$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dw}=z_x\dfrac{dx}{dw}+z_y\dfrac{dy}{dw}=14x(5)+8y(4)=70x+32y$

(b) $z=10x^2-6xy-12y^2$　其中 $x=2w,y=3w$

解 ☞ $\dfrac{dz}{dw}=z_x\dfrac{dx}{dw}+z_y\dfrac{dy}{dw}=(20x-6y)(2)+(-6x-24y)(3)=22x-84y$

隐函数和反函数法则

5.20 求下列函数的导数 dy/dx 和 dx/dy:

(a) $y-6x+7=0$

解 ☞ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-f_x}{f_y}=\dfrac{-(-6)}{1}=6\qquad \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-f_y}{f_x}=\dfrac{-(1)}{-6}=\dfrac{1}{6}$

(b) $3y-12x+17=0$

解 ☞ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-f_x}{f_y}=\dfrac{-(-12)}{3}=4\qquad \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-f_y}{f_x}=\dfrac{-(3)}{-12}=\dfrac{1}{4}$

(c) $x^2+6x-13-y=0$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=\frac{-(2x+6)}{-1}=2x+6$ $\quad\frac{dx}{dy}=\frac{-f_y}{f_x}=\frac{-(-1)}{2x-6}=\frac{1}{2x+6}$ $(x\neq-3)$

注意到在上面的例子中,都有这样的结论:一个导数是另一个导数的倒数.

5.21 利用隐函数的法则求 dy/dx 和 dy/dz.

(a) $f(x,y)=3x^2+2xy+4y^3$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=-\frac{6x+2y}{12y^2+2x}$

(b) $f(x,y)=12x^5-2y$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=\frac{-60x^4}{-2}=30x^4$

(c) $f(x,y)=7x^2+2xy^2+9y^4$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=-\frac{14x+2y^2}{36y^3+4xy}$

(d) $f(x,y)=6x^3-5y$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=\frac{18x^2}{-5}=3.6x^2$

(e) $f(x,y,z)=x^2y^3+z^2+xyz$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=-\frac{2xy^3+yz}{3x^2y^2+xz}$

$\frac{dy}{dz}=\frac{-f_z}{f_y}=-\frac{2z+xy}{3x^2y^2+xz}$

(f) $f(x,y,z)=x^3z^2+y^3+4xyz$

解 ☞ $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}=-\frac{3x^2z^2+4yz}{3y^2+4xz}$

$\frac{dy}{dz}=\frac{-f_z}{f_y}=-\frac{2x^3z+4xy}{3y^2+4xz}$

5.22 求反函数的导数 dP/dQ.

(a) $Q=210-3P$

解 ☞ $\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{dQ/dP}=-\frac{1}{3}$

(b) $Q=35-0.25P$

解 ☞ $\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{-0.25}=-4$

(c) $Q=14+P^2$

解 ☞ $\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{2P}$ $(P\neq0)$

(d) $Q=P^3+2P^2+7P$

解 ☞ $\frac{dP}{dQ}=\frac{1}{3P^2+4P+7}$

法则的证明

5.23 对于下列函数,通过(1)用(5.1a)中的定义;(2)用(5.1b)中的定义来证明微分法则.

(a) $z=38+7x-4y$

证 ☞ (1) 由(5.1a), $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

代入, $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[38+7(x+\Delta x)-4y]-(38+7x-4y)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{38+7x+7\Delta x-4y-38-7x+4y}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{7\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}7=7$

(2) 由(5.1b), $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

代入, $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{[38+7x-4(y+\Delta y)]-(38+7x-4y)}{\Delta y}$

$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{38+7x-4y-4\Delta y-38-7x+4y}{\Delta y}$

$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{-4\Delta y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}(-4)=-4$

(b) $z=18x-5xy+14y$

证 ☞ (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[18(x+\Delta x)-5(x-\Delta x)y+14y]-(18x-5xy+14y)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{18x+18\Delta x-5xy-5\Delta xy+14y-18x+5xy-14y}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{18\Delta x-5\Delta xy}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(18-5y)=18-5y$

(2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{[18x-5x(y+\Delta y)+14(y+\Delta y)]-(18x-5xy+14y)}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{18x-5xy-5x\Delta y+14y+14\Delta y-18x+5xy-14y}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{-5x\Delta y+14\Delta y}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}(-5x+14)=-5x+14$

(c) $z=3x^2y$

证 ☞ (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[3(x+\Delta x)^2y]-3x^2y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2y+6x\Delta xy-3(\Delta x)^2y-3x^2y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta xy+3(\Delta x)^2y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6xy+3\Delta xy)=6xy$

(2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{[3x^2(\ \ +\Delta y)]-3x^2y}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{3x^2y+3x^2\Delta y-3x^2y}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{3x^2\Delta y}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}3x^2=3x^2$

(d) $z=4x^2y^2$

证 ☞ (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[4(x+\Delta x)^2y^2]-4x^2y^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{4x^2y^2+8x\Delta xy^2+4(\Delta x)^2y^2-4x^2y^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{8x\Delta xy^2+4(\Delta x)^2y^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8xy^2+4\Delta xy^2)=8xy^2$

(2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{[4x^2(y+\Delta y)^2]-4x^2y^2}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{4x^2y^2+8x^2y\Delta y+4x^2(\Delta y)^2-4x^2y^2}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{8x^2y\Delta y+4x^2(\Delta y)^2}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}(8x^2y+4x^2\Delta y)=8x^2y$

第六章　经济中的多元函数微积分

6.1　边际产品

资本边际产品(MP_K)定义为:当所有其他生产要素都保持不变时,资本的很小改变所引起的产出量的变化.已知生产函数:

$$Q = 36KL - 2K^2 - 3L^2$$

对其求关于 k 的偏导数$\partial Q/\partial K$ 即可得到 MP_K.所以,

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 36L - 4K$$

对于劳动,类似地有,$MP_L = \partial Q/\partial L = 36K - 6L$.见问题 6.1~6.3.

6.2　收入决定乘子和比较静态

偏导数在推导收入决定模型的各种乘子中也有应用.在内生变量的均衡水平如何随着外生变量或参数的变化而变化的问题中,收入决定乘子起着重要的作用,我们称该研究方法为比较静态分析,或简称为比较静态.在第十三章中将给出更详细的研究.

给定

$$Y = C + I + G + (X - Z)$$

其中

$$C = C_0 + bY \qquad G = G_0 \qquad Z = Z_0$$

$$I = I_0 + aY \qquad X = X_0$$

正如问题 2.19 一样,用简单替代,得到收入的均衡水平.

$$\overline{Y} = \frac{1}{1-b-a}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0) \tag{6.1}$$

求出(6.1)的关于任意一个变量或参数的偏导数,便给出了那个变量的乘子.所以,政府乘子为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b-a}$$

输入乘子为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial Z_0} = -\frac{1}{1-b-a}$$

边际投资倾向的变化的乘子由$\partial \overline{Y}/\partial a$ 给出,由除法规则,

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial a} = \frac{(1-b-a)(0) - (C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)(-1)}{(1-b-a)^2} = \frac{C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0}{(1-b-a)^2}$$

或者也可表示为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial a} = \frac{1}{1-b-a}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0)\left(\frac{1}{1-b-a}\right)$$

又由(6.1)推得

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial a} = \frac{\overline{Y}}{1-b-a}$$

见问题 6.4 和 6.8.

6.3　需求的收入和交叉价格弹性

需求的收入弹性 ε_y 度量的是:当所有其他变量都保持不变时,收入的一个小单位的变化率所引起的一种商品的需求量的变化率.需求的交叉价格弹性度量的是:当所有其他变量都保

持不变时，一种商品的需求量对另外一种商品价格的变化所作出的相应反应. 已知需求函数

$$Q_1 = a - bP_1 + cP_2 + mY$$

其中 Y 表示收入、P_2 表示一种替代品的价格，需求的收入弹性为

$$\varepsilon_Y = \frac{\partial Q_1}{Q_1} \div \frac{\partial Y}{Y} = \frac{\partial Q_1}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q_1}\right)$$

需求的交叉弹性为

$$\varepsilon_c = \frac{\partial Q_1}{Q_1} \div \frac{\partial P_2}{P_2} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right)$$

见例 1 和例 2 及问题 6.18～6.21.

例 1　已知牛排的需求为

$$Q_b = 4850 - 5P_b + 1.5P_p + 0.1Y \tag{6.2}$$

其中 $Y = 10\,000$, $P_b = 200$ 及叉子的价格为 $P_p = 100$，下面给出牛排需求的(1)　收入弹性和(2)　交叉价格弹性.

解　☞ (1)

$$\varepsilon_Y = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial Y}{Y} = \frac{\partial Q_b}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q_b}\right) \tag{6.3}$$

由(6.2)，

$$\frac{\partial Q_b}{\partial Y} = 0.1$$

及

$$Q_b = 4850 - 5(200) + 1.5(100) + 0.1(10\,000) = 5000 \tag{6.4}$$

代入(6.3)，

$$\varepsilon_Y = 0.1(10\,000/5000) = 0.2.$$

由于 $\varepsilon_Y < 1$，该商品是收入缺乏弹性的. 对于给定的国民收入增长的百分比，该商品的需求会低于比例地随之增长. 这样一来随着经济的扩张，该商品的相对市场占有率将会下降. 既然需求的收入弹性意味着市场潜力的增长，所以该例中的潜力增长是有限的.

(2)

$$\varepsilon_c = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial P_p}{P_p} = \frac{\partial Q_b}{\partial P_p}\left(\frac{P_p}{Q_b}\right)$$

由(6.2)，$\partial Q_b/\partial P_p = 1.5$；由(6.4)，$Q_b = 5000$. 因此，

$$\varepsilon_c = 1.5\left(\frac{100}{5000}\right) = 0.03$$

对于像牛排和叉子一样的替代品，有$\partial Q_1/\partial P_2 > 0$，交叉价格弹性比为正. 对于互补品，有$\partial Q_1/\partial P_2 < 0$ 交叉价格弹性为负. 如果$\partial Q_1/\partial P_2 = 0$，则该两种商品不相关.

例 2　继续例 1，由于叉子价格上涨 10% 而引起牛排的需求量的变化率估算如下：

$$\varepsilon_c = \frac{\partial Q_b}{Q_b} \div \frac{\partial P_p}{P_p}$$

整理并代入已知的参数，

$$\frac{\partial Q_b}{Q_b} = \varepsilon_c \frac{\partial P_p}{P_p} = (0.03)(0.10) = 0.003$$

牛排需求的变化率$\partial Q_b/Q_b$ 为 0.3%.

6.4　微分和增量变化

在经济中，我们经常想度量一个自变量的变化(雇用的劳动量、使用的资本量、销售量)对

因变量(成本、收益、利润)的影响.如果当变化量是一个相对小的量时,微分即度量了该影响.所以,如果 $z=f(x,y)$, x 的很小改变量对 z 的影响由下面的微分给出,

$$dz = z_x dx$$

大些变化量的影响可由偏导数与给定的变化量之积来近似.所以,

$$\Delta z \approx z_x \Delta x$$

如果原函数 $z=f(x,y)$ 为线性的,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

变化的影响将被准确地度量为

$$\Delta z = z_x \Delta x$$

见例3、例4及6.9~6.17.

例3 厂商的成本与两种商品的产出 x 和 y 有关,函数关系是

$$TC = x^2 - 0.5xy + y^2$$

通过微分可得产出 x 的微小增量所引起的额外成本

$$dTC = (2x - 0.5y)dx$$

大些增量的成本近似等于关于 x 的偏导数与 x 的增量之积,即

$$\Delta TC \approx \frac{\partial TC}{\partial x}\Delta x \tag{6.5}$$

由于 $\partial TC/\partial x = MC_x$($x$ 的边际成本),上式也可写成

$$\Delta TC \approx MC_x \Delta x$$

如果初始值为 $x=100$, $y=60$, $\Delta x=3$,则

$$\Delta TC \approx [2(100) - 0.5(60)] \cong 510$$

例4 假设6.2节中的 $b=0.7$, $a=0.1$, $Y=1200$.于是可用微分来计算任一自变量的增量的影响.偏导数为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b-a}$$

偏微分为

$$d\overline{Y} = \frac{1}{1-b-a}dG_0$$

在线性模型中,斜率永远是常数,

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{\Delta \overline{Y}}{\Delta G_0}$$

$$\Delta \overline{Y} = \frac{1}{1-b-a}\Delta G_0$$

如果政府增加开支 \$100,则

$$\Delta \overline{Y} = \frac{1}{1-0.7-0.1}(100) = 500$$

6.5 经济学中多元函数的最优化

生产食品的厂商经常以不同的等级销售同种商品:优质的、标准的、经济的;一些厂商也采取这样策略:以它自己的品牌销售一部分产品,以一个大的连锁店的品牌销售另一部分产品.服装制造和设计商经常有一个顶极的品牌和为打折商店制造的廉价仿制品.在这些情形下,追求利润最大或成本最小必涉及多个变量.所以,多元函数极值的基本法则(见5.4节)在这里是必要的.见例5,例6和问题6.22~6.27.

例5 对于生产两种产品的厂商,利润函数为

$$\pi = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

为求利润最大化的两种商品的产出水平,验证利润确实取得最大:

1. 求一阶偏导数,令其等于零并联立求解 x,y.

$$\pi_x = 64 - 4x + 4y = 0 \tag{6.6}$$

$$\pi_y = 4x - 8y + 32 = 0 \tag{6.7}$$

求解得到,$\bar{x} = 40$, $\bar{y} = 24$.

2. 求二阶直接偏导数,并验证二者确实均为负值,因为这是极大值的必要条件.由(6.6)和(6.7)得,

$$\pi_{xx} = -4 \qquad \pi_{yy} = -8$$

3. 求交叉偏导数以验证确实有 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ 成立.由(6.6)和(6.7)得,$\pi_{xy} = 4 = \pi_{yx}$.所以,

$$\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$$

$$(-4)(-8) > (4)^2$$

$$32 > 16$$

在 $\bar{x} = 40$, $\bar{y} = 24$ 时,利润确实取得最大.此时 $\pi = 1650$.

例6　垄断竞争市场中的厂商为获得最大的利润,必须决定其产品的价格.假设该厂商以两种不同品牌提供一种商品,其需求函数分别为

$$Q_1 = 14 - 0.25P_1 \tag{6.8}$$

$$Q_2 = 24 - 0.5P_2 \tag{6.9}$$

联合成本函数为

$$\mathrm{TC} = Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2 \tag{6.10}$$

利润最大的产出水平、不同品牌的价格和利润如下决定:

首先,用 Q_1, Q_2 建立利润函数 π.由于 $\pi = \mathrm{TR}$(总收益) $-$ TC(总成本),而总收益为 $P_1Q_1 + P_2Q_2$,则该厂商的利润为

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - \mathrm{TC}$$

将(6.10)代入,

$$\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - (Q_1^2 + 5Q_1Q_2 + Q_2^2) \tag{6.11}$$

其次,通过以 Q 求解 P,确定(6.8)和(6.9)的反函数.所以,

由(6.8)有

$$P_1 = 56 - 4Q_1 \tag{6.12}$$

由(6.9),有

$$P_2 = 48 - 2Q_2 \tag{6.13}$$

代入(6.11),

$$\begin{aligned}\pi &= (56 - 4Q_1)Q_1 + (48 - 2Q_2)Q_2 - Q_1^2 - 5Q_1Q_2 - Q_2^2 \\ &= 56Q_1 - 5Q_1^2 + 48Q_2 - 3Q_2^2 - 5Q_1Q_2\end{aligned} \tag{6.14}$$

然后,用我们非常熟悉的法则求(6.14)的最大值:

$$\pi_1 = 56 - 10Q_1 - 5Q_2 = 0$$

$$\pi_2 = 48 - 6Q_2 - 5Q_1 = 0$$

联立求解,得到:$\overline{Q}_1 = 2.75$, $\overline{Q}_2 = 5.7$.

为进一步确信 π 取得最大,求二阶导数:

$$\pi_{11} = -10 \quad \pi_{22} = -6 \quad \pi_{12} = -5 = \pi_{21}$$

由于二阶直接偏导数均为负且有 $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$ 成立,则函数在驻点取得最大.

最后,分别将 $\overline{Q}_1 = 2.75$, $\overline{Q}_2 = 5.7$ 代入(6.12)和(6.13),以求得最大利润的价格.

$$P_1 = 56 - 4(2.75) = 45 \quad P_2 = 48 - 2(5.7) = 36.6$$

品牌 1 的价格应定为 \$45, 品牌 2 的价格应定为 \$36.60, 于是品牌 1 销量为 275 个单位, 品牌 2 的销量为 5.7 个单位. 由(6.11)和(6.14)得到利润

$$\pi = 45(2.75) + 36.6(5.7) - (2.75)^2 - 5(2.75)(5.7) - (5.7)^2 = 213.94$$

6.6 经济学中多元函数的约束最优化

经济问题的求解往往需要满足一定的约束(例如, 在满足预算约束下效用最大, 以及在满足生产既定产出的最低配额要求下成本最小). 利用拉格朗日函数(见 5.5 节)会非常容易完成该项任务. 见例 7 和问题 6.28~6.39. 至于不等式约束见第 13 章的凹规划(13.7 节).

例 7 已知一个厂商同时生产两种商品, 其产量分别记作 x, y, 总成本函数为 $c = 8x^2 - xy + 12y^2$, 且已知该厂商受合同的制约, 必须提供总数为 42 的商品组合, 即满足约束 $x + y = 42$.

解 ☞ 令约束等于零, 乘上 λ, 构造拉格朗日函数,

$$C = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda(42 - x - y)$$

求一阶偏导数,

$$C_x = 16x - y - \lambda = 0$$
$$C_y = -x + 24y - \lambda = 0$$
$$C_\lambda = 42 - x - y = 0$$

联立求解, 有 $\bar{x} = 25, \bar{y} = 17$, 及 $\bar{\lambda} = 383$. 由于 $\bar{\lambda} = 383$, 所以增加一单位约束常数或生产配额, 将会导致增加大约 \$383 的成本. 至于二阶条件, 请见 12.5 节及问题 12.27(a).

6.7 齐次生产函数

如果一个生产函数, 当用一个正的实数 k 乘以每一个输入要素时, 该常数可作为因子提出来, 则称它为齐次的. 如果要素的指数为 1, 则为次数 1 的齐次函数; 如果要素的指数大于 1, 则为次数大于 1 的齐次函数; 如果要素的指数小于 1, 则为次数小于 1 的齐次函数. 数学上, 如果对所有的正实数 k, 都有 $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ 成立, 则称 $z = f(x, y)$ 为次数 n 的齐次函数. 见例 8 和问题 6.40.

例 8 下面给出齐次函数的次数.

1. $z = 8x + 9y$ 是次数为 1 的齐次函数, 因为

$$f(kx, ky) = 8kx + 9ky = k(8x + 9y)$$

2. $z = x^2 + xy + y^2$ 是次数为 2 的齐次函数, 因为

$$f(kx, ky) = (kx)^2 + (kx)(ky) + (ky)^2 = k^2(x^2 + xy + y^2)$$

3. $z = x^{0.3}y^{0.4}$ 是次数小于 1 的齐次函数, 因为

$$f(kx, ky) = (kx)^{0.3}(ky)^{0.4} = k^{0.3+0.4}(x^{0.3}y^{0.4}) = k^{0.7}(x^{0.3}y^{0.4})$$

4. $z = 2x/y$ 是次数为 0 的齐次函数, 因为

$$f(kx, ky) = \frac{2kx}{ky} = 1\left(\frac{2x}{v}\right) \quad 因\frac{k}{k} = k^0 = 1$$

5. $z = x^3 + 2xy + y^3$ 不是齐次函数, 因为 k 不能作为因子提出来:

$$f(kx, ky) = (kx)^3 + 2(kx)(ky) + (ky)^3$$
$$= k^3x^3 + 2k^2xy + k^3y^3 = k^2(kx^3 + 2xy + ky^3)$$

6. $Q = AK^\alpha L^\beta$ 是次数为 $\alpha + \beta$ 的齐次函数, 因为

$$Q(kK, kL) = A(kK)^\alpha(kL)^\beta = Ak^\alpha K^\alpha k^\beta L^\beta = k^{\alpha+\beta}(AK^\alpha L^\beta)$$

6.8 规模报酬

对于一个生产函数, 如果当所有要素以给定的比例 k 增加时, 产出以相同的比例增加, 则

该函数表示的技术是不变规模报酬的；如果产出以大于 k 的比例增加，则是规模报酬递增的；如果产出以小于 k 的比例增加，则是规模报酬递减的．换言之，当生产函数为齐次的，其次数大于1、等于1或小于1分别对应着规模报酬递增、不变或递减．见问题6.40．

6.9　柯布-道格拉斯生产函数的最优化

经济分析中经常引用柯布-道格拉斯生产函数 $q = AK^{\alpha}L^{\beta}(A>0;0<\alpha,\beta<1)$ 其中 q 为产出量，K 为资本量，L 为劳动量．这里的 α（产出的资本弹性）度量的是：当 L 保持不变时，资本变动1个百分比所引起 q 的变动率；β（产出的劳动弹性）度量当 K 保持不变时劳动的1个百分比的变动所引起 q 的变化率．A 是效率参数，反映技术水平．

当 $\alpha+\beta=1$ 时，严格的柯布-道格拉斯生产函数代表着规模报酬不变．当 $\alpha+\beta\neq1$ 时，广义的柯布-道格拉斯生产函数代表着规模报酬递增（当 $\alpha+\beta>1$）和规模报酬递减（$\alpha+\beta<1$）．例10，问题6.41及6.42涉及满足预算约束的柯布-道格拉斯生产函数的极值；12.5节中讲解二阶条件．在问题6.53～6.58中给出并证明部分柯布-道格拉斯生产函数的性质．

例9　(a)　$q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ 和(b)　$q = 5K^{0.4}L^{0.6}$ 的一阶和二阶偏导数如下：

(a)　$q_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}$　　$q_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$

$q_{KK} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{\beta}$　　$q_{LL} = \beta(\beta-1)AK^{\alpha}L^{\beta-2}$

$q_{KL} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$　　$q_{LK} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$

(b)　$q_K = 2K^{-0.6}L^{0.6}$　　$q_L = 3K^{0.4}L^{-0.4}$

$q_{KK} = -1.2K^{-1.6}L^{0.6}$　　$q_{LL} = -1.2K^{0.4}L^{-1.4}$

$q_{KL} = 1.2K^{-0.6}L^{-0.4}$　　$q_{LK} = 1.2K^{-0.6}L^{-0.4}$

例10　已知预算约束为 \$108，$P_K = 3$ 及 $P_L = 4$，广义柯布-道格拉斯生产函数为 $q = K^{0.4}L^{0.5}$，求其极值．

解　☞ 1．建立拉格朗日函数．

$$Q = K^{0.4}L^{0.5} + \lambda(108 - 3K - 4L)$$

2．利用简单幂函数法则求一阶偏导数，令它们等于零并联立求 K_0 和 L_0（如若需要，求出 λ_0），

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K = 0.4K^{-0.6}L^{0.5} - 3\lambda = 0 \qquad (6.15)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L = 0.5K^{0.4}L^{-0.5} - 4\lambda = 0 \qquad (6.16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = Q_\lambda = 108 - 3K - 4L = 0 \qquad (6.17)$$

整理，再用(6.15)除以(6.16)以消去处 λ．

$$\frac{0.4K^{-0.6}L^{0.5}}{0.5K^{0.4}L^{-0.5}} = \frac{3\lambda}{4\lambda}$$

注意在除法中指数相减，

$$0.8K^{-1}L^{1} = 0.75$$

$$\frac{L}{K} = \frac{0.75}{0.8} \quad L = 0.9375K$$

将 $L = 0.9375K$ 代入(6.17)，$108 - 3K - 4(0.9375K) = 0 \quad K_0 = 16$

再将 $K_0 = 16$ 代入(6.17)，$L_0 = 15$

例11　我们可以用微观经济理论中熟悉的产量最大条件

$$\frac{MU_K}{MU_L} = \frac{P_K}{P_L}$$

来解决例10中的问题，其中 $q = K^{0.4}L^{0.5}$，$P_K = 3$，$P_L = 4$，及 $B = 108$．

解 ☞ (a)

$$MU_K = \frac{\partial q}{\partial K} = 0.4K^{-0.6}L^{0.5} \qquad MU_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 0.5K^{0.4}L^{-0.5}$$

代入上述比率方程,

$$\frac{0.4K^{-0.6}L^{0.5}}{0.5K^{0.4}L^{-0.5}} = \frac{3}{4}$$

像例 10 一样求解,

$$0.8K^{-1}L^{1} = 0.75$$

$$L = 0.9375K$$

将 $L = 0.9375K$ 代入约束方程,

$$3K + 4L = 108$$

$$3K + 4(0.9375K) = 108$$

$$K_0 = 16 \quad L_0 = 15$$

其结果与例 10 利用微积分求解的完全相同. 见图 6-1.

(b)

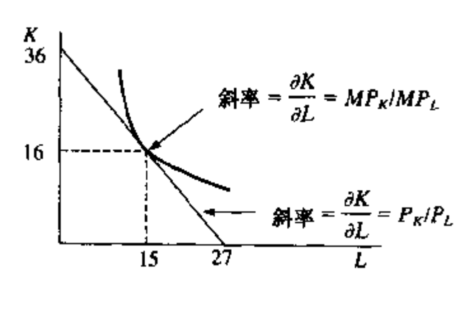


图 6-1

6.10 不变替代弹性的生产函数的最优化

替代弹性 σ 度量的是输入价格比(P_L/P_K)的很小的变动率所引起的最低成本的输入比(K/L)的变动率.

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{d(P_L/P_K)}{P_L/P_K}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)}}{\dfrac{K/L}{P_L/P_K}} \tag{6.18}$$

其中 $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$. 如果 $\sigma = 0$, 没有替代性; 两种输入是互补的, 并必须以固定的比例一同使用. 如果 $\sigma = \infty$, 两种要素是完全替代的. 如问题 6.57 中的柯布-道格拉斯生产函数具有等于 1 的不变替代弹性. 不变替代弹性(CES)生产函数具有的替代弹性系数是常数的, 但不一定等于 1. 柯布-道格拉斯生产函数只是其中的一个例子.

不变替代弹性(CES)生产函数可一般地表示为如下形式:

$$q = A[\alpha K^{-\beta} + (1 - \alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta} \tag{6.19}$$

其中 A 为效率参数, α 为代表相对要素份额的分配参数, β 为决定替代弹性系数的分配参数, 这些参数满足条件: $A > 0, 0 < \alpha < 1$ 及 $\beta > -1$. CES 生产函数满足预算约束的极值在例 12, 问题 6.43 和问题 6.44 中求得. 在问题 6.59～6.69 中给出并证明 CES 生产函数的重要性质.

例 12 求 CES 生产函数

$$q = 75[0.3K^{-0.4} + (1 - 0.3)L^{-0.4}]^{-1/0.4}$$

满足约束 $4K + 3L = 120$ 的最大值.

解 ☞ 1. 建立拉格朗日函数

$$Q = 75(0.3K^{-0.4} + 0.7L^{-0.4})^{-2.5} + \lambda(120 - 4K - 3L)$$

2. 利用广义幂函数法则,检验一阶条件.

$$Q_K = -187.5(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}(-0.12K^{-1.4})-4\lambda = 0$$

$$=22.5K^{-1.4}(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}-4\lambda = 0 \qquad (6.20)$$

$$Q_L = -187.5(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}(-0.28L^{-1.4})-3\lambda = 0$$

$$=52.5L^{-1.4}(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}-3\lambda = 0 \qquad (6.21)$$

$$Q_\lambda = 120-4K-3L = 0 \qquad (6.22)$$

整理,再用(6.20)除以(6.21)以消去 λ.

$$\frac{22.5K^{-1.4}(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}}{52.5L^{-1.4}(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-3.5}}=\frac{4\lambda}{3\lambda}$$

$$\frac{22.5K^{-1.4}}{52.5L^{-1.4}}=\frac{4}{3}$$

交叉相乘,

$$67.5K^{-1.4}=210L^{-1.4}$$

$$K^{-1.4}=3.11L^{-1.4}$$

求 -1.4 根,

$$K=(3.11)^{-1/1.4}L=(3.11)^{-0.71}L$$

利用计算器,得到,

$$K \approx 0.45L$$

代入(6.22).

$$120-4(0.45L)-3L=0 \quad L_0=25 \quad K_0=11.25$$

注意 在用计算器求 $(3.11)^{-0.71}$ 值时,先输入 3.11,按 $\boxed{y^x}$ 键,再按 $\boxed{+/-}$ 键以确定为负号后输入 0.71,最后击 $\boxed{=}$ 键便得到 $(3.11)^{-0.71}=0.44683$.

习题解答

边际概念

6.1 求下列生产函数的各输入或生产要素的边际产品.

解 ☞ (a) $Q=6x^2+3xy+2y^2$

$$\mathrm{MP}_x=\frac{\partial Q}{\partial x}=12x+3y$$

$$\mathrm{MP}_y=\frac{\partial Q}{\partial y}=3x+4y$$

(b) $Q=0.5K^2-2KL+L^2$

$$\mathrm{MP}_K=K-2L$$

$$\mathrm{MP}_L=2L-2K$$

(c) $Q=20+8x+3x^2-0.25x^3+5y+2y^2-0.5y^3$

$$\mathrm{MP}_x=8+6x-0.75x^2$$

$$\mathrm{MP}_y=5+4y-1.5y^2$$

(d) $Q=x^2+2xy+3y^2+1.5yz+0.2z^2$

$$\mathrm{MP}_x=2x+2y$$

$$\mathrm{MP}_y=2x+6y+1.5z$$

$$\mathrm{MP}_z=1.5y+0.4z$$

6.2 (a) 假设问题 6.1(a)中的 $\bar{y}=4$,求 $x=5$ 和 $x=8$ 时的 MP_x.

(b) 如果在 $\bar{x}=5, \bar{y}=4$ 时的边际收益为 \$3,计算 x 为第五个单位时的边际收益产品.

解 ☞ (a) $MP_x = 12x + 3y$

当 $x = 5$, $\bar{y} = 4$, $MP_x = 12(5) + 3(4) = 72$.

(b) $MRP_x = MP_x(MR)$

当 $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 4$, $MRP_x = (72)(3) = 216$.

当 $x = 8$, $\bar{y} = 4$, $MP_x = 12(8) + 3(4) = 108$.

6.3 (a) 总成本为 $c = 3x^2 + 7x + 1.5xy + 6y + 2y^2$，求不同产品的边际成本.

(b) 当 $\bar{x} = 5, \bar{y} = 3$ 时，确定 x 的边际成本.

解 ☞ (a)

$$MC_x = 6x + 7 + 1.5y$$

$$MC_y = 1.5x + 6 + 4y$$

当 $\bar{x} = 5, \bar{y}$ 恒等于 3 时的 x 的边际成本为

$$MC_x = 6(5) + 7 + 1.5(3) = 41.5$$

收入决定乘数和比较静态

6.4 已知一个三部门收入决定模型，其中

$$Y = C + I_0 + G_0 \quad Yd = Y - T \quad C_0, I_0, G_0, T_0 > 0 \quad 0 < b, t < 1$$

$$C = C_0 + bYd \quad T = T_0 + tY$$

确定一个单位的(a) 政府开支，(b) 一次总付性税及(c) 税率对均衡收入水平影响的幅度和方向. 即练习比较静态分析确定政府开支乘数、一次总付性税乘数和税率乘数.

解 ☞ 为求不同的乘数，首先求解均衡收入水平，

$$Y = C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0 + G_0$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{1 - b + bt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0) \tag{6.23}$$

再求相应的偏导数.

(a)

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - b + bt}$$

由于 $0 < b < 1$, $\partial \bar{Y}/\partial G_0 > 0$, 一个单位政府开支的增加会引起均衡收入水平增加 $1/(1 - b + bt)$.

(b)

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1 - b + bt} < 0$$

一个单位一次总付性税的增加会使国民收入下降 $b/(1 - b + bt)$.

(c) 由于 t 出现在(6.23)的分母中，利用除法法则，

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{(1 - b + bt)(0) - (C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)(b)}{(1 - b + bt)^2}$$

$$= \frac{-b(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)}{(1 - b + bt)^2} = \frac{-b}{1 - b + bt}\left(\frac{C_0 - bT_0 + I_0 + G_0}{1 \quad b + bt}\right)$$

所以，由(6.23)有

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{-b\bar{Y}}{1 - b + bt} < 0$$

一个单位税率的增加将会使国民收入下降，其幅度为 $6\bar{Y}/1 - b + bt$.

6.5 已知一个简单模型

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad Yd = Y - T$$

$$C = C_0 + bYd \qquad T = T_0$$

其中税收不依赖于收入，计算政府开支变动一个单位所引起均衡收入水平的改变. 此时政府开支的变动恰好被税收的变动所补偿. 也就是，用比较静态分析方法，求只有一次

总付性税存在的经济中的平衡预算乘数.

解 ☞

$$Y = C_0 + b(Y - T_0) + I_0 + G_0$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{1-b}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)$$

所以,政府(开支)乘数为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b} \tag{6.24}$$

税收乘数为

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b} \tag{6.25}$$

如果政府开支与税收增加的数量相等,政府开支增加一个单位对平衡预算所带来的影响为(6.24)与(6.25)之和,所以,

$$\Delta\overline{Y} = \frac{1}{1-b} + \left(\frac{-b}{1-b}\right) = \frac{1}{1-b} - \frac{b}{1-b} = \frac{1-b}{1-b} = 1$$

可见,当政府开支与政府税收的改变量恰好相互补偿时,政府开支的改变量对均衡收入水平有正面的效应,且恰好等于政府开支和税收的变化量.即,在该种情形里,乘数为 +1.

6.6 给定

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad Yd = Y - T$$

$$C = C_0 + bYd \qquad T = T_0 + tY$$

其中,税收是收入的函数,求政府开支改变一个单位对均衡收入水平产生的效应,此时政府开支改变恰好被一次总付性税收 T_0 的变化量所抵消.也就是说,在税收是收入的正函数的经济中,求预算平衡乘数.

解 ☞ 由(6.23),

$$\overline{Y} = [1/(1-b+bt)](C_0 - bT_0 + I_0 + G_0).$$

所以,

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-b+bt} \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial T_0} = \frac{-b}{1-b+bt} \tag{6.27}$$

政府开支和一次总付性税的各自一个单位的变化对 $\overline{Y}$ 的复合效应为(6.26)和(6.27)之和.所以,

$$\Delta\overline{Y} = \frac{1}{1-b+bt} + \left(\frac{-b}{1-b+bt}\right) = \frac{1-b}{1-b+bt}$$

因为 $1-b<1-b+bt$,所以 $\Delta\overline{Y}$ 为正且小于 1.在税收正相关于收入的模型中,政府开支与一次总付性税的相同的改变给均衡收入水平带来正效应的变化,但是,效应小于政府开支的初始改变.由于税收的总变化量($\Delta T = \Delta T_0 + t\Delta Y$)大于 G_0 的变化量,所以这里的乘数小于 1.

6.7 给定

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - Z \qquad T = T_0 + tY$$

$$C = C_0 + bYd \qquad Z = Z_0 + zYd$$

其中.所有的自变量为正,及 $0<b, z, t<1$.确定一个单位的(a) 出口、(b) 自由进口及(c) 一次总付性税的改变对均衡收入水平的效应.即是,作比较静态分析,求出口、自由进口和自由税的乘数.(注意 $Z = f'Y_d$).

解 ☞ 均衡收入水平,

$$Y = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 - z(Y - T_0 - tY)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{1-b+bt+z-zt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)$$

(a)
$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X_0} = \frac{1}{1-b+bt+z-zt} > 0$$

由于 $0<b, z<1$,增加一个单位的出口量对 $\overline{Y}$ 有正效应.

(b)
$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial Z_0}=\frac{-1}{1-b+bt+z-zt}<0$$

自由进口量的增加会导致 $\overline{Y}$ 的减少.

(c)
$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial T_0}=\frac{z-b}{1-b+bt+z-zt}<0$$

由于一个国家的进口的边际倾向 z 通常小于消费的边际倾向 b,即 $z<b$, $z-b<0$.自由税的增加将导致国民收入的下降,正如(6.27)所示,但由于 z 在分母上的出现,加剧了国民收入的下降效应.当进口的边际倾向为正时,增加税收将减少进口资金的流动,从而削弱增加税收对均衡收入水平的负效应.

6.8 求问题 6.7 中的一单位进口的边际倾向 z 对 $\overline{Y}$ 的效应.

解 ☞
$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial z}=\frac{(1-b+bt+z-zt)(T_0)-(C_0-bT_0+I_0+G_0+X_0-Z_0+zT_0)(1-t)}{(1-b+bt+z-zt)^2}$$
$$=\frac{T_0}{1-b+bt+z-zt}-\frac{\overline{Y}(1-t)}{1-b+bt+z-zt}$$
$$=\frac{-[\overline{Y}-(T_0+t\overline{Y})]}{1-b+bt+z-zt}=\frac{-\overline{Y}d}{1-b+bt+z-zt}<0$$

微分和比较静态

6.9 $Y=C+I_0+G_0$ $\quad Yd=Y-T$ $\quad C_0=100$ $\quad I_0=90$ $\quad b=0.75$

$C=C_0+bYd$ $\quad T=T_0+tY$ $\quad G_0=330$ $\quad T_0=240$ $\quad t=0.20$

(a) 什么是均衡收入水平? (b) 政府开支增加¥50,(c) 自由税 T_0 增加¥50 时 $\overline{Y}$ 的变化是多少?

解 ☞ (a) 由(6.23),有

$$\overline{Y}=\frac{1}{1-b+bt}(C_0-bT_0+I_0+G_0)$$
$$=\frac{1}{1-0.75+0.75(0.20)}[100-0.75(240)+90+330]$$
$$=\frac{1}{0.40}(100-180+90+330)=2.5(340)=850$$

(b) 如果政府增加开支 50,则

$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0}\Delta G_0=\frac{1}{1-b+bt}(50)=2.5(50)=125$$

(c) 如果自由税 T_0 增加 50,则

$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial \overline{Y}}{\partial T_0}\Delta T_0=\frac{-b}{1-b+bt}(50)=\frac{-0.75}{1-0.75+0.75(0.20)}(50)$$
$$=-1.875(50)=-93.75$$

6.10 如果问题 6.9(a)中的充分就业收入水平 Y_{fe} 为 1000,而政府想要改进,应该改变多少 (a) 政府开支或(b) 自由税?

解 ☞ (a) 能够增加的是充分就业的收入水平(1000)与当前的水平(850)的差额.所以,期望的 $\Delta\overline{Y}=150$.代入问题 6.9(b)的公式

$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0}\Delta G_0$$
$$150=2.5\Delta G_0 \qquad \Delta G_0=60$$

增加 60 元的政府开支将会使收入增加 150.

(b) 如果政府想通过改变自由税来达到充分就业,由问题 6.9(c),有

$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial \overline{Y}}{\partial T_0}\Delta T_0$$
$$150=-1.875\Delta T_0 \qquad \Delta T_0=-80$$

政府应该削减 80 元的自由税.

6.11 (a) 如果采纳问题 6.10(a)的政策,(b) 如果采纳 6.10(b)的政策,则解释对政府赤

字的效应.

解 ☞ (a)　政府的财政状况是由收入 T 与 G 的差决定的.在初始的收入水平 850 上,

$$T = 240 + 0.2(850) = 410 \quad G_0 = 330 \quad T - G_0 = 410 - 330 = 80$$

政府结余 80.

如果政府增加 60 元的支出,但税收也随着收入的增加而增加,由于 $\Delta \overline{Y} = 150, \Delta T = 0.2(150) = 30$, 随着开支增加 60 元,财政收入增加 30 元,从而政府刺激经济以充分就业的净成本只有 30 元.在新的 $\overline{Y} = 1000$ 时,

$$T = 240 + 0.2(1000) = 440 \quad G_0 = 330 + 60 = 390 \quad T - G_0 = 440 - 390 = 50$$

政府结余由 80 元下降到 50 元.

(b)　如果政府将 T_0 削减 80 元,起初的税收下降 80 元.但由于 $\Delta T = 0.2(150) = 30$, 作用在收入上的 150 元刺激效用对税收有正的效应.故此用削减自由税的政策以刺激经济达到充分就业的净成本为 50 元.政府财政结余减少到 30 元:

$$T = 160 + 0.2(1000) = 360 \quad G_0 = 330 \quad T - G_0 = 360 - 330 = 30$$

6.12　(a)　如果问题 6.9 中的比例税增加 10%,收入 $\overline{Y}$ 会有何变化?

(b)　如果打算改变原来的 20% 的边际税率以达到 $Y_{fe} = 1000$, t 应变动多少?

解 ☞ (a)　如果比例税增加 10%,

$$\Delta t = 0.10(0.20) = 0.02$$

收入改变量为

$$\Delta \overline{Y} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \Delta t$$

将问题 6.4(c)中的式子代入,

$$\Delta \overline{Y} \approx \frac{-b\overline{Y}}{1 - b + bt}(0.02)$$

不同于自变量的改变,参数的变化将改变乘数的值,所以乘数近似于变化的效应.

$$\Delta \overline{Y} \approx \frac{-0.75(850)}{0.4}(0.02) = -31.88$$

(b)　政府打算提高收入 150 元,将 $\Delta \overline{Y} = 150$ 代入上述方程,

$$150 \approx \frac{-0.75(850)}{0.4} \Delta t$$

$$\Delta t \approx -0.09$$

应该大约降低税率 0.09.新的税率是 11% 左右($0.20 - 0.09 = 0.11$).

6.13　给定

$$Y = C + I_0 + G_0 + X_0 - Z \qquad T = T_0 + tY$$

$$C = C_0 + bYd \qquad Z = Z_0 + zYd$$

其中

$$b = 0.9 \quad t = 0.2 \quad C_0 = 125$$

$$X_0 = 150 \quad Z_0 = 55 \quad I_0 = 92.5$$

$$z = 0.15 \quad T_0 = 150 \quad G_0 = 600$$

计算(a)　均衡收入水平,(b)　自由出口 X_0 增加 60,对 $\overline{Y}$ 产生的效应,及(c)　自由进口 Z_0 增加 30,对 $\overline{Y}$ 产生的效应.

解 ☞ (a)　由问题 6.7,有

$$\overline{Y} = \frac{1}{1 - b + bt + z - zt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)$$

$$= \frac{1}{1 - 0.9 + 0.9(0.2) + 0.15 - 0.15(0.2)}[125 - 0.9(150) + 92.5 + 600 + 150 - 55 + 22.5]$$

$$= 2.5(800) = 2000$$

(b)

$$\Delta \overline{Y} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X_0} \Delta X_0 = \frac{1}{1 - b + bt + z - zt}(60) = 2.5(60) = 150$$

(c)
$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial\overline{Y}}{\partial Z_0}\Delta Z_0=\frac{-1}{1-b+bt+z-zt}(30)=-2.5(30)=-75$$

6.14 如果问题6.13中的充分就业收入水平为2075，则为达到此目标，(a) 政府应该增加多少开支？(b) 应该削减多少自由税？

解 ☞ (a) 政府开支对国民收入的效应为

$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial\overline{Y}}{\partial G_0}\Delta G_0$$

代入 $\Delta\overline{Y}=75$，

$$75=\frac{1}{1-b+bt+z-zt}\Delta G_0=2.5\Delta G_0\quad \Delta G_0=30$$

(b)
$$\Delta\overline{Y}=\frac{\partial\overline{Y}}{\partial T_0}\Delta T_0$$

$$75=\frac{z-b}{1-b+bt+z-zt}\Delta T_0=-1.875\Delta T_0\quad \Delta T_0=-40$$

政府应该削减自由税40元.

6.15 在问题6.14中，政府为了达到充分就业的目标，如果采用(a) 增加开支或(b) 减税的政策，计算给财政赤字带来的影响.

解 ☞ (a) 如果政府增加30的开支，则政府财政赤字首先增加30. 然而，由于 $\Delta\overline{Y}=75$，$\Delta T=0.2(75)=15$，国民收入因此增加75，税收收入增加15. 所以政府采取该政策的净成本为15元($30-15=15$)，它即是对赤字的效应.

(b)如果政府削减自由税40，则税收收入首先下降40，但是收入由此而增加75，从而税收增加15. 所以政府这一政策的净成本为25($40-15=25$)，政府赤字恶化了25.

6.16 计算问题6.14中的(a) 政府增加开支及(b) 减税对支付平衡产生的效应.

解 ☞ (a) 由于 $B/P=X-Z$，将问题6.13中的式子代入，

$$B/P=X_0-(Z_0+zYd)=X_0-Z_0-zY-zT_0+ztY \tag{6.28}$$

因为政府增加30开支，$\Delta\overline{Y}=75$. 注意到，Y 是(6.28)等式右边惟一的变量，有

$$\Delta(B/P)=-z(75)+zt(75)$$

代入 $z=0.15$，$zt=0.03$，$\Delta(B/P)=-9$.

(b) 当政府削减40的自由税时，$\Delta\overline{Y}=75$. 调整(6.28)，

$$\Delta(B/P)=-z(75)+z(-40)-zt(75)=-15$$

在增加可处置收入方面，减税比增加政府开支有更好的效果. 可处置收入的增加会引起更多的进口和更严重的支付失衡.

6.17 估算问题6.13中的边际进口倾向下降一个百分点对 $\overline{Y}$ 所产生的影响.

解 ☞

$$\Delta\overline{Y}\approx\frac{\partial\overline{Y}}{\partial z}\Delta z$$

将问题6.8中的式子代入，

$$\Delta\overline{Y}=\frac{-\overline{Y}d}{1-b+bt+z-zt}\Delta z$$

其中

$$\overline{Y}d=\overline{Y}-T_0-t\overline{Y}=2000-150-0.2(2000)=1450$$

所以，

$$\Delta\overline{Y}=\frac{-1450}{0.4}(-0.01)=+36.25$$

偏弹性

6.18 已知 $Q=700-2P+0.02Y$，其中 $P=25$，$Y=5000$. 求(a) 需求的价格弹性，(b) 需求的收入弹性.

解 ☞ (a)

$$\varepsilon_d=\frac{\partial Q}{\partial P}\left(\frac{P}{Q}\right)$$

其中

$$\partial Q/\partial P=-2,\ Q=700-2(25)+0.02(5000)=750.$$

所以

$$\varepsilon_d=-2\left(\frac{25}{750}\right)=-0.067$$

(b)

$$\varepsilon_Y=\frac{\partial Q}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q}\right)=0.02\left(\frac{5000}{750}\right)=0.133$$

6.19 已知 $Q=400-8P+0.05Y$，其中 $P=15,\ Y=12\ 000$．求(a)　需求的收入弹性，(b)　在收入每年增加5%的假设下，产出的增长潜力．(c)　评价产出的增长潜力．

解 ☞ (a)　$Q=400-8(15)+0.05(12\ 000)=880,\ \partial Q/\partial Y=0.05$．所以，

$$\varepsilon_Y=\frac{\partial Q}{\partial Y}\left(\frac{Y}{Q}\right)=0.05\left(\frac{12\ 000}{880}\right)=0.68$$

(b)

$$\varepsilon_Y=\frac{\partial Q}{Q}\div\frac{\partial Y}{Y}$$

整理并代入已知的参数，

$$\frac{\partial Q}{Q}=\varepsilon_Y\frac{\partial Y}{Y}=0.68(0.05)=0.034$$

需求将增加3.4%．

(c)　由于 $0<\varepsilon_Y<1$，需求将随着国民收入的增加而增加，但是小于比例的速度增加．所以，当需求绝对地增长时，在扩张的经济中，商品的相对市场份额将会下降．如果 $\varepsilon_Y>1$，对商品需求的增长速度将快于经济的扩张，而且，其市场份额增加．如果 $\varepsilon_Y<0$，对商品的需求将随着收入的增加而下降．

6.20 已知 $Q_1=100-P_1+0.75P_2-0.25P_3+0.0075Y_0$ 在 $P_1=10,\ P_2=20,\ P_3=40$，及 $Y=10\ 000,\ Q_1=170$ 时，求需求的不同的交叉价格弹性．

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}\left(\frac{P_2}{Q_1}\right)=0.75\left(\frac{20}{170}\right)=0.088$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{\partial Q_1}{\partial P_3}\left(\frac{P_3}{Q_1}\right)=-0.25\left(\frac{40}{170}\right)=-0.059$$

6.21 已知 $Q_1=50-4P_1-3P_2+2P_3+0.001Y_0$ 在 $P_1=5,\ P_2=7,\ P_3=3$，及 $Y=11\ 000,\ Q_1=26$ 时，(a)　利用交叉弹性决定商品1与其他商品的关系．(b)　分别考察其他商品的价格上涨10%对 Q_1 的影响．

解 ☞ (a)　$\varepsilon_{12}=-3\left(\frac{7}{26}\right)=-0.81$　　$\varepsilon_{13}=2\left(\frac{3}{26}\right)=0.23$

由于 ε_{12} 为负，商品1和商品2是互补的．P_2 的上涨将会导致 Q_1 的下降．

由于 ε_{13} 为正，商品1和商品3是可替代的．P_3 的增加将会使 Q_1 上升．

(b)

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial Q_1}{Q_1}\div\frac{\partial P_2}{P_2}$$

整理并代入已知的参数，

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1}=\varepsilon_{12}\frac{\partial P_2}{P_2}=-0.81(0.10)=-0.081$$

如果 P_2 增加10%，Q_1 下降8.1%．

$$\varepsilon_{13}=\frac{\partial Q_1}{Q_1}\div\frac{\partial P_3}{P_3}$$

$$\frac{\partial Q_1}{Q_1}=\varepsilon_{13}\frac{\partial P_3}{P_3}=0.23(0.10)=0.023$$

如果 P_3 上涨10%，Q_1 将增加2.3%．

求经济函数的极值

6.22 已知一个企业生产两种商品 x 和 y，其利润函数为 $\pi=160x-3x^2-2xy-2y^2+120y-18$

(a) 求最大利润,(b) 检验二阶条件,(c) 求函数在驻点处的值.

解 ☞ (a) $\pi_x = 160 - 6x - 2y = 0 \quad \pi_y = -2x - 4y + 120 = 0$

联立求解,

$$\bar{x} = 20 \qquad \bar{y} = 20.$$

(b) 求二阶偏导数,

$$\pi_{xx} = -6, \quad \pi_{yy} = -4, \quad \pi_{xy} = -2$$

由于二阶直接偏导数为负,且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$,所以,$\pi$ 在 $\bar{x} = \bar{y} = 20$ 处,达到最大值.

(c) $\pi = 2782$

6.23 已知 $\pi = 25x - x^2 - xy - 2y^2 + 30y - 28$. 重做问题 6.22,

解 ☞ (a) $\pi_x = 25 - 2x - y = 0 \qquad \pi_y = -x - 4y + 30 = 0$

所以,$\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 5$.

(b) $\pi_{xx} = -2 \qquad \pi_{yy} = -4 \qquad \pi_{xy} = -1$

由于 π_{xx}和 π_{yy}均为负,且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$, π 有最大值.

(c) $\pi = 172$

6.24 一个垄断厂商销售两种产品 x, y,它们的需求函数分别为

$$x = 25 - 0.5P_x \tag{6.29}$$

$$y = 30 - P_y \tag{6.30}$$

总成本函数为

$$c = x^2 + 2xy + y^2 + 20 \tag{6.31}$$

求(a) 利润最大的产出量,(b) 利润最大的价格及(c) 最大利润.

解 ☞ (a) 由于 $\pi = \mathrm{TR}_x + \mathrm{TR}_y - \mathrm{TC}$,即,

$$\pi = P_x x + P_y y - c \tag{6.32}$$

由(6.29)及(6.30),有

$$P_x = 50 - 2x \tag{6.33}$$

$$P_y = 30 - y \tag{6.34}$$

代入(6.32),

$$\begin{aligned} \pi &= (50 - 2x)x + (30 - y)y - (x^2 + 2xy + y^2 + 20) \\ &= 50x - 3x^2 + 30y - 2y^2 - 2xy - 20 \end{aligned} \tag{6.35}$$

(6.35)最大化的一阶条件:

$$\pi_x = 50 - 6x - 2y = 0 \qquad \pi_y = 30 - 4y - 2x = 0$$

联立求解,$\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 4$. 检验二阶条件,$\pi_{xx} = -6$, $\pi_{yy} = -4$ 及 $\pi_{xy} = -2$. 由于二阶直接偏导数均为负,且 $\pi_{xx}\pi_{yy} > (\pi_{xy})^2$ 成立,则 π 达到最大值.

(b) 将 $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 4$ 代入(6.33)及(6.34),

$$P_x = 50 - 2(7) = 36 \qquad P_y = 30 - 4 = 26$$

(c)将 $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 4$ 代入(6.35), $\pi = 215$.

6.25 已知两种商品的需求函数分别为

$$x = 50 - 0.5P_x \tag{6.36}$$

$$y = 76 - P_y \tag{6.37}$$

总成本函数为

$$c = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55.$$

求利润最大的(a) 产出,(b) 价格,(c) 利润水平.

解 ☞ (a) 由(6.36)及(6.37),有

$$P_x = 100 - 2x \tag{6.38}$$

$$P_y = 76 - y \tag{6.39}$$

代入 $\pi = P_x x + P_y y - c$,

$$\begin{aligned}\pi &= (100-2x)x + (76-y)y - (3x^2+2xy+2y^2+55)\\ &= 100x - 5x^2 + 76y - 3y^2 - 2xy - 55 \qquad (6.40)\end{aligned}$$

求(6.40)的最大值,

$$\pi_x = 100 - 10x - 2y = 0 \qquad \pi_y = 76 - 6y - 2x = 0$$

联立求解,得:$\bar{x}=8$, $\bar{y}=10$. 检验二阶条件, $\pi_{xx}=-10$, $\pi_{yy}=-6$, 及 $\pi_{xy}=-2$, 因为 $\pi_{xx}, \pi_{yy}<0$, 且 $\pi_{xx}\pi_{yy}>(\pi_{xy})^2$, 则 π 在驻点取得最大值.

(b)　将 $\bar{x}=8$, $\bar{y}=10$ 代入(6.38)和(6.39),

$$P_x = 100 - 2(8) = 84, \qquad P_y = 76 - 10 = 66$$

(c)　由(6.40)有, $\pi = 725$.

6.26　已知一个垄断厂商生产两种商品的需求函数分别为

$$Q_1 = 49\frac{1}{3} - \frac{2}{3}P_1 \qquad (6.41)$$

$$Q_2 = 36 - \frac{1}{2}P_2 \qquad (6.42)$$

总成本函数为 $c = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 120$.

求利润最大的(a)　产出,(b)　价格,(c)　利润水平.

解　☞ (a)　由(6.41)及(6.42),

$$P_1 = 74 - 1.5Q_1 \qquad (6.43)$$

$$P_2 = 72 - 2Q_2 \qquad (6.44)$$

代入 $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - c$,

$$\begin{aligned}\pi &= (74-1.5Q_1)Q_1 + (72-2Q_2)Q_2 - (Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2+120)\\ &= 74Q_1 - 2.5Q_1^2 + 72Q_2 - 3Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 120 \qquad (6.45)\end{aligned}$$

(6.45)最大的一阶条件为

$$\pi_1 = 74 - 5Q_1 - 2Q_2 = 0 \qquad \pi_2 = 72 - 6Q_2 - 2Q_1 = 0$$

联立求解得, $\bar{Q}_1 = 11.54$, $\bar{Q}_2 = 8.15$. 检验二阶条件, $\pi_{11} = -5 < 0$, $\pi_{22} = -6 < 0$. $\pi_{12} = -2$, 且 $\pi_{11}\pi_{22} > (\pi_{12})^2$, 所以 π 在驻点处取得最大值.

(b)　将驻点代入(6.43)及(6.44),

$$P_1 = 74 - 1.5(11.54) = 56.69 \qquad P_2 = 72 - 2(8.15) = 55.70$$

(c)

$$\pi = 600.46$$

6.27　当两种商品的需求函数分别为

$$Q_1 = 5200 - 10P_1 \qquad (6.46)$$

$$Q_2 = 8200 - 20P_2 \qquad (6.47)$$

及总成本函数为

$$c = 0.1Q_1^2 + 0.1Q_1Q_2 + 0.2Q_2^2 + 325$$

求利润最大的(a)　产出,(b)　价格,(c)　利润水平.

解　☞ (a)　由(6.46)及(6.47)有,

$$P_1 = 520 - 0.1Q_1 \qquad (6.48)$$

$$P_2 = 410 - 0.05Q_2 \qquad (6.49)$$

所以,

$$\begin{aligned}\pi &= (520-0.1Q_1)Q_1 + (410-0.05Q_2)Q_2 - (0.1Q_1^2+0.1Q_1Q_2+0.2Q_2^2+325)\\ &= 520Q_1 - 0.2Q_1^2 + 410Q_2 - 0.25Q_2^2 - 0.1Q_1Q_2 - 325 \qquad (6.50)\end{aligned}$$

求(6.50)的最大值

$$\pi_1 = 520 - 0.4Q_1 - 0.1Q_2 = 0 \qquad \pi_2 = 410 - 0.5Q_2 - 0.1Q_1 = 0$$

联立求解,得 $\bar{Q}_1 = 1152.63$, $\bar{Q}_2 = 589.47$, 检验二阶条件, $\pi_{11} = -0.4 < 0$, $\pi_{22} = -0.5 < 0$, $\pi_{12} =$

$=0.1=\pi_{21}$，且有 $\pi_{11}\cdot\pi_{22}>(\pi_{12})^2$ 成立，所以 π 在驻点处取得最大值.

(b) 代入(6.48)及(6.49)，

$$P_1=520-0.1(1152.63)=404.74, P_2=410-0.05(589.47)=380.53$$

(c)
$$\pi=420\ 201.32$$

经济中的约束最优化

6.28 已知一个企业以配额 $x+y=36$ 生产两种商品，总成本函数为 $c=6x^2+10y^2-xy+30$.

(a) 应该以何种组合安排生产以使成本最小？

(b) 如果生产配额减少一个单位，成本会有什么变化？

解 ☞ (a) 构造新函数：令约束等于零，乘上 λ 并与原来大目标函数相加，

$$C=6x^2+10y^2-xy+30+\lambda(34-x-y)$$
$$C_x=12x-y-\lambda=0$$
$$C_y=20y-x-\lambda=0$$
$$C_\lambda=34-x-y=0$$

联立求解，得 $\bar{x}=21$，$\bar{y}=13$ 及 $\bar{\lambda}=239$. 所以，$C=4093$. 在 12.5 节中讨论二阶条件.

(b) 由于 $\lambda=239$，所以约束常数(生产配额)减少一个单位，将引起成本大约降低 239.

6.29 已知一个厂商的总利润函数为 $\pi=80x-2x^2-xy-3y^2+100y$，最大的产出能力为 $x+y=12$，

(a) 为了获得最大的利润，该厂商应该以什么样的组合来安排生产？

(b) 如果产出能力扩大一个单位，则对利润有何影响？

解 ☞ (a)

$$\prod=80x-2x^2-xy-3y^2+100y+\lambda(12-x-y)$$
$$\prod_x=80-4x-y-\lambda=0$$
$$\prod_y=-x-6y+100-\lambda=0$$
$$\prod_\lambda=12-x-y=0$$

联立求解，得，$\bar{x}=5$，$\bar{y}=7$，及 $\bar{\lambda}=53$. 所以，$\pi=868$.

(b)由于 $\bar{\lambda}=53$，增加一个单位的产出能力会导致利润大约增加 53.

6.30 一个农场主的利润函数

$$\pi=110x-3x^2-2xy-2y^2+140y$$

其中 x 为牛排的片数，y 为牛皮的数量. 由于每一头牛都有两片牛排一张皮，所以产量必须满足下面的比例关系，

$$\frac{x}{2}=y \qquad x=2y$$

产出量为多少时，该农场主获得最大的利润？

解 ☞

$$\prod=110x-3x^2-2xy-2y^2+140y+\lambda(x-2y)$$
$$\prod_x=110-6x-2y+\lambda=0$$
$$\prod_y=-2x-4y+140-2\lambda=0$$
$$\prod_\lambda=x-2y=0$$

联立求解 $\bar{x}=20$，$\bar{y}=10$，及 $\bar{\lambda}=30$，所以，$\pi=1800$.

6.31 一个企业大成本函数为：$c=5x^2+2xy+3y^2+800$

(a) 求其满足生产配额 $x+y=39$ 的最小成本.

(b) 如果生产配额增加到 40，则成本增加多少？

解 ☞ (a)

$$C=5x^2+2xy+3y^2+800+\lambda(39-x-y)$$

$$C_x=10x+2y-\lambda=0$$

$$C_y=2x+6y-\lambda=0$$

$$C_\lambda=39-x-y=0$$

联立求解，得，$\bar{x}=13,\bar{y}=26,\bar{\lambda}=182$，及 $c=4349$.

(b)　由于 $\bar{\lambda}=182$，所以增加一个单位的配额将导致成本大约扩大 182.

6.32　一个垄断企业生产两种商品 x 和 y，它们的需求函数分别为

$$x=72-0.5P_x \tag{6.51}$$

$$x=120-P_y \tag{6.52}$$

总成本函数为 $c=x^2+xy+y^2+35$，最大的总产量为 40，即 $x+y=40$.

求利润最大的(a)　产出，(b)　价格，(c)　利润水平.

解 ☞ (a)　由(6.51)及(6.52)

$$P_x=144-2x \tag{6.53}$$

$$P_y=120-y \tag{6.54}$$

所以，

$$\pi=(144-2x)x+(120-y)y-(x^2+xy+y^2+35)$$
$$=144x-3x^2-xy-2y^2+120y-35.$$

结合约束，

$$\prod=144x-3x^2-xy-2y^2+120y-35+\lambda(40-x-y)$$

所以，

$$\prod\nolimits_x=144-6x-y-\lambda=0$$

$$\prod\nolimits_y=-x-4y+120-\lambda=0$$

$$\prod\nolimits_\lambda=40-x-y=0$$

求解得，$\bar{x}=18,\bar{y}=22$，及 $\bar{\lambda}=14$.

(b)　代入(6.53)及(6.54)，

$$P_x=144-2(18)=108 \qquad P_y=120-22=98$$

(c)

$$\pi=2861$$

6.33　一个三轮脚踏车的生产厂商每销售一个车身构架(y)，销售两个轮胎(x)，所以

$$x/3=y, \qquad x=3y$$

如果需求函数为

$$x=63-0.25P_x \tag{6.55}$$

$$y=60-\frac{1}{3}P_y \tag{6.56}$$

成本函数为

$$c=x^2+xy+y^2+190$$

求利润最大的(a)　产出，(b)　价格及(c)　利润水平.

解 ☞ (a)由(6.55)及(6.56).

$$P_x=252-4x \tag{6.57}$$

$$P_y=180-3y \tag{6.58}$$

所以，

$$\pi=(252-4x)x+(180-3y)y-(x^2+xy+y^2+190)$$
$$=252x-5x^2-xy+180y-190-4y^2$$

构造拉格朗日函数

$$\prod=252x-5x^2-xy-4y^2+180y-190+\lambda(x-3y)$$

所以

$$\prod_x = 252 - 10x - y + \lambda = 0 \quad \prod_y = -x - 8y + 180 - 3\lambda = 0 \quad \prod_\lambda = x - 3y = 0$$

得，$\overline{x} = 27$，$\overline{y} = 9$，及 $\overline{\lambda} = 27$.

(b)　由(6.57)，及(6.58)，$P_x = 144$ 和 $P_y = 153$.

(c)　$\pi = 4022$

6.34　在问题 4.22 中，我们讨论了：一个生产可以在不同市场上销售的单一产品的厂商，在价格歧视与否的情形下，如何确定利润最大的产出水平．给定的子市场的需求函数为

$$Q_1 = 21 - 0.1P_1 \tag{6.59}$$

$$Q_2 = 50 - 0.4P_2 \tag{6.60}$$

成本函数为

$$C = 2000 + 10Q$$

其中

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{6.61}$$

利用多元函数微积分检验问题 4.22 中的结论．

解　☞ 由(6.59)，(6.60)及(6.61)，

$$P_1 = 210 - 10Q_1 \tag{6.62}$$

$$P_2 = 125 - 2.5Q_2 \tag{6.63}$$

$$c = 2000 + 10Q_1 + 10Q_2$$

在价格歧视的情形下，不同的子市场开不同的价格，即，$P_1 \neq P_2$，所以，

$$\begin{aligned}\pi &= (210 - 10Q_1)Q_1 + (125 - 2.5Q_2)Q_2 - (2000 + 10Q_1 + 10Q_2)\\ &= 200Q_1 - 10Q_1^2 + 115Q_2 - 2.5Q_2^2 - 2000\end{aligned}$$

求一阶偏导数，

$$\pi_1 = 200 - 20Q_1 = 0 \qquad \pi_2 = 115 - 5Q_2 = 0$$

所以，$\overline{Q}_1 - 10$，$\overline{Q}_2 = 23$．代入(6.62)及(6.63)，$\overline{P}_1 = 110$ 及 $\overline{P}_2 = 67.5$.

在没有价格歧视的情形下，两个子市场开同一价格，即，$P_1 = P_2$，将(6.62)及(6.63)代入，得，

$$210 - 10Q_1 = 125 - 2.5Q_2$$

$$2.5Q_2 - 10Q_1 = -85$$

整理上式，并作为约束构造新的函数，

$$\prod = 200Q_1 - 10Q_1^2 + 115Q_2 - 2.5Q_2^2 - 2000 + \lambda(85 - 10Q_1 + 2.5Q_2)$$

所以，

$$\prod_1 = 200 - 20Q_1 - 10\lambda = 0$$

$$\prod_2 = 115 - 5Q_2 + 2.5\lambda = 0$$

$$\prod_\lambda = 85 - 10Q_1 + 2.5Q_2 = 0$$

得，$\overline{Q}_1 = 13.4$，$\overline{Q}_2 = 19.6$，及 $\overline{\lambda} = -6.8$．代入(6.62)及(6.63)，

$$P_1 = 210 - 10(13.4) = 76$$

$$P_2 = 125 - 2.5(19.6) = 76$$

$$Q = 13.4 + 19.6 = 33$$

6.35　验证问题 4.23 的答案．已知

$$Q_1 = 24 - 0.2P_1 \qquad Q_2 = 10 - 0.05P_2 \qquad c = 35 + 40Q$$

其中

$$Q = Q_1 + Q_2$$

解　☞ 由于给定的信息，

$$P_1 = 120 - 5Q_1 \tag{6.64}$$

$$P_2 = 200 - 20Q_2 \tag{6.65}$$

$$c = 35 + 40Q_1 + 40Q_2$$

在价格歧视下,

$$\begin{aligned}\pi &= (120 - 5Q_1)Q_1 + (200 - 20Q_2)Q_2 - (35 + 40Q_1 + 40Q_2) \\ &= 80Q_1 - 5Q_1^2 + 160Q_2 - 20Q_2^2 - 35\end{aligned}$$

所以

$$\pi_1 = 80 - 10Q_1 = 0 \qquad \pi_2 = 160 - 40Q_2 = 0$$

有 $\overline{Q}_1 = 8$, $\overline{Q}_2 = 4$, $P_1 = 80$ 及 $P_2 = 120$.

如果没有价格歧视,则 $P_1 = P_2$. 由(6.64)和(6.65)代入,

$$120 - 5Q_1 = 200 - 20Q_2 \tag{6.66}$$

$$20Q_2 - 5Q_1 = 80$$

把(6.66)作为约束,构造新的函数,

$$\prod = 80Q_1 - 5Q_1^2 + 160Q_2 - 20Q_2^2 - 35 + \lambda(80 + 5Q_1 - 20Q_2)$$

所以,

$$\prod\nolimits_1 = 80 - 10Q_1 + 5\lambda = 0$$

$$\prod\nolimits_2 = 160 - 40Q_2 - 20\lambda = 0$$

$$\prod\nolimits_\lambda = 80 + 5Q_1 - 20Q_2 = 0$$

有, $\overline{Q}_1 = 6.4$, $\overline{Q}_2 = 5.6$ 及 $\overline{\lambda} = -3.2$. 代入(6.64)及(6.65),

$$P_1 = 120 - 5(6.4) = 88$$

$$P_2 = 200 - 20(5.6) = 88$$

$$Q = 6.4 + 5.6 = 12$$

6.36 (a) 当 $P_1 = 1$, $P_2 = 4$ 及某人的预算 $B = 120$, 求效用 $U = Q_1Q_2$ 最大.

(b) 估计增加一单位的预算的效应.

解 ☞ (a) 预算约束为 $Q_1 + 4Q_2 = 120$, 构造新的函数,

$$U = Q_1Q_2 + \lambda(120 - Q_1 - 4Q_2)$$

所以,

$$U_1 = Q_2 - \lambda = 0 \qquad U_2 = Q_1 - 4\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 120 - Q_1 - 4Q_2 = 0$$

有, $\overline{Q}_1 = 60$, $\overline{Q}_2 = 15$, 及 $\overline{\lambda} = 15$.

(b) 由于 $\overline{\lambda} = 15$, 增加一单位的预算将导致效用增加大约 15. 所以, 在 $\overline{Q}_1 = 60$, $\overline{Q}_2 = 15$ 处, 一元钱的边际效用近似为 15.

6.37 (a) 求满足 $P_1 = 10$, $P_2 = 2$, $B = 240$ 的最大效用 $U = Q_1Q_2$.

(b) 一元钱的边际效用是多少?

解 ☞ (a) 构造拉格朗日函数,

$$U = Q_1Q_2 + \lambda(240 - 10Q_1 - 2Q_2).$$

所以

$$U_1 = Q_2 - 10\lambda = 0 \qquad U_2 = Q_1 - 2\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 240 - 10Q_1 - 2Q_2 = 0$$

有, $\overline{Q}_1 = 12$, $\overline{Q}_2 = 60$, 及 $\overline{\lambda} = 6$.

(b) 在 $\overline{Q}_1 = 12$, $\overline{Q}_2 = 60$ 处, 一元钱的边际效用近似为 6.

6.38 求满足 $P_1 = 2$, $P_2 = 5$, $B = 51$ 的最大效用 $U = Q_1Q_2 + Q_1 + 2Q_2$.

解 ☞ 构造拉格朗日函数,

$$U = Q_1Q_2 + Q_1 + 2Q_2 + \lambda(51 - 2Q_1 - 5Q_2).$$

$$U_1 = Q_2 + 1 - 2\lambda = 0 \quad U_2 = Q_1 + 2 - 5\lambda = 0 \quad U_\lambda = 51 - 2Q_1 - 5Q_2 = 0$$

所以, $\overline{Q}_1 = 13$, $\overline{Q}_2 = 5$ 及 $\overline{\lambda} = 3$.

6.39 求满足 $P_x = 8$, $P_y = 12$ 及 $B = 212$ 的最大效用 $U = xy + 3x + y$.

解 ☞ 构造拉格朗日函数, $U = xy + 3x + y + \lambda(212 - 8x - 12y)$.

$$U_x = y + 3 - 8\lambda = 0 \qquad U_y = x + 1 - 12\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 212 - 8x - 12y = 0$$

从而，$\bar{x}=15$，$\bar{y}=7\frac{2}{3}$及$\bar{\lambda}=1\frac{1}{3}$.

齐次和规模报酬

6.40 对下列每个函数，确定齐次和规模报酬水平.

解 ☞ (a) $Q=x^2+6xy+7y^2$

这里 Q 是 2 阶齐次的，且因

$$f(Kx,Ky) = (Kx)^2 + 6(Kx)(Ky) + 7(Ky)^2 = K^2(x^2 + 6xy + 7y^2)$$

则规模报酬是增加的.

(b) $Q=x^3-xy^2+3y^2+x^2y$

这里 Q 是 3 阶齐次的，且因

$$f(Kx,Ky) = (Kx)^2 - 3(Kx)(Ky)^2 + 3(Ky)^3 + (Kx)^2(Ky) = K^3(x^3 - xy^2 + 3y^3 + x^2y)$$

则规模报酬是增加的.

(c) $Q=\frac{3x^2}{5y^2}$

这里 Q 是 6 阶齐次的，且因

$$f(Kx,Ky) = \frac{3(Kx)^2}{5(Ky)^2} = \frac{3x^2}{5y^2} \quad 且\ K^0 = 1$$

则规模报酬是减少的.

(d) $Q=0.9K^{0.2}L^{0.6}$

这里 Q 是 0.8 阶齐次的，且因

$$Q(kK,kL) = 0.9(kK)^{0.2}(kL)^{0.8} = Ak^{0.2}K^{0.2}k^{0.6}L^{0.6}$$
$$= k^{0.2+0.6}(0.9K^{0.2}L^{0.6}) = k^{0.8}(0.9k^{0.2}L^{0.6})$$

注意 柯布-道格拉斯函数的规模报酬总是等于指数 $\alpha+\beta$ 的和，参见例 8 中的 6.

柯布-道格拉斯生产函数的约束最优化

6.41 按步骤(1)构造拉格朗日函数，(2)像例 10 一样求驻点，求解下列柯布-道格拉斯生产函数满足约束条件的最优化问题.

解 ☞ (a) $q=K^{0.3}L^{0.5}$使得 $6K+2L=384$

(1)

$$Q = K^{0.3}L^{0.5} + \lambda(384 - 6K - 2L)$$

(2)

$$Q_K = 0.3K^{-0.7}L^{0.5} - 6\lambda = 0 \tag{6.67}$$
$$Q_L = 0.5K^{0.3}L^{-0.5} - 2\lambda = 0 \tag{6.68}$$
$$Q_\lambda = 384 - 6K - 2L = 0 \tag{6.69}$$

整理，并用(6.68)去除(6.67)以消去 λ.

$$\frac{0.3K^{-0.7}L^{0.5}}{0.5K^{0.3}L^{-0.5}} = \frac{6\lambda}{2\lambda}$$

在除法中指数相减，

$$0.6K^{-1}L^1 = 3 \qquad \frac{L}{K} = \frac{3}{0.6} \qquad L = 5K$$

将 $L=5K$ 代入(6.69)，

$$384 - 6K - 2(5K) = 0 \qquad K_0 = 24 \qquad L_0 = 120$$

在问题 12.27(b)中验证二阶条件.

(b) $q=10K^{0.7}L^{0.1}$，已知 $P_K=28$，$P_L=10$，及 $B=4000$

(1)

$$Q = 10K^{0.7}L^{0.1} + \lambda(4000 - 28K - 10L)$$

(2)

$$Q_K = 7K^{-0.3}L^{0.1} - 28\lambda = 0 \tag{6.70}$$

$$Q_L = 1K^{0.7}L^{-0.9} - 10\lambda = 0 \tag{6.71}$$

$$Q_\lambda = 4000 - 28K - 10L = 0 \tag{6.72}$$

用(6.71)去除(6.70)以消去 λ,

$$\frac{7K^{-0.3}L^{0.1}}{1K^{0.7}L^{-0.9}} = \frac{28\lambda}{10\lambda}$$

$$7K^{-1}L^{1} = 2.8$$

$$\frac{L}{K} = \frac{2.8}{7} \qquad L = 0.4K$$

代入(6.72), $K_0 = 125 \quad L_0 = 50$

有关二阶条件,见问题 12.27(c).

6.42　利用上例的步骤,求下列效用函数满足预算约束的最大值.

(a)　$u = x^{0.6}y^{0.25}$, 已知, $P_x = 8$, $P_y = 5$ 及 $B = 680$.

解　☞ (1)

$$U = x^{0.6}y^{0.25} + \lambda(680 - 8x - 5y)$$

(2)

$$U_x = 0.6x^{-0.4}y^{0.25} - 8\lambda = 0 \tag{6.73}$$

$$U_y = 0.25x^{0.6}y^{-0.75} - 5\lambda = 0 \tag{6.74}$$

$$U_\lambda = 680 - 8x - 5y = 0 \tag{6.75}$$

用(6.73)去除(6.74).

$$\frac{0.6x^{-0.4}y^{0.25}}{0.25x^{0.6}y^{-0.75}} = \frac{8\lambda}{5\lambda}$$

$$2.4x^{-1}y^{1} = 1.6$$

$$y = \frac{2}{3}x$$

代入(6.75)

$$x_0 = 60 \qquad y_0 = 40$$

(b)　$u = x^{0.8}y^{0.2}$, 已知 $P_x = 5$, $P_y = 3$ 及 $B = 75$.

解　☞ (1)

$$U = x^{0.8}y^{0.2} + \lambda(75 - 5x - 3y)$$

(2)

$$U_x = 0.8x^{-0.2}y^{0.2} - 5\lambda = 0 \tag{6.76}$$

$$U_y = 0.2x^{0.8}y^{-0.8} - 3\lambda = 0 \tag{6.77}$$

$$U_\lambda = 75 - 5x - 3y = 0 \tag{6.78}$$

(6.76)除以(6.77),

$$\frac{0.8x^{-0.2}y^{0.2}}{0.2x^{0.8}y^{-0.8}} = \frac{5\lambda}{3\lambda}$$

$$4x^{-1}y^{1} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{5}{12}x$$

代入(6.78),

$$x_0 = 12 \qquad y_0 = 5$$

CES生产函数的约束优化

6.43　按步骤(1)　构造拉格朗日函数(2)　像例 12 一样求驻点,求解下列 CES 函数满足约束的最优值.

$$q = 80[0.4K^{-0.25} + (1 - 0.4)L^{-0.25}]^{-1/0.25}$$

满足约束

$$5K + 2L = 150$$

解 ☞ (1)

$$Q = 80(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-4} + \lambda(150 - 5K - 2L)$$

(2) 用一般幂函数法则求 Q_K 及 Q_L,

$$Q_K = -320(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5}(-0.1K^{-1.25}) - 5\lambda = 0$$

$$= 32K^{-1.25}(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5} - 5\lambda = 0 \quad (6.79)$$

$$Q_L = -320(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5}(-0.15L^{-1.25}) - 2\lambda = 0$$

$$= 48L^{-1.25}(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5} - 2\lambda = 0 \quad (6.80)$$

$$Q_\lambda = 150 - 5K - 2L = 0 \quad (6.81)$$

整理,并用(6.80)除以(6.79)以消去 λ,

$$\frac{32K^{-1.25}(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5}}{48L^{-1.25}(0.4K^{-0.25} + 0.6L^{-0.25})^{-5}} = \frac{5\lambda}{2\lambda}$$

$$\frac{32K^{-1.25}}{48L^{-1.25}} = 2.5$$

$$K^{-1.25} = 3.75L^{-1.25}$$

求 −1.25 根,

$$K = (3.75)^{-1/1.25}L = (3.75)^{-0.8}L$$

为了求$(3.75)^{-0.8}$,输入 3.75,按 $\boxed{y^x}$ 键,再按 $\boxed{+/-}$ 键以确定为负号,随后输入 0.8,最后敲 $\boxed{=}$ 键,便求得$(3.75)^{-0.8} = 0.34736$.

所以,

$$K \approx 0.35L$$

代入(6.81),

$$150 - 5(0.35L) - 2L = 0 \qquad L_0 = 40 \qquad K_0 = 14$$

6.44 求 CES 生产函数

$$q = 100[0.2K^{-(-0.5)} + (1 - 0.2)L^{-(-0.5)}]^{-1/(-0.5)}$$

满足约束 $10K + 4L = 4100$ 的最优值,同问题 6.43.

解 ☞ (1)

$$Q = 100(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5})^2 + \lambda(4100 - 10K - 4L)$$

(2)

$$Q_K = 200(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5})(0.1K^{-0.5}) - 10\lambda = 0$$

$$= 20K^{-0.5}(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5}) - 10\lambda = 0 \quad (6.82)$$

$$Q_L = 200(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5})(0.4L^{-0.5}) - 4\lambda = 0$$

$$= 80L^{-0.5}(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5}) - 4\lambda = 0 \quad (6.83)$$

$$Q_\lambda = 4100 - 10K - 4L = 0 \quad (6.84)$$

(6.82)除以(6.83)以消去 λ,

$$\frac{20K^{-0.5}(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5})}{80L^{-0.5}(0.2K^{0.5} + 0.8L^{0.5})} = \frac{10\lambda}{4\lambda}$$

$$\frac{20K^{-0.5}}{80L^{-0.5}} = 2.5$$

$$K^{-0.5} = 10L^{-0.5}$$

求 −0.5 根,

$$K = (10)^{-1/0.5}L = (10)^{-2}L \qquad K = 0.01L$$

代入(6.84)

$$L_0 = 1000 \qquad K_0 = 10$$

偏导数和微分

6.45 已知, $Q = 10K^{0.4}L^{0.6}$,

(a)　求资本和劳动的边际生产率(边际产品),

(b)　当 $K=8, L=20$ 时,求增加一单位的资本和劳动对产出的影响.

解 ☞ (a)　$\mathrm{MP}_K=\frac{\partial Q}{\partial K}=0.4(10)K^{-0.6}L^{0.6}=4K^{-0.6}L^{0.6}$　　$\mathrm{MP}_L=\frac{\partial Q}{\partial L}=0.6(10)K^{0.4}L^{-0.4}=6K^{0.4}L^{-0.4}$

(b)　$\Delta Q\approx(\partial Q/\partial K)\Delta K$. 当 $K=8, L=20$ 时,对一单位的 K 的变化,有,

$$\Delta Q\approx 4K^{-0.6}L^{0.6}=4(8)^{-0.6}(20)^{0.6}.$$

利用计算器,

$$\Delta Q\approx 4K^{-0.6}L^{0.6}\approx 4(8)^{-0.6}(20)^{0.6}\approx 4(0.28717)(6.03418)\approx 6.93$$

注意　求$(8)^{-0.6}$时,先输入 8,按键 $\boxed{y^x}$,再按 $\boxed{+/-}$ 以确定为负,随后输入 0.6,最后击 $\boxed{=}$ 键,求得 $(8)^{-0.6}=0.28717$.求$(20)^{0.6}$值时,输入 20,再按 $\boxed{y^x}$ 键,随后输入 0.6,最后击 $\boxed{=}$ 键,便得到,$(20)^{0.6}=6.03418$.

对于 L 的一个单位的变化,

$$\Delta Q\approx 6K^{0.4}L^{-0.4}\approx 6(8)^{0.4}(20)^{-0.4}\approx 6(2.29740)(0.30171)\approx 4.16$$

6.46　已知在 $K=10, L=15, Q=12K^{0.3}L^{0.5}$,重做问题 6.45.

解 ☞ (a)　　$\mathrm{MP}_K=3.6K^{-0.7}L^{0.5}$　　$\mathrm{MP}_L=6K^{0.3}L^{-0.5}$

(b)　在 $K=10, L=15$ 处,对于 K 的一单位的变化,$\Delta Q\approx 3.6K^{-0.7}L^{0.5}$.

$$\Delta Q\approx 3.6(10)^{-0.7}(15)^{0.5}\approx 3.6(0.19953)(3.87298)\approx 2.78$$

对于 L 的一单位变化,

$$\Delta Q\approx 6(10)^{0.3}(15)^{-0.5}\approx 6(1.99526)(0.25820)\approx 3.09$$

6.47　已知 $Q=4\sqrt{KL}$,

(a)　求 MP_K 及 MP_L,(b)　当 $K=50, L=600$ 时,K 和 L 的一单位的变化对 Q 的效应.

解 ☞ (a)　$Q=4\sqrt{KL}=4(KL)^{1/2}$,由一般幂函数法则,

$$\mathrm{MP}_K=Q_K=2(KL)^{-1/2}(L)=\frac{2L}{\sqrt{KL}}\qquad \mathrm{MP}_L=Q_L=2(KL)^{-1/2}(K)=\frac{2K}{\sqrt{KL}}$$

(b)　在 $K=50, L=600$,对于 K 的一单位变化

$$\Delta Q\approx 2[50(600)]^{-1/2}(600)\approx 2(0.00577)(600)\approx 6.93$$

L 的一单位变化,

$$\Delta Q\approx 2[50(600)]^{-1/2}(50)\approx 2(0.00577)(50)\approx 0.58$$

6.48　已知 $Q=2\sqrt{KL}$,其中 $K=100, L=1000$,重做问题 6.47.

解 ☞ (a)　$Q=2(KL)^{1/2}$

$$\mathrm{MP}_K=(KL)^{-1/2}(L)=\frac{L}{\sqrt{KL}}\quad \mathrm{MP}_L=(KL)^{-1/2}(K)=\frac{K}{\sqrt{KL}}$$

(b)　在 $K=100, L=1000$,对于 K 的一单位变化,

$$\Delta Q\approx[100(1000)]^{-1/2}(1000)\approx(0.00316)(1000)\approx 3.16$$

对于 L 的一单位变化,

$$\Delta Q\approx[100(1000)]^{-1/2}(100)\approx(0.00316)(100)\approx 0.316$$

6.49　一个公司的销售量 s 的大小依赖于价格 P,广告 A 以及域外代表的个数 r,即,

$$s=(12\,000-900P)A^{1/2}r^{1/2}$$

求在下列情形下,销量的相应改变量,(a)　多雇用一个域外代表,(b)　增加一元的广告费,(c)　当 $P=6, r=49, A=8100$ 时,价格下降 0.10 元.

解 ☞ (a)

$$\Delta s\approx\frac{\partial s}{\partial r}\Delta r=\frac{1}{2}(12\,000-900P)A^{1/2}r^{-1/2}\Delta r$$

$$=\frac{1}{2}[12\,000-900(6)](8100)^{1/2}(49)^{-1/2}(1)=\frac{1}{2}(6600)(90)\left(\frac{1}{7}\right)=42\,429$$

(b)

$$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial A}\Delta A = \frac{1}{2}(12\,000 - 900P)A^{-1/2}r^{1/2}\Delta A$$
$$= \frac{1}{2}(6600)\left(\frac{1}{90}\right)(7)(1) = 256.67$$

(c)

$$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial P}\Delta P = -900A^{1/2}r^{1/2}\Delta P = -900(90)(7)(-0.10) = 56\,700$$

6.50　已知一个企业的销售函数与问题 6.49 中的类似：$s = (15\,000 - 1000P)A^{2/3}r^{1/4}$，估计在下列情形下，销售量的变化.(a)多雇用一个域外代表，(b)增加一元的广告费，(c)当 $P = 4, A = 6000, r = 24$ 时，价格下降 0.01 元.

解 ☞ (a)

$$\Delta s \approx \frac{1}{4}(15\,000 - 1000P)A^{2/3}r^{-3/4}\Delta r$$
$$\approx \frac{1}{4}(11\,000)(6000)^{2/3}(24)^{-3/4}(1)$$
$$\approx 2750(330.19)(0.09222) \approx 83740$$

(b)

$$\Delta s \approx \frac{2}{3}(15\,000 - 1000P)A^{-1/3}r^{1/4}\Delta A$$
$$\approx \frac{2}{3}(11\,000)(6000)^{-1/3}(24)^{1/4}(1)$$
$$\approx (7333.33)(0.05503)(2.21336) \approx 893$$

(c)

$$\Delta s \approx -1000A^{2/3}r^{1/4}\Delta P$$
$$\approx -1000(6000)^{2/3}(24)^{1/4}(-0.01)$$
$$\approx 10(330.19)(2.21336) \approx 7308$$

6.51　已知生产等量方程

$$16K^{1/4}L^{3/4} = 2144$$

利用 5.10 节隐函数法则求等量函数的斜率 dK/dL，即边际技术替代率(MRTS).

解 ☞ 移项得,

$$F(K,L) = 16K^{1/4}L^{3/4} - 2144 = 0$$

由(5.13)的隐函数法则,

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-F_L}{F_K} = \frac{-12K^{1/4}L^{-1/4}}{4K^{-3/4}L^{3/4}} = \frac{-3K}{L} = \text{MRTS}$$

与问题 4.24 的答案进行比较.

6.52　已知生产等量方程

$$25K^{3/5}L^{2/5} = 5400$$

利用隐函数法则求 MRTS.

解 ☞ 建立隐函数

$$F(K,L) = 25K^{3/5}L^{2/5} - 5400 = 0$$

利用(5.13),

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-F_L}{F_K} = \frac{-10K^{3/5}L^{-3/5}}{15K^{-2/5}L^{2/5}} = \frac{-2K}{3L} = \text{MRTS}$$

与问题 4.25 的答案进行比较.

证明

6.53　利用齐次函数的性质，证明柯布-道格拉斯生产函数

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \text{其中 } \alpha + \beta = 1$$

是规模报酬不变的.

证 ☞ 将每一个输入乘上一个常数 k 并提出系数,

$$q(kK,kL) = A(kK)^{\alpha}(kL)^{\beta} = Ak^{\alpha}K^{\alpha}k^{\beta}L^{\beta}$$
$$= k^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = k^{\alpha+\beta}(q)$$

见6.9节:如果 $\alpha+\beta=1$,是规模报酬不变的;如果 $\alpha+\beta>1$,是规模报酬递增的;如果 $\alpha+\beta<1$,则是规模报酬递减的.

6.54 已知效用函数 $U=Ax^a y^b$,预算约束 $P_x x+P_y y=B$,证明:在约束效用最大点,价格比率 P_x/P_y 一定等于边际效用比率 $\mathrm{MU}_x/\mathrm{MU}_y$.

证 ☞

$$U = Ax^a y^b + \lambda(B - P_x x - P_y y)$$

$$U_x = aAx^{a-1}y^b - \lambda P_x = 0 \tag{6.85}$$

$$U_y = bAx^a y^{b-1} - \lambda P_y = 0 \tag{6.86}$$

$$U_\lambda = B - P_x x - P_y y = 0$$

(6.85)中的 $aAx^{a-1}y^b=u_x=\mathrm{MU}_x$,及(6.86)中的 $bAx^a y^{b-1}=u_y=\mathrm{MU}_y$.由(6.85),

$$\lambda = \frac{aAx^{a-1}y^b}{P_x} = \frac{\mathrm{MU}_x}{P_x}$$

由(6.86),

$$\lambda = \frac{bAx^a y^{b-1}}{P_y} = \frac{\mathrm{MU}_y}{P_y}$$

于是,

$$\frac{\mathrm{MU}_x}{P_x} = \frac{\mathrm{MU}_y}{P_y} \qquad \frac{\mathrm{MU}_x}{\mathrm{MU}_y} = \frac{P_x}{P_y} \qquad \text{Q.E.D}$$

6.55 给定一个柯布-道格拉斯生产函数 $q=AK^{\alpha}L^{\beta}$.预算约束 $P_K K+P_L L=B$.证明:成本最小时的输入比率为

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha P_L}{\beta P_K}$$

证 ☞ 利用拉格朗日函数法,

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} + \lambda(B - P_K K - P_L L)$$

$$Q_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} - \lambda P_K = 0 \tag{6.87}$$

$$Q_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} - \lambda P_L = 0 \tag{6.88}$$

$$Q_\lambda = B - P_K K - P_L L = 0$$

由(6.87)及(6.88),

$$\frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}}{P_K} = \lambda = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{P_L}$$

整理,

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}}$$

由于 $L^{\beta-1}=L^{\beta}/L$ 及 $1/K^{\alpha-1}=K/K^{\alpha}$,所以,

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{\beta K}{\alpha L} \qquad \frac{K}{L} = \frac{\alpha P_L}{\beta P_K} \qquad \text{Q.E.D.} \tag{6.89}$$

6.56 对于一个线性的柯布-道格拉斯生产函数 $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$,证明:$\alpha=\varepsilon_{QK}$(资本产出弹性),$\beta=\varepsilon_{QL}$(劳动产出弹性).

证 ☞ 由产出弹性定义,

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q/\partial K}{Q/K} \quad 及 \quad \varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q/\partial L}{Q/L}$$

因为 $\alpha+\beta=1$,令 $\beta=1-\alpha$ 及 $k=K/L$.则

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}L = Ak^{\alpha}L$$

求边际函数,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{-(\alpha-1)} = \alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \alpha Ak^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)Ak^{\alpha}$$

求平均函数,

$$\frac{Q}{K} = \frac{Ak^{\alpha}L}{K} = \frac{Ak^{\alpha}}{K} = Ak^{\alpha-1}$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{Ak^{\alpha}L}{L} = Ak^{\alpha}$$

然后,用平均函数分别去除边际函数,得到弹性 ε,

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q/\partial K}{Q/K} = \frac{\alpha Ak^{\alpha-1}}{Ak^{\alpha-1}} = \alpha \qquad \text{Q.E.D.}$$

$$\varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q/\partial L}{Q/L} = \frac{(1-\alpha)Ak^{\alpha}}{Ak^{\alpha}} = 1-\alpha = \beta \qquad \text{Q.E.D.}$$

6.57 方程(6.89)给出了广义柯布-道格拉斯生产函数最小成本输入比率.
证明:任何广义柯布-道格拉斯生产函数有单一替代弹性,即,$\sigma = 1$.

证 ☞ 在 6.10 节中,替代弹性被定义为:由于价格比 P_L/P_K 微小的变化率所引起的最低成本比 K/L 的变化率.

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{d(P_L/P_K)}{P_L/P_K}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)}}{\dfrac{K/L}{P_L/P_K}} \tag{6.90}$$

因为(6.89)中的 α 和 β 为常数,而 P_K 和 P_L 为自变量,K/L 可以视为 P_L/P_K 的函数. 注意到在(6.90)的第二个比率中,σ = 边际函数/平均函数,首先,求(6.89)的边际函数,

$$\frac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

然后,两边同除以 P_L/P_K,求(6.89)的平均函数,

$$\frac{K/L}{P_L/P_K} = \frac{\alpha}{\beta}$$

代入(6.90),

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)}}{\dfrac{K/L}{P_L/P_K}} = \frac{\alpha/\beta}{\alpha/\beta} = 1 \qquad \text{Q.E.D.}$$

6.58 利用(6.89)给出的柯布-道格拉斯生产函数的最低成本比率检验例 10 的答案,其中 $q = K^{0.4}L^{0.5}$, $P_K = 3$ 及 $P_L = 4$.

证 ☞ 因为 $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$,由(6.89),

$$\frac{K}{L} = \frac{0.4(4)}{0.5(3)} = \frac{1.6}{1.5}$$

资本和劳动必须以 $16K:15L$ 的比率使用,与例 10 的答案 $K = 16, L = 15$ 一致.

6.59 已知 CES 函数

$$q = A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta} \tag{6.91}$$

回忆问题 6.54 的结论:如果函数达到最优,则价格比等于边际产品之比. (a) 证明 CES 生产函数的替代弹性 σ 为常数,(b) 确定 σ 的取值范围.

证 ☞ (a) 一阶条件要求

$$\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{P_L}{P_K} \tag{6.92}$$

利用广义幂函数法则求(6.91)的一阶导数,

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=-\frac{1}{\beta}A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1/\beta)-1}(-\beta)(1-\alpha)L^{-\beta-1}$$

整理得，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=(1-\alpha)A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}L^{-(1+\beta)}$$

将 A 用 $A^{1+\beta}/A^{\beta}$ 代替，

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=(1-\alpha)\frac{A^{1+\beta}}{A^{\beta}}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}L^{-(1+\beta)}$$

由(6.91)，

$$A^{1+\beta}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}=Q^{1+\beta}\quad 和\quad L^{-(1+\beta)}=1/L^{1+\beta}.$$

则

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{1-\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\beta}\tag{6.93}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\beta}\tag{6.94}$$

类似地，将(6.93)和(6.94)代入(6.92)中，消掉 A^{β} 及 Q，

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta}=\frac{P_L}{P_K}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}}=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/(1+\beta)}\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)}\tag{6.95}$$

由于 α 和 β 为常数，正如问题6.57一样，将 $\overline{K}/\overline{L}$ 视为 P_L/P_K 的函数，我们知道函数的边际与平均之比为替代弹性，首先令

$$h=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/(1+\beta)}$$

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}}=h\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)}\tag{6.96}$$

边际函数为

$$\frac{d(\overline{K}/\overline{L})}{d(P_L/P_K)}=\frac{h}{1+\beta}\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)-1}\tag{6.97}$$

平均函数为

$$\frac{\overline{K}/\overline{L}}{P_L/P_K}=\frac{h(P_L/P_K)^{1/(1+\beta)}}{P_L/P_K}=h\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)-1}\tag{6.98}$$

两式相比，得到替代弹性

$$\sigma=\frac{\dfrac{d(K/L)}{d(P_L/P_K)}}{\dfrac{K/L}{P_L/P_K}}=\frac{\dfrac{h}{1+\beta}(P_L/P_K)^{1/(1+\beta)-1}}{h(P_L/P_K)^{1/(1+\beta)-1}}=\frac{1}{1+\beta}\tag{6.99}$$

因为 β 为已知参数，所以 $\sigma=1/(1+\beta)$ 为常数.

(b) 如果 $-1<\beta<0,\sigma>1$，如果 $\beta=0,\sigma=1$. 如果 $0<\beta<\infty,\sigma<1$.

6.60 证明 CES 生产函数是次数为 1 的齐次函数，从而是规模报酬不变的.

证 ☞ 由(6.91)，

$$Q=A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

用 k 乘以 K、L，

$$\begin{aligned}f(kK,kL)&=A[\alpha(kK)^{-\beta}+(1-\alpha)(kL)^{-\beta}]^{-1/\beta}\\&=A\{k^{-\beta}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]\}^{-1/\beta}\\&=A(k^{-\beta})^{-1/\beta}[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}\\&=kA[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}=kQ\qquad \text{Q.E.D}\end{aligned}$$

6.61 求例 12 给出的 CES 生产函数 $q=75(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-2.5}$ 的替代弹性.

解 ☞ 由(6.99)，

$$\sigma = \frac{1}{1+\beta}$$

由于 $\beta=0.4$，所以 $\sigma=1/(1+0.4)=0.71$.

6.62　利用(6.95)中的最优比 K/L 检验例 12 的答案，其中 $q=75(0.3K^{-0.4}+0.7L^{-0.4})^{-2.5}$，约束为 $4K+3L=120$，$\overline{K}=11.25$ 及 $\overline{L}=25$.

解　☞ 由(6.95)，

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P_L}{P_K}\right)^{1/(1+\beta)}$$

将 $\alpha=0.3$，$1-\alpha=0.7$ 及 $\beta=0.4$ 代入

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}} = \left(\frac{0.3}{0.7}\frac{3}{4}\right)^{1/1.4} = \left(\frac{0.9}{2.8}\right)^{0.71} = (0.32)^{0.71} \approx 0.45$$

由于 $\overline{K}=11.25$ 及 $\overline{L}=25$，所以，$\overline{K}/\overline{L}=11.25/25=0.45$.

6.63　利用(6.95)检验问题 6.43 的答案.问题 6.43 中的 $q=80(0.4K^{-0.25}+0.6L^{-0.25})^{-4}$ 在 $\overline{K}=14$ 及 $\overline{L}=40$ 处达到满足约束 $5K+2L=150$ 的最优值.

解　☞ 将 $\alpha=0.4$，$1-\alpha=0.6$ 及 $\beta=0.25$ 代入(6.95)，

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}} = \left(\frac{0.4\,2}{0.6\,5}\right)^{1/0.25} = \left(\frac{0.8}{3}\right)^{0.8} \approx 0.35$$

代入 $\overline{K}=14$，$\overline{L}=40$，有 $\frac{14}{40}=0.35$.

6.64　求问题 6.63 的替代弹性.

解　☞ 由(6.99)，

$$\sigma = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1+0.25} = 0.8$$

6.65　利用(6.95)检验问题 6.44 的答案.问题 6.44 中的 $q=100(0.2K^{0.5}+0.8L^{0.5})^2$ 在 $\overline{K}=10$ 及 $\overline{L}=1000$ 处达到满足约束 $10K+4L=4100$ 的最优值.

解　☞ 因为 $\alpha=0.2$，$1-\alpha=0.8$ 及 $\beta=-0.5$

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}} = \left[\left(\frac{0.2}{0.8}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\right]^{1/(1-0.5)} = \left(\frac{0.8}{8}\right)^2 = (0.1)^2 = 0.01$$

代入 $\overline{K}=10$ 及 $\overline{L}=1000$，$\frac{10}{1000}=0.01$.

6.66　求问题 6.65 的替代弹性.

解　☞ 由(6.99)，

$$\sigma = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

6.67　(a)　利用问题 6.64 已求得的替代弹性，估计 P_L 增加 25% 对最低成本率($\overline{K}/\overline{L}$)的效应.(b)　通过将新的 P_L 代入(6.95)来验证你的答案.

解　☞ (a)替代弹性度量的是：价格比 P_L/P_K 的相对变化所引起的 $\overline{K}/\overline{L}$ 的相对变化.如果 P_L 增加 25%，$P_L=1.25(2)=2.5$.所以，$P_L/P_K=2.5/5=0.5$，与问题 6.43 中的 $\frac{2}{5}=0.4$ 比较.

价格比的增加百分比为 $(0.5-0.4)/0.4=0.25$.由于替代弹性为 0.8，则 $\overline{K}/\overline{L}$ 的预期变化百分比为

$$\frac{\Delta(\overline{K}/\overline{L})}{\overline{K}/\overline{L}} \approx 0.8(0.25) = 0.2 \quad 或 \quad 20\%$$

由于 $(\overline{K}/\overline{L})_1=0.35$，$(\overline{K}/\overline{L})_2\approx1.2(0.35)\approx0.42$.

(b)　将 $P_L=2.5$ 代入(6.95)，

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}} = \left(\frac{0.4}{0.6}\frac{2.5}{5}\right)^{0.8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.8} \approx 0.42.$$

6.68　(a)　在问题 6.43 中，如果资本的价格下降 20%，利用替代弹性估计新的比率 $\overline{K}/\overline{L}$，(b)　验证你的答案.

解 ☞ (a)　如果 P_K 下降 20%，$P_K=0.8(5)=4$，所以 $P_L/P_K=\frac{2}{4}=0.5$，可见价格比率 P_L/P_K 增加了 25%，这样一来，

$$\frac{\Delta(\overline{K}/\overline{L})}{\overline{K}/\overline{L}}=0.8(0.25)=0.2 \quad \text{或} \quad 20\%$$

及

$$(\overline{K}/\overline{L})_2\approx 1.2(0.35)=0.42.$$

(b)　将 $P_K=4$ 代入(6.95)，

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}}=\left(\frac{0.4}{0.6}\frac{2}{4}\right)^{0.8}=\left(\frac{0.8}{2.4}\right)^{0.8}=0.42$$

6.69　(a)　如果问题 6.44 中的劳动价格下降 10%，利用替代弹性估计对最低成本比率的效应.(b)　检验你的答案.

解 ☞ (a)　如果 P_L 下降 10%，$P_L=0.9(4)=3.6$ 及比率 P_L/P_K 下降 10%. 由于 P_L/P_K 下降 10%，替代弹性为 2，

$$\frac{\Delta(\overline{K}/\overline{L})}{\overline{K}/\overline{L}}\approx 2(-0.10)=-0.20 \quad \text{或} \quad -20\%$$

由于原来的 $\overline{K}/\overline{L}=0.01$，$(\overline{K}/\overline{L})_2\approx(1-0.2)(0.01)=0.8(0.01)=0.008$.

(b)　将 $P_L=3.6$ 代入(6.95)，

$$\frac{\overline{K}}{\overline{L}}=\left(\frac{0.2}{0.8}\frac{3.6}{10}\right)^2=\left(\frac{0.72}{8}\right)^2=(0.09)^2=0.0081$$

第七章　指数函数和对数函数

7.1　指数函数

前面章节主要涉及的是幂函数，$y=x^a$，其中变量 x 为底，常数 a 为指数．在本章中，我们将引进一种以常数 a 为底变量 x 为指数的新的重要的函数，即指数函数，定义为

$$y=a^x \quad a>0 \quad 及 \quad a\neq 1$$

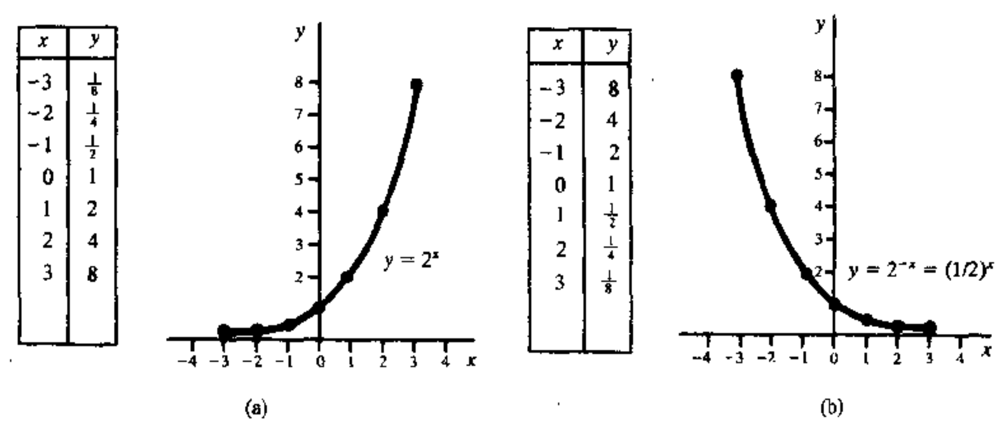
常用来表示增长或衰退的比率，比如，复利和折旧．对于给定的 $y=a^x$，$a>0$，及 $a\neq 1$，指数函数具有下列一般性质：

1. 函数的定义域是所有的实数集；函数的值域是所有的正实数集．即对所有的 x，甚至 $x<0$，$y>0$．
2. 对 $a>1$，函数为增且凸的；对 $0<a<1$，函数为减且凹的．
3. 在 $x=0$ 时，$y=1$，与底无关．

见例 1、问题 7.1 和问题 7.2；有关指数的复习，见 1.1 节及问题 1.1．

例 1　已知(a)　$y=2^x$ 及(b)　$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，指数函数的上述性质由图 7-1 中的表和函数图形一目了然．更复杂的指数函数可以借助于计算器上的 $\boxed{y^x}$ 键来检验．





x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

图 7-1

7.2　对数函数

交换定义为 $y=a^x$ 的指数函数 f 的变量得到一个新的函数 g，定义为 $x=a^y$，即，f 中的任一有序的数对都能在 g 中以逆序出现．例如，如果 $f(2)=4$，则 $g(4)=2$；如果 $f(3)=8$，则 $g(8)=3$．我们称这个新函数，指数函数 f 的反函数为以 a 为底的对数函数．通常写成

$$y=\log_a x \qquad a>0, a\neq 1$$

$\log_a x$ 是为了得到 x，a 必须取得的幂．除了 1 以外的任何正数都可以作对数的底．x 的普通对数，记作 $\log_{10}x$ 或简写为 $\log x$，是为了得到 x，10 必须取得的幂．对于 $y=\log_a x$，$a>0$，$a\neq 1$，对数函数具有下列性质：

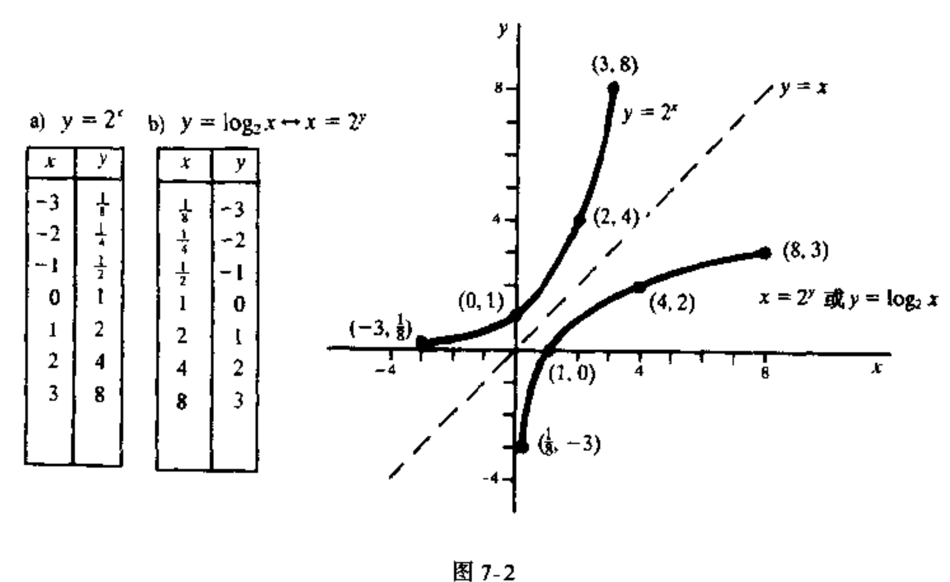
1. 函数的定义域为所有的正实数集；值域为所有的实数集——与其反函数指数函数的恰好相反．

2. 底 $a>1$，$f(x)$ 为增且凹的，底 $0<a<1$，$f(x)$ 为减且凸的．

3. 在 $x=1$ 时，$y=0$，与底无关．

4. 见例 2～例 4、问题 7.5 和问题 7.6．

例 2　图 7-2 给出了形如 $y=2^x$ 和 $x=2^y$ 的交换 x 和 y 的两个函数 f,g 的图形，表明一个函数是另一个函数沿着 45°线 $y=x$ 的镜像，即如果 $f(x)=y$，则 $g(y)=x$．而等价地常被表示为 $y=\log_2 x$．



a) $y=2^x$

x	y
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

b) $y=\log_2 x \leftrightarrow x=2^y$

x	y
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

图 7-2

例 3　我们知道，x 的普通对数是为了得到 x，10 必须取得的幂．

$\log 10=1$　　因为 $10^1=10$　　$\log 1=0$　　因为 $10^0=1$

$\log 100=2$　　因为 $10^2=100$　　$\log 0.1=-1$　　因为 $10^{-1}=0.1$

$\log 1000=3$　　因为 $10^3=1000$　　$\log 0.01=-2$　　因为 $10^{-2}=0.01$

例 4　对于恰好是底的整数幂的对数，不必借助计算器就能很容易求得．

$\log_7 49=2$　　因为 $7^2=49$　　$\log_2 16=4$　　因为 $2^4=16$

$\log_{36} 6=\dfrac{1}{2}$　　因为 $36^{1/2}=6$　　$\log_{16} 2=\dfrac{1}{4}$　　因为 $16^{1/4}=2$

$\log_3 \dfrac{1}{9}=-2$　　因为 $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　　$\log_2 \dfrac{1}{8}=-3$　　因为 $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

对于不恰好是底的整数幂的对数，对数表或计算器是必须的．

7.3　指数和对数的性质

设 $a,b>0$；$a,b\neq 1$；以及 x,y 为任意实数：

1. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$　　　　2. $\dfrac{1}{a^x}=a^{-x}$

3. $\dfrac{a^x}{b^y}=a^{x-y}$　　　　4. $(a^x)^y=a^{xy}$

5. $a^x\cdot b^x=(ab)^x$　　　　6. $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

对于 a,x,y 为正实数，n 为实数，及 $a\neq 1$：

1. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$　　　　2. $\log_a=\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

3. $\log_a x^n=n\log_a x$　　　　4. $\log_a \sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{n}\log_a x$

指数性质见 1.1 节和问题 1.1，对数性质见例 5 和问题 7.12～7.16．

表 7-1

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0.0000	6	0.7782	11	1.0414	16	1.2041
2	0.3010	7	0.8451	12	1.0792	17	1.2304
3	0.4771	8	0.9031	13	1.1139	18	1.2553
4	0.6021	9	0.9542	14	1.1461	19	1.2788
5	0.6990	10	1.0000	15	1.1761	20	1.3010

例 5　用对数求解下列简单的问题，以说明对数的性质.

(a) $x=7\cdot 2$

$$\log x=\log 7+\log 2$$
$$\log x=0.8451+0.3010$$
$$\log x=1.1461$$
$$x=14$$

(b)

$$x=18\div 3$$
$$\log x=\log 18-\log 3$$
$$\log x=1.2553-0.4771$$
$$\log x=0.7782$$
$$x=6$$

(c)

$$x=3^2$$
$$\log x=2\log 3$$
$$\log x=2(0.4771)$$
$$\log x=0.9542$$
$$x=9$$

(d)

$$x=\sqrt[3]{8}$$
$$\log x=\frac{1}{3}\log 8$$
$$\log x=\frac{1}{3}(0.9031)$$
$$\log x=0.3010$$
$$x=2$$

7.4　自然指数和对数函数

指数和对数函数最常用的底是无理数 e. 用数学表示为

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2.71828 \tag{7.1}$$

以 e 为底的指数函数称为自然指数函数，记作，$y=e^x$；以 e 为底的对数称为自然对数函数，表示为，$y=\log_e x$，或常常表示为 $\ln x$. 所以 $\ln x$ 是为得到 x，e 必须取得的指数或幂.

对于有相同底的指数和对数，一函数是另一个的反函数，即有序对 (a,b) 属于 e^x 的集，当且仅当 (b,a) 属于 $\ln x$ 集. 同其他的指数和对数函数一样，自然指数和对数函数遵循相同的规则，而且可借助计算器上的 $\boxed{e^x}$ 和 $\boxed{\ln x}$ 键来估算.

7.5　求解自然指数和对数函数

由于自然指数函数和自然对数函数互为反函数，一个往往对另一个求解是有帮助的. 记住 $\ln x$ 是为了得到 x，e 必须取得的幂，有：

1. e 取常数 $(a>0)$、变量 $(x>0)$ 或一元变量的函数 $(f(x)>0)$ 的对数次幂必等于该常数、变量或函数.

$$e^{\ln a}=a\quad e^{\ln x}=x\quad e^{\ln f(x)}=f(x) \tag{7.2}$$

2. 反之，e 的常数、变量或一变量的函数次幂的自然对数也等于该常数，变量或变量的函数.

$$\ln e^a=a\quad \ln e^x=x\quad \ln e^{f(x)}=f(x) \tag{7.3}$$

见例 6 及问题 7.18～7.22.

例 6　用 (7.2) 和 (7.3) 的原理求解下列方程中的 x.

(a)　$5e^{x+2}=120$

解 ☞(1) 用代数方法求解 e^{x+2},

$$5e^{x+2}=120$$
$$e^{x+2}=24$$

(2) 两边取自然对数,消去 e,

$$\ln e^{x+2}=\ln 24$$
$$x+2=\ln 24$$

由(7.3),

$$x=\ln 24-2$$

在你的计算器上输入 24,并按 ln x 键,求得 $\ln 24=3.17805$.代入并求解,

$$x=3.17805-2=1.17805$$

(b) $6\ln x-7=12.2$

解 ☞(1) 代数地求解 $\ln x$,

$$6\ln x=19.2$$
$$\ln x=3.2$$

(2)令两边为 e 的指数,消去自然对数的表达式,

$$e^{\ln x}=e^{3.2}$$

由(7.2),

$$x=e^{3.2}$$

在你的计算器上输入 3.2,再按 e^x 键,求得 $e^{3.2}=24.53253$ 并代入,

$$x=24.53253$$

注意 在很多计算器上,e^x 键是 ln x 键的第二功能键,在按 ln x 键后,为了激活 e^x 键,你必须首先按 **INV**(**shift** 或 **2ndF**)键.

7.6 非线性函数的对数变换

线性代数和线性回归分析涉及普通或二阶最小二乘法,它们是经济分析中常见的工具.一些非线性函数,如道格拉斯生产函数,通过简单的对数变换,可以很容易地转换为线性的.另一些,如 CES 生产函数却不能.例如,由对数的性质,给定广义的道格拉斯生产函数

$$q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$
$$\ln q=\ln A+\alpha\ln K+\beta\ln L \tag{7.4}$$

很显然,它是对数-线性的.但是,对于给定的 CES 生产函数.

$$q=A[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}$$
$$\ln q=\ln A-\frac{1}{\beta}\ln[\alpha K^{-\beta}+(1-\alpha)L^{-\beta}]$$

由于 $K^{-\beta}$ 和 $L^{-\beta}$,CES 在对数意义上也不是线性的.用普通最小二乘法估计道格拉斯生产函数的对数变换的系数 α 和 β,可以直接求出 K 和 L 的产出弹性.见问题 6.56.

习题解答

图形

7.1 将下列底 $a>1$ 的指数函数画在同一个坐标系中,验证(1) 函数绝不等于零,(2) 它们都通过(0,1)点,(3) 它们都有正的斜率且凸.

(a) $y=3^x$ (b) $y=4^x$ (c) $y=5^x$

解 ☞

(a)

x	y
−3	$\frac{1}{27}$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

(b)

x	y
−3	$\frac{1}{64}$
−2	$\frac{1}{16}$
−1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16
3	64

(c)

x	y
−3	$\frac{1}{125}$
−2	$\frac{1}{25}$
−1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25
3	125

图 7-3

7.2　将下列底 $0<a<1$ 的指数函数画在同一坐标系中，验证(1)　函数绝不等于零，(2)　它们都通过(0,1)点，(3)　它们都有负的斜率且凸.

(a)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$　(b)　$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$　(c)　$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x=5^{-x}$

解 ☞

(a)

x	y
−3	27
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

(b)

x	y
−3	64
−2	16
−1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{64}$

(c)

x	y
−3	125
−2	25
−1	5
0	1
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{1}{125}$

图 7-4

7.3　利用计算器或查表，描绘下列自然指数函数 $y=e^{kx}$，其中 $k>0$，注意(1)　函数绝不等于零，(2)　它们通过(0,1)点，(3)　它们的斜率为正且为凸函数.

(a)　$y=e^{0.5x}$　(b)　$y=e^x$　(c)　$y=e^{2x}$

解 ☞

(a)

x	y
−2	0.37
−1	0.61
0	1.00
1	1.65
2	2.72

(b)

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1.00
1	2.72
2	7.39

(c)

x	y
−2	0.02
−1	0.14
0	1.00
1	7.39
2	54.60

图 7-5

7.4　绘制下列自然指数函数 $y=e^{kx}$，其中 $k<0$ 的图形，注意(1)　函数绝不等于零，(2)　它们都通过(0,1)点，(3)　它们的斜率为负且为凸函数.

(a)　$y=e^{-0.5x}$　(b)　$y=e^{-x}$　(c)　$y=e^{-2x}$

解 ☞

(a)

x	y
−2	2.72
−1	1.65
0	1.00
1	0.61
2	0.37

(b)

x	y
−2	7.39
−1	2.72
0	1.00
1	0.37
2	0.14

(c)

x	y
−2	54.60
−1	7.39
0	1.00
1	0.14
2	0.02

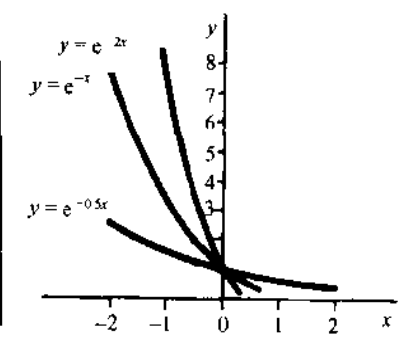
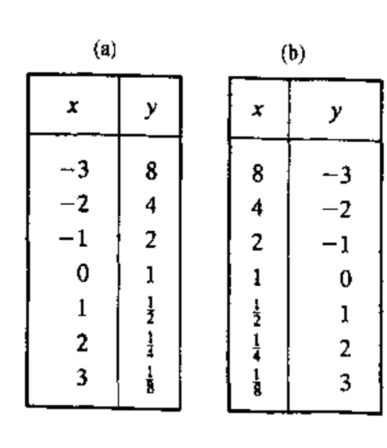


图 7-6

7.5　构造下列函数的图表，以说明一个函数是其反函数的镜像，注意到：(1)　(a)的定义域为(b)的值域，而(a)的值域为(b)的定义域；(2)　以 $0<a<1$ 为底的对数函数是减的且凸.

(a)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$　(b)　$x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$ 或 $y=\log_{1/2}x$

解 ☞



(a)

x	y
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

(b)

x	y
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

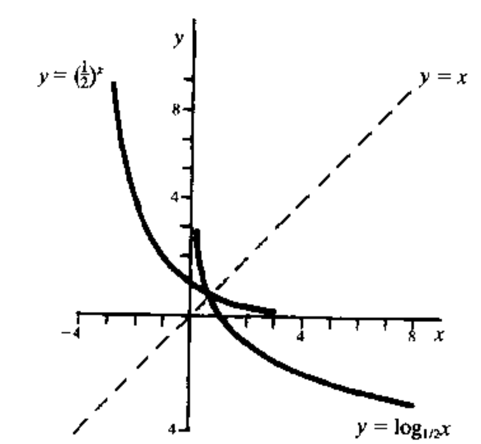


图 7-7

7.6　已知(a)　$y=e^x$ 及(b)　$y=\ln x$，利用计算器或查表，画出下列函数的图形，验证一个函数是其反函数的镜像. 注意到，(1)　(a)的定义域是(b)的值域，而(a)的值域是(b)的定义域.(2)　当 $0<x<1$ 时，$\ln x$ 是负值，当 $x>1$ 时，$\ln x$ 为正值；(3)　$\ln x$ 是增且凹的.

解 ☞

(a) $y = e^x$

x	y
−2	0.13534
−1	0.36788
0	1.00000
1	2.71828
2	7.38906

(b) $y = \ln x$

x	y
0.13534	−2
0.36788	−1
1.00000	0
2.71828	1
7.38906	2

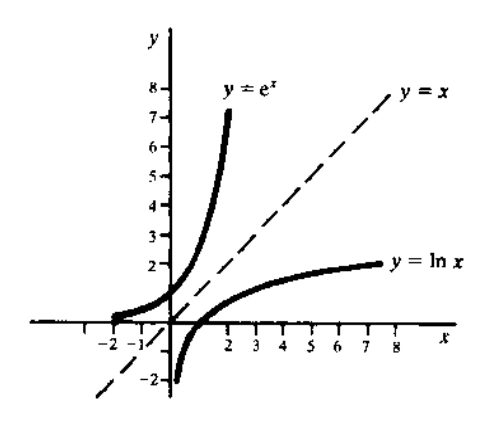


图 7-8

指数-对数的转换

7.7 将下列的对数函数转化为等价指数函数形式：

解 ☞ (a) $\log_8 64 = 2$
$$64 = 8^2$$

(b) $\log_5 125 = 3$
$$125 = 5^3$$

(c) $\log_7 \frac{1}{7} = -1$
$$\frac{1}{7} = 7^{-1}$$

(d) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

(e) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$
$$6 = 36^{1/2}$$

(f) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$
$$2 = 16^{1/4}$$

(g) $\log_a y = 6x$
$$y = a^{6x}$$

(h) $\log_2 y = 7x$
$$y = 2^{7x}$$

7.8 将下列自然对数变换为自然指数形式：

解 ☞ (a) $\ln 32 = 3.46574$
$$32 = e^{3.46574}$$

(b) $\ln 0.8 = -0.22314$
$$0.8 = e^{-0.22314}$$

(c) $\ln 20 = 2.99573$
$$20 = e^{2.99573}$$

(d) $\ln 2.5 = 0.91629$
$$2.5 = e^{0.91629}$$

(e) $\ln y = -4x$
$$y = e^{-4x}$$

(f) $\ln y = 2t + 1$
$$y - e^{2t+1}$$

7.9 将下列指数变换为对数形式：

解 ☞ (a) $81 = 9^2$
$$\log_9 81 = 2$$

(b) $32 = 2^5$
$$\log_2 32 = 5$$

(c) $\frac{1}{9} = 3^{-2}$
$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

(d) $\frac{1}{16} = 2^{-4}$
$$\log_2 \frac{1}{16} = -4$$

(e) $5 = 125^{1/3}$
$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

(f) $11 = 121^{1/2}$
$$\log_{121} 11 = \frac{1}{2}$$

(g) $27 = 9^{3/2}$
$$\log_9 27 = \frac{3}{2}$$

(h) $64 = 256^{3/4}$
$$\log_{256} 64 = \frac{3}{4}$$

7.10 将下列自然指数表达式转换为等价的自然对数形式：

解 ☞ (a) $4.8=e^{1.56862}$

$\ln 4.8=1.56862$

(b) $15=e^{2.70805}$

$\ln 15=2.70805$

(c) $0.6=e^{-0.51083}$

$\ln 0.6=-0.51083$

(d) $130=e^{4.86753}$

$\ln 130=4.86753$

(e) $y=e^{(1/2)t}$

$\ln y=\frac{1}{2}t$

(f) $y=e^{t-5}$

$\ln y=t-5$

7.11 利用等价表达式求解下列的 x, y 或 a：

解 ☞ (a) $y=\log_{30}900$

$900=30^y$

$y=2$

(b) $y=\log_2\frac{1}{32}$

$\frac{1}{32}=2^y$

$y=-5$

(c) $\log_4 x=3$

$x=4^3$

$x=64$

(d) $\log_{81}x=\frac{3}{4}$

$x=81^{3/4}$

$x=27$

(e) $\log_a 27=3$

$27=a^3$

$a=27^{1/3}$

$a=3$

(f) $\log_a 4=\frac{2}{3}$

$4=a^{2/3}$

$a=4^{3/2}$

$a=8$

(g) $\log_a 125=\frac{3}{2}$

$125=a^{3/2}$

$a=125^{2/3}$

$a=25$

(h) $\log_a 8=\frac{3}{4}$

$8=a^{3/4}$

$a=8^{4/3}$

$a=16$

对数和指数函数的性质

7.12 利用对数的性质写出下面和、差或积的表达式：

解 ☞ (a) $\log_a 56x$

$\log_a 56x=\log_a 56+\log_a x$

(b) $\log_a 33x^4$

$\log_a 33x^4=\log_a 33+4\log_a x$

(c) $\log_a x^2y^3$

$\log_a x^2y^3=2\log_a x+3\log_a y$

(d) $\log_a u^5v^{-4}$

$\log_a u^5v^{-4}=5\log_a u-4\log_a v$

(e) $\log_a\frac{6x}{7y}$

$$\begin{aligned}\log_a\frac{6x}{7y}&=\log_a 6x-\log_a 7y\\&=\log_a 6+\log_a x-(\log_a 7+\log_a y)\\&=\log_a 6+\log_a x-\log_a 7-\log_a y\end{aligned}$$

(f) $\log_a\frac{x^7}{y^4}$

$\log_a\frac{x^7}{y^4}=7\log_a x-4\log_a y$

(g) $\log_a\sqrt[3]{x}$

$\log_a\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\log_a x$

7.13 利用对数的性质写出下面自然对数的和、差或积的表达式：

解 ☞ (a) $\ln 76x^3$

$\ln 76^3=\ln 76+3\ln x$

(b) $\ln x^5y^2$

$\ln x^5y^2=5\ln x+2\ln y$

(c) $\ln\frac{x^4}{y^6}$

(d) $\ln\frac{8x}{9y}$

$\ln\frac{8x}{9y}=\ln 8x-\ln 9y$

$$\ln \frac{x^4}{y^6} = 4\ln x - 6\ln y$$

$= \ln 8 + \ln x - (\ln 9 + \ln y)$

$= \ln 8 + \ln x - \ln 9 - \ln y$

(e) $\ln \sqrt[4]{x}$

$$\ln \sqrt[4]{x} = \frac{1}{4}\ln x$$

(f) $\ln(x\sqrt[5]{y})$

$$\ln(x\sqrt[5]{y}) = 5\ln x + \frac{1}{2}\ln y$$

(g) $\ln \frac{3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{y}}$

$$\ln \frac{3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{y}} = \ln 3 + \frac{1}{5}\ln x - \frac{1}{2}\ln y$$

(h) $\ln \sqrt{\frac{x^7}{y^4}}$

$$\ln \sqrt{\frac{x^7}{y^4}} = \frac{1}{2}(7\ln x - 4\ln y)$$

7.14 利用指数的性质简化下列表达式，其中 $a, b > 0$ 且 $a \neq b$：

解 ☞ (a) $a^x \cdot a^y$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

(b) $a^{4x} \cdot a^{5y}$

$$a^{4x} \cdot a^{5y} = a^{4x+5y}$$

(c) $\frac{a^{2x}}{a^{3y}}$

$$\frac{a^{2x}}{a^{3y}} = a^{2x-3y}$$

(d) $\frac{a^x}{b^x}$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

(e) $\sqrt{a^{7x}}$

$$\sqrt{a^{7x}} = (a^{7x})^{1/2} = a^{(7/2)x}$$

(f) $(a^x)^{4y}$

$$(a^x)^{4y} = a^{4xy}$$

7.15 简化下列自然指数表达式：

解 ☞ (a) $e^{5x} \cdot e^{2y}$

$$e^{5x} \cdot e^{2y} = e^{5x+2y}$$

(b) $(e^{3x})^5$

$$(e^{3x})^5 = e^{15x}$$

(c) $\frac{e^{8x}}{e^{6x}}$

$$\frac{e^{8x}}{e^{6x}} = e^{8x-6x} = e^{2x}$$

(d) $\frac{e^{4x}}{e^{7x}}$

$$\frac{e^{4x}}{e^{7x}} = e^{4x-7x} = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}}$$

7.16 简化下列自然对数表达式：

解 ☞ (a) $\ln 8 + \ln x$

$$\ln 8 + \ln x = \ln 8x$$

(b) $\ln x^5 - \ln x^3$

$$\ln x^5 - \ln x^3 = \ln \frac{x^5}{x^3} = \ln x^2 = 2\ln x$$

(c) $\ln 12 + \ln 5 - \ln 6$

$$\ln 12 + \ln 5 - \ln 6 = \ln \frac{12 \cdot 5}{6} = \ln 10$$

(d) $\ln 7 - \ln x + \ln 9$

$$\ln 7 - \ln x + \ln 9 = \ln \frac{7 \cdot 9}{x} = \ln \frac{63}{x}$$

(e) $\frac{1}{2}\ln 81$

$$\frac{1}{2}\ln 81 = \ln 81^{1/2} = \ln 9$$

(f) $5\ln \frac{1}{2}$

$$5\ln \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \ln \frac{1}{32}$$

(g) $\frac{1}{3}\ln 27 + 4\ln 2$

$$\frac{1}{3}\ln 27 + 4\ln 2 = \ln 27^{1/3} + \ln 2^4 = \ln(3 \cdot 16) = \ln 48$$

(h) $2\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 8$

$$2\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 8 = \ln 4^2 - \ln 8^{1/3} = \ln \frac{16}{2} = \ln 8$$

7.17 简化下列指数表达式：

解 ☞ (a) $e^{3\ln x}$

$e^{3\ln x} = e^{\ln x^3}$ 但根据(7.2)，$e^{\ln f(x)} = f(x)$，因此

$$e^{3\ln x} = x^3$$

(b) $e^{4\ln x + 5\ln y}$

$$e^{4\ln x + 5\ln y} = e^{\ln x^4} \cdot e^{\ln y^5} = x^4 y^5$$

(c) $e^{(1/2)\ln 6x}$

$$e^{(1/2)\ln 6x} = e^{\ln(6x)^{1/2}} = (6x)^{1/2} = \sqrt{6x}$$

(d)　$e^{4\ln x-9\ln y}$

$$e^{4\ln x-9\ln y}=\frac{e^{\ln x^4}}{e^{\ln y^9}}=\frac{x^4}{y^9}$$

求解指数和对数函数

7.18　利用 7.5 节中的技术求解下列自然指数函数中的 x:

(a)　$3e^{5x}=8943$

解　☞ (1)　代数求解 e^{5x}.

$$e^{5x}=2981$$

(2)　两边取自然对数,消去 e,

$$\ln e^{5x}=\ln 2981$$

由(7.3),

$$5x=\ln 2981$$

为求 ln2981 的值,在一计算器上输入 2981,再按 ln x 键.就求得 $\ln 2981=8.00001$. 再代入并代数求解,

$$5x=8$$
$$x=1.6$$

(b)　$4e^{3x-1.5}=360$

解　☞ (1)　求解 $e^{3x-1.5}$,　$e^{3x-1.5}=90$

(2)　取自然对数,　$\ln e^{3x-1.5}=\ln 90$

由(7.3),　$3x-1.5=\ln 90$

对于 ln90,在计算器上输入 90,按 ln x 键,求得 $\ln 90=4.49981\approx 4.5$. 代入并求解.

$$3x-1.5=4.5\qquad x=2$$

(c)　$\frac{1}{2}e^{x^2}=259$

解　☞ (1)　求解 e^{x^2},　$e^{x^2}=518$

(2)　取自然对数,　$\ln e^{x^2}=\ln 518$

由(7.3),　$x^2=6.24998\approx 6.25\quad x=\pm 2.5$

7.19　利用 7.5 节中的技术求解下列自然对数函数中的 x:

(a)　$5\ln x+8=14$

解　☞ (1)　代数求解 $\ln x$.

$$5\ln x=6\qquad \ln x=1.2$$

(2)　令方程两边同为 e 的指数,消去自然对数,

$$e^{\ln x}=e^{1.2}$$

由(7.2),

$$x=e^{1.2}$$

为了求 $e^{1.2}$的值,在计算器上输入 1.2,按 e^x 键,便得到 $e^{1.2}=3.32012$,并代入.如果 e^x 为 ln x 的第二功能键,输入 1.2,再按 ln x,随后按 INV 键.

$$x=3.32012\approx 3.32$$

(b)　$\ln(x+4)^2=3$

解　☞ (1)　由对数法则简化并求解 $\ln(x+4)$,

$$2\ln(x+4)=3$$
$$\ln(x+4)=1.5$$

(2)　$e^{\ln(x+4)}=e^{1.5}$

由(7.2),

$$x+4=e^{1.5}$$

利用计算器，

$$x+4=4.48169$$

$$x=4.48169-4=0.48169$$

(c) $\ln\sqrt{x+34}=2.55$

解 ☞ (1)简化并求解

$$\frac{1}{2}\ln(x+34)=2.55$$

$$\ln(x+34)=5.1$$

(2)由(7.2)

$$x+34=e^{5.1}\approx 164$$

$$x=130$$

7.20 求解下列方程中的 x，以 y 表示.

(a) $\log_a x=y^3$

解 ☞

$$x=a^{y^3}$$

(b) $\log_a x=\log_a 3+\log_a y$

解 ☞

$$x=3y$$

因为对数相加 = 代数相乘.

(c) $\ln x=3y$

解 ☞

$$x=e^{3y}$$

(d) $\ln x=\log_a y$

解 ☞

$$x=e^{\log_a y}$$

(e) $\log_a x=\ln y$

解 ☞

$$x=a^{\ln y}$$

(f) $y=ge^{hx}$

解 ☞ 当 x 为自然指数函数的指数时，为求解 x，需两边取自然对数，并代数求解，

$$\ln y=\ln g+hx\ln e=\ln g+hx$$

$$x=\frac{\ln y-\ln g}{h}$$

(g) $y=ae^{x+1}$

解 ☞

$$\ln y=\ln a+(x+1)\ln e=\ln a+x+1$$

$$x=\ln y-\ln a-1$$

(h) $y=p(1+i)^x$

解 ☞ 当 x 为指数函数的指数时，这里的底并不是 e，为求解 x，两边取普通对数，并代数求解.

$$\log y=\log p+x\log(1+i)$$

$$x=\frac{\log y-\log p}{\log(1+i)}$$

7.21 利用普通对数求解下列方程：

(a) $y=625(0.8)$

解 ☞ (1) 方程两边取普通对数，利用(7.3)的对数性质，

$$\log y=\log 625+\log 0.8$$

为求 log625 和 log0.8 的值. 在计算器上分别输入 625 和 0.8，再按 [logx]，便求得它们的值.

$$\log y=2.79588+(-0.09691)=2.69897$$

(2) 由于 $\log y=2.69897$ 意味着为达到 y，10 必须取得 2.69897 次幂. 为求 y，输入 2.69897，按 [10^x]

键，便求得 $10^{2.69897}=500$，并代入．如果 $\boxed{10^x}$ 是 $\boxed{\log x}$ 的第二功能键，则输入 2.69897，再按 $\boxed{\log x}$，随后按 $\boxed{\text{INV}}$ 键．

$$y = \text{antilog } 2.69897 = 10^{2.69897} = 500$$

(b) $y=\dfrac{40}{100}$

解 ☞ (1)

$$\log y = \log 40 - \log 100$$

(2)

$$\log y = 1.60206 - 2 = -0.39794$$

$$y = \text{antilog}(-0.39794) = 10^{-0.39794} = 0.4$$

(c) $y=\dfrac{130}{0.25}$

解 ☞ (1)

$$\log y = \log 130 - \log 0.25$$

(2)

$$\log y = 2.11394 - (-0.60206) = 2.71600$$

$$y = \text{antilog } 2.71600 = 10^{2.71600} = 519.996 \approx 520$$

(d) $y=(1.06)^{10}$

解 ☞ (1)

$$\log y = 10\log 1.06$$

(2)

$$\log y = 10(0.02531) = 0.2531$$

$$y = \text{antilog}0.2531 = 10^{0.2531} = 1.791$$

(e) $y=1024^{0.2}$

解 ☞ (1)

$$\log y = 0.2\log 1024$$

(2)

$$\log y = 0.2(3.0103) = 0.60206$$

$$y = \text{antilog}0.60206 = 10^{0.60206} = 4$$

(f) $y=\sqrt[5]{1024}$

解 ☞ (1)

$$\log y = \frac{1}{5}\log 1024$$

(2)

$$\log y = \frac{1}{5}(3.0103) = 0.60206$$

$$y = \text{antilog } 0.60206 = 10^{0.60206} = 4$$

(f)的答案与 e)的相同，因为 $y=1024^{1/5}=1024^{0.2}=4$.

7.22 利用自然对数求解下列方程：

(a) $y=12.5^3$

解 ☞ (1)

$$\ln y = 3\ln 12.5$$

为求 ln12.5 的值，在计算器上输入 12.5，再按 $\boxed{\ln x}$ 键，便求得 $\ln 12.5=2.52573$ 并代入．

(2)

$$\ln y = 3(2.52573) = 7.57719$$

由于 $\ln y=7.57719$ 意味着为达到 y，e 必须取 7.57719 次幂，为求得 7.57719 的反对数，即 y，在计算器上输入 7.57719．按 $\boxed{e^x}$ 键，求得 $e^{7.57719}\approx 1953.1$，并代入．如果 $\boxed{e^x}$ 为 $\boxed{\ln x}$ 的第二功能键，输入 7.57719．按 $\boxed{\ln x}$ 键后按 $\boxed{\text{INV}}$ 键．

$$y = \text{antilog}_e 7.57719 = e^{7.57719} \approx 1953.1$$

(b) $y=\sqrt[4]{28\,561}$

解 ☞ (1)

$$\ln y = \frac{1}{4}\ln 28\,561$$

(2)

$$\ln y = \frac{1}{4}(10.25980) = 2.56495$$

$$y = \text{antilog}_e 2.56495 = e^{2.56495} = 13$$

第八章　经济中的指数和对数函数

8.1　复利

给定本金 P,每年以利率 i 复利一次,t 年底终值 S 由指数函数确定,

$$S = P(1+i)^t \tag{8.1}$$

如果每年复利 m 次,t 年后终值为

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{8.2}$$

如果利率为 100%,一年内连续复利,终值为

$$S = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = P(2.71828) = Pe$$

对于非 100% 的利率 r 及非一年的时期 t,终值为

$$S = Pe^{rt} \tag{8.3}$$

对于负增长率,比如,折旧或贬值,公式同样适用,只是 i 或 r 为负的.见例 1、问题 8.1~8.6 及问题 8.9~8.17.

例 1　求 \$ 100 本金,以 10% 复利两年的终值:

1. 每年复利一次,$S=P(1+i)^t$.

$$S = 100(1+0.10)^2 = 121$$

2. 半年复利一次,$S=P[1+(i/m)]^{mt}$,其中 $m=2$ 及 $t=2$.

$$S = 100\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^{2(2)} = 100(1+0.05)^4$$

为求$(1.05)^4$ 的值,在计算器上输入 1.05,按 $\boxed{y^x}$ 键,再输入 4,并敲 $\boxed{=}$ 键,便得到$(1.05)^4=1.2155$.代入,

$$S = 100(1.2155) = 121.55$$

3. 连续复利,$S=Pe^{rt}$.

$$S = 100e^{0.1(2)} = 100e^{0.2}$$

对于 $e^{0.2}$,在计算器上输入 0.2,按 $\boxed{e^x}$ 键,得到 $e^{0.2}=1.2214$,代入.如果 $\boxed{e^x}$ 键为 $\boxed{\ln x}$ 键的第二功能键,输入 0.2,按 $\boxed{\ln x}$ 键后按 $\boxed{\text{INV}}$ 键.

$$S = 100(1.2214) = 122.14$$

8.2　实际利率与名义利率

在例 1 中,相同的本金及相同的名义利率,由于复利种类不同,产生不同的实际利率.当每年复利一次,两年后 \$ 100 值 \$ 121;当半年复利一次,两年后,$S=\$\,121.55$;当连续复利时,$S=\$\,122.14$.

为了求出多次复利的实际年利率:

$$P(1+i_e)^t = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

两边同除以 P,并开 t 次方根,

$$1+i_e = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m$$

$$i_e = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m \quad 1 \tag{8.4}$$

为了求出连续复利的实际年利率：

$$1+i_e=e^r$$

$$i_e=e^r-1 \tag{8.5}$$

见例2、问题8.7～8.8.

例2　名义利率为10%，期限为2年.求(1)　半年复利一次，(2)　连续复利的实际年利率.

解　☞(1)　半年复利一次，

$$i_e=\left(1+\frac{i}{m}\right)^m-1=(1.05)^2-1$$

对于$(1.05)^2$，在计算器上输入1.05，按$\boxed{x^2}$键，或按$\boxed{y^x}$键，并输入2随后按$\boxed{=}$键，便得到$(1.05)^2=1.1025$，代入

$$i_e=1.1025-1=0.1025=10.25\%$$

(2)　连续复利，

$$i_e=e^r-1=e^{0.1}-1$$

为了求$e^{0.1}$的值，先在计算器上输入0.1，再按$\boxed{e^x}$键，得到$e^{0.1}=1.10517$，并代入，

$$i_e=1.10517-1=0.10517\approx 10.52\%$$

8.3　贴现

因为手中的钱可以借给别人，赚取利息，这样一年后会有更多的钱，所以将来钱的总和与现在的钱数不等价.如果在目前的市场条件下，一个人可以每年赚取8%的利率，则一年后\$100长到\$108.所以，从现在起一年后的\$108只值今天的\$100.

贴现是指决定将来钱数S的现值P的过程.如果在每年复利一次的情形下，

$$S=P(1+i)^t$$

则

$$P=\frac{S}{(1+i)^t}=S(1+i)^{-t} \tag{8.6}$$

类似地，在多次复利的情形下

$$P=S[1+(i/m)]^{-mt}$$

在连续复利的情形下

$$P=Se^{-rt}$$

当求现值时，利率被称为贴现率.见例3及问题8.18～8.22.

例3　求5年期，面值为\$1000，没有息票的债券的现值.假设在每年复利一次的情形下，可获得的利率为9%.

$$P=S(1+i)^{-t}=1000(1+0.09)^{-5}$$

为求$(1.09)^{-5}$的值，在计算器上输入1.09，按$\boxed{y^x}$键，先输入5，随后敲$\boxed{=}$键，再按$\boxed{+/-}$键以确定输入-5.得到$(1.09)^{-5}=0.64993$，并代入，

$$P=1000(0.64993)=649.93$$

由于\$649.93以9%的利率将在5年后变为\$1000.所以，从现在起5年后到期的面值\$1000没有息票的债券值今天的\$649.93.

8.4　指数函数转化为自然指数函数

在8.1节中，我们了解到(1)　指数函数可以用来度量离散的增长率，即，发生在间断时间的增长.比如，普通的复利或贴现问题中的年底或季度末；(2)　自然指数函数用来度量连续的增长率，即，不间断地发生的增长.例如，在连续复利，动物或人口的繁殖.表达间断增长的指数

函数 $S=P(1+i/m)^{mt}$可以转换为度量连续增长的自然指数函数$S=Pe^{rt}$. 作法如下，令两个表达式相等，解出 r，

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = Pe^{rt}$$

消去 P

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = e^{rt}$$

两边取自然对数，

$$\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = \ln e^{rt}$$

$$mt\ln\left(1+\frac{i}{m}\right) = rt$$

两边同时除以 t，

$$r = m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

所以，

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = Pe^{m\ln(1+i/m)t} \tag{8.7}$$

见例 4、例 5 及问题 8.37~8.42.

例 4 自然指数可以用来决定 \$ 100 本金以 10% 的利率，半年复利一次，2 年后的终值.

$$S = Pe^{rt}$$

其中 $r=m\ln(1+i/m)$，所以

$$r = 2\ln\left(1+\frac{0.10}{2}\right) = 2\ln 1.05 = 2(0.04879) = 0.09758$$

代入上式

$$S = 100e^{(0.09758)2} = 100e^{0.19516}$$

使用计算器

$$S = 100(1.2155) = 121.55$$

与例 1 有相同的结论.

注意 在自然指数 Pe^{rt}中的连续增长率为 r，所以 \$ 100 本金以 10% 的利率半年复利一次的增长率为每年 0.09758 或 9.758% . 即是说，以 9.758% 的利率连续复利等价于以 10% 的利率半年复利一次.

例 5 一个小企业，当前年销售额为 \$ 10 000. 计划每年以 12% 的速度增长. 其 4 年的计划销售额可由普通指数函数计算得到，

$$S = 10\,000(1+0.12)^4 = 10\,000(1.5735) = 15\,735$$

例 6 例 5 的销售计划，利用带有 $r=m\ln(1+i/m)$及 $m=1$ 的自然指数重新计算销售额.

$$r = \ln 1.12 = 0.11333$$

$$S = 10\,000e^{0.11333(4)} = 10\,000(1.5735) = 15\,735$$

8.5 由数据估计增长率

已知一个函数的两套数据集—销量，成本，利润—持续稳定地增长，年增长率可以度量，自然指数函数可由同步方程估计得到. 例如，如果在 1996 年的销量为 2.74 万，在 2001 年为 4.19 万，令 1996 年为基年，$t=0$，则 2001 年为 $t=5$. 以自然指数 $S=Pe^{rt}$表达这两套数据，

$$2.74 = Pe^{r(0)} = P \tag{8.8}$$

$$4.19 = Pe^{r(5)} \tag{8.9}$$

将(8.8)中的 $P=2.74$ 代入(8.9)并简化，

$$4.19 = 2.74e^{5r}$$
$$1.53 = e^{5r}$$

两边取自然对数,

$$\ln 1.53 = \ln e^{5r} = 5r$$
$$0.42527 = 5r$$
$$r = 0.08505 \approx 8.5\%$$

代入,

$$S = 2.74e^{0.085t}$$

由于 $r = 0.085$, 每年的连续增长率为 8.5% . 为求间断增长率, 由

$$r = m\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

所以, 对于 $m = 1$, 即每年复利一次,

$$0.085 = \ln(1 + i)$$
$$1 + i = \text{antilog}_e 0.085 = e^{0.085} = 1.08872$$
$$i = 1.08872 - 1 = 0.08872 \approx 8.9\%$$

见例 7 和问题 8.43～8.45.

例 7　已知上述原始信息, 可以直接由此资料估计出一个形如 $S = P(1+i)^t$ 的增长普通指数函数.

以普通指数形式建立资料,

$$2.74 = P(1 + i)^0 = P \tag{8.10}$$
$$4.19 = P(1 + i)^5 \tag{8.11}$$

将(8.10)中的 $P = 2.74$ 代入(8.11)并简化,

$$4.19 = 2.74(1 + i)^5$$
$$1.53 = (1 + i)^5$$

两边取一般对数,

$$\log 1.53 = 5\log(1 + i)$$
$$\frac{1}{5}(0.18469) = \log(1 + i)$$
$$\log(1 + i) = 0.03694$$
$$1 + i = \text{antilog}0.03694 = 10^{0.03694} = 1.08878$$
$$i = 1.08878 - 1 = 0.08878 \approx 8.9\%$$

代入

$$S = 2.74(1 + 0.089)^t$$

习 题 解 答

复利

8.1　已知本金 $P = \$1000$, 年利率 $i = 6\%$, $t = 3$ 年. 求当本金(a)　每年复利一次, (b)　半年复利一次, (c)　每季度复利一次的情形下的终值 S.

解　☞ (a)　由 8.1,

$$S = P(1 + i)^t = 1000(1 + 0.06)^3$$

对于 $(1.06)^3$, 在计算器上输入 1.06, 按 $\boxed{y^x}$ 键, 输入 3, 再键入 $\boxed{=}$ 键, 得到 $(1.06)^3 = 1.19102$, 并代入.

$$S = 1000(1.19102) \approx 1191.02$$

(b)　由(8.2),

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = 1000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(3)} = 1000(1.03)^6$$

对于$(1.03)^6$，输入 1.03，键入[y^x]，再输入 6，并代入，

$$S = 1000(1.19405) \approx 1194.05$$

(c)
$$S = 1000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4(3)} = 1000(1.015)^{12}$$

输入 1.015，键入[y^x]，再输入 12，并代入.

$$S = 1000(1.19562) \approx 1195.62$$

8.2　已知 $P=\$100$，$i=8\%$，$t=5$ 年. 重做问题 8.1.

解 ☞ (a)
$$S = 100(1.08)^5 = 100(1.46933) \approx 146.93$$

(b)
$$S = 100\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2(5)} = 100(1.04)^{10} = 100(1.48024) \approx 148.02$$

(c)
$$S = 100\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4(5)} = 100(1.02)^{20} = 100(1.48595) \approx 148.60$$

8.3　已知 $P=\$1250$，$i=12\%$，$t=4$ 年. 重做问题 8.1.

解 ☞ (a)
$$S = 1250(1.12)^4 = 1250(1.57352) \approx 1966.90$$

(b)
$$S = 1250(1.06)^8 = 1250(1.59385) \approx 1992.31$$

(c)
$$S = 1250(1.03)^{16} = 1250(1.60471) \approx 2005.89$$

8.4　已知本金 $P=\$100$，$i=5\%$，$t=6$ 年. 求当本金(a)　每年复利一次，(b)　连续复利的情形下的终值.

解 ☞ (a)
$$S = 100(1.05)^6 = 100(1.34010) \approx 134.01$$

(b)由(8.3)，

$$S = Pe^{rt} = 100e^{0.05(6)} = 100e^{0.3}$$

对于 $e^{0.3}$，输入 0.3，键入[e^x]，并代入.

$$S = 100(1.34986) \approx 134.99$$

8.5　已知 $P=\$150$，$i=7\%$，$t=4$ 年. 重做问题 8.4.

解 ☞ (a)
$$S = 150(1.07)^4 = 150(1.31080) \approx 196.62$$

(b)
$$S = 150e^{0.07(4)} = 150e^{0.28} = 150(1.32313) \approx 198.47$$

8.6　由问题 8.4 和问题 8.5，利用自然对数求(a)　$S=100e^{0.3}$和(b)　$S=150e^{0.28}$.

解 ☞ (a)
$$\ln S = \ln 100 + 0.3\ln e = 4.60517 + 0.3(1) = 4.90517$$
$$S = \text{antilog}_e 4.90517 = e^{4.90517} \approx 134.99$$

(b)
$$\ln S = \ln 150 + 0.28\ln e = 5.01064 + 0.28 = 5.29064$$
$$S = \text{antilog}_e 5.29064 = e^{5.29064} \approx 198.47$$

8.7　求本金 \$100 以 6% 的利率，(a)　每半年复利一次，(b)　连续复利的实际利率.

解 ☞ (a)　由(8.4)，

$$i_e = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 = 1.0609 - 1 = 0.06090 \approx 6.09\%$$

(b)由(8.5)，

$$i_e = e^r - 1 = e^{0.06} - 1 = 1.06184 - 1 = 0.06184 \approx 6.18\%$$

8.8　计算本金 \$1000 以 12% 的利率，在(a)　每季度复利一次，(b)　连续复利的情形下的实际年利率.

解 ☞ (a)
$$i_e = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 = (1.03)^4 - 1 = 1.12551 - 1 = 0.12551 \approx 12.55\%$$

(b)
$$i_e = e^r - 1 = e^{0.12} - 1 = 1.12750 - 1 = 0.12750 \approx 12.75\%$$

时间

8.9　确定在每年复利一次的情形下，10 年内将本金翻番的利率.

$$S = P(1+i)^t$$

解 ☞ $S=2P$，所以 $2P=P(1+i)^{10}$.

两边同除以 P，并求 10 次方根，

$$2 = (1+i)^{10} \qquad (1+i) = \sqrt[10]{2}$$

对于$\sqrt[10]{2}$. 输入 2，按 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 键，再输入 10，随后按 $\boxed{=}$，并代入. 如果 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 键为 $\boxed{y^x}$ 键的第二功能键，则输入 2，按 $\boxed{y^x}$ 键后按 $\boxed{\text{INV}}$ 键，再输入 10，最后按 $\boxed{=}$ 键.

$$1+i = 1.07177$$

$$i = 1.07177 - 1 = 0.07177 \approx 7.18\%$$

注意　由于$\sqrt[10]{2}=2^{1/10}=2^{0.1}$，$\sqrt[10]{2}$或任何根也可以用 $\boxed{y^x}$ 键求得.

8.10　确定在每半年复利一次的情形下，在 6 年内使本金翻番的利率.

解 ☞

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

$$2P = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2(6)}$$

$$2 = 1(1+0.5i)^{12}$$

$$1+0.5i = \sqrt[12]{2}$$

$$\ln(1+0.5i) = \frac{1}{12}\ln 2 = \frac{1}{12}(0.69315) = 0.05776$$

$$1+0.5i = e^{0.05776} = 1.05946$$

$$0.5i = 1.05946 - 1 = 0.05946$$

$$i = 0.11892 \approx 11.89\%$$

8.11　当每季度复利一次时，以什么利率才能使本金在 10 年内变成三倍?

解 ☞

$$S = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4(10)}$$

$$3P = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{40}$$

$$3 = (1+0.25i)^{40}$$

$$1+0.25i = \sqrt[40]{3}$$

$$\ln(1+0.25i) = \frac{1}{40}\ln 3 = 0.02747$$

$$1+0.25i = e^{0.02747} = 1.02785$$

$$i = 0.1114 \approx 11.14\%$$

8.12　如果连续复利时，以什么利率才能使本金在 8 年内变成 3 倍?

解 ☞

$$S = Pe^{rt}$$

$$3P = Pe^{r(8)}$$

$$\ln 3 = \ln e^{8r}$$

$$1.09861 = 8r$$

$$r = 0.1373 = 13.73\%$$

8.13　如果连续复利，以什么样的利率才能使本金在 25 年内变成 5 倍?

解 ☞

$$S = Pe^{rt}$$

$$5 = e^{25r}$$

$$\ln 5 = 25r$$

$$1.60944 = 25r \qquad r = 0.0644 = 6.44\%$$

8.14　如果每年复利一次，在利率为 12% 时，需要多少年才能使本金翻番？保留两位小数.

解 ☞

$$S = P(1+i)^t \qquad 2 = (1+0.12)^t$$

$$\ln 2 = t\ln 1.12 \qquad 0.69315 = 0.11333t$$
$$t \approx 6.12 \text{年}$$

8.15 在每半年复利一次的情况下，以 8% 的利率，需要经过多长时间才能使现值增到 $2\frac{1}{2}$ 倍？

解 ☞
$$S = P\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2t} \qquad 2.5 = (1.04)^{2t}$$
$$\ln 2.5 = 2t\ln 1.04 \qquad 0.91629 = 2(0.03922)t$$
$$t \approx 11.68 \text{年}$$

8.16 当每季度复利一次时，需经多久才能将本金以 5% 的利率翻番？

解 ☞
$$S = P\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^{4t} \qquad 2 = (1.0125)^{4t}$$
$$\ln 2 = 4t\ln 1.0125 \qquad 0.69315 = 4(0.01242)t$$
$$t \approx 13.95 \text{年}$$

8.17 在连续复利时，(a) 以 9% 的利率，使本金变成 4 倍，(b) 以 12% 的利率，使本金变成 3 倍，分别需要多长时间？

解 ☞ (a) $S = Pe^{rt}$ $\ln 4 = 0.09t$ $t \approx 15.4$ 年 $4 = e^{0.09t}$ $1.38629 = 0.09t$

(b) $S = Pe^{rt}$ $\ln 3 = 0.12t$ $t \approx 9.16$ 年 $3 = e^{0.12t}$ $1.09861 = 0.12t$

贴现

8.18 当前利率为 10%，从现在开始(a) 每年复利一次，(b) 每半年复利一次，求 4 年后的 \$750 的现值.

解 ☞ (a) 利用(8.6)并代入，

$$P = S(1+i)^{-t} = 750(1.10)^{-4}$$

对于$(1.10)^{-4}$输入 1.10，键入 y^x，输入 4，再按 +/- 键，求得$(1.10)^{-4} = 0.68301$，并代入.

$$P = 750(0.68301) \approx 512.26$$

(b)
$$P = S\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mt} = 750(1.05)^{-8}$$
$$= 750(0.67684) \approx 507.63$$

8.19 当前利率为 4%，7 年后的终值为 \$600，重做问题 8.18.

解 ☞ (a) $P = 600(1.04)^{-7}$
$= 600(0.75992) \approx 455.95$

(b) $P = 600(1.02)^{-14}$
$= 600(0.75788) \approx 454.73$

8.20 当前利率为 8%，当(a) 每年复利一次，(b) 连续复利时，求 3 年后的 \$500 的现值.

解 ☞ (a) $P = 500(1.08)^{-3}$
$= 500(0.79383) \approx 396.92$

b) $P = Se^{-rt} = 500e^{-0.08(3)} = 500e^{-0.24}$
$= 500(0.78663) \approx 393.32$

8.21 重做问题 8.20. $i = 9$，$t = 5$ 年，$S = \$120$.

解 ☞ (a) $P = 120(1.09)^{-5}$
$= 120(0.64993) \approx 77.99$

(b) $P = 120e^{-0.09(5)} = 120e^{-0.45}$
$= 120(0.63763) \approx 76.52$

8.22 利用自然对数求解问题 8.21(b).

解 ☞
$$P = 120e^{-0.45}$$
$$\ln P = \ln 120 + (-0.45) = 4.78749 - 0.45 = 4.33749$$
$$P = \text{antilog}_e 4.33749 = e^{4.33749} \approx 76.52$$

指数增长函数

8.23 一个企业的年销售额为 150 000，预计将以 8% 增长，确定第 6 年的销售水平.

解 ☞
$$S = 150\,000(1.08)^6$$

$$=150\,000(1.58687) \approx 238\,031$$

8.24 当前利润为 240 000 的企业,预计今后 10 年内以 9% 的速度增长,求 10 年底的利润水平.

解 ☞
$$\pi = 240\,000(1.09)^{10}$$
$$=240\,000(2.36736) \approx 568\,166$$

8.25 一个每月食品开支为 \$200 的家庭,在食物的成本每年以 3.6% 的速度增长的情形下,预计 5 年后每月食品开支为多少?

解 ☞
$$F = 200(1.036)^5 = 200(1.19344) \approx 238.69$$

8.26 如果生活开支自从 1993 年后每年以 12.5% 的速度增长,以 1993 年的 100 为基点,求 2000 年的生活成本指数.

解 ☞
$$C = 100(1.125)^7 = 100(2.28070) \approx 228.07$$

8.27 一个打折服装店,如果每天减价 10%,直到将服装卖完为止,第 5 天时一件 \$175 的衣服的售价是多少?

解 ☞
$$P = 175(1-0.10)^5$$
$$=175(0.9)^5 = 175(0.59049) \approx 103.34$$

8.28 新汽车第一年以每月 3% 的速度贬值,年初定价为 \$6000 的汽车在第一年年底时值多少钱?

解 ☞
$$B = 6000(0.97)^{12} = 6000(0.69384) \approx 4163.04$$

8.29 如果美元以每年 2.6% 的速度贬值,一美元在 25 年后值多少钱?

解 ☞
$$D = 1.00(0.974)^{25}$$
$$=1.00(0.51758) \approx 0.5176 \quad \text{或} \quad 51.76\%$$

8.30 平均住院成本在 1989 年底时为 \$500,到 1999 年底时为 \$1500,求年增长率.

解 ☞
$$1500 = 500(1+i)^{10}$$
$$3 = (1+i)^{10}$$
$$1+i = \sqrt[10]{3}$$

对于$\sqrt[10]{3}$,输入 3,按 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 键,再输入 10,并代入.

$$1+i = 1.11612 \qquad i = 0.11612 \approx 11.6\%$$

8.31 一个 5 年投资计划预计由每年 2.6 万增长到每年 4.2 万,需要平均每年增加多少投资?

解 ☞
$$4.2 = 2.6(1+i)^5$$
$$1.615 = (1+i)^5$$
$$1+i = \sqrt[5]{1.615} = 1.10061$$
$$i = 0.10061 \approx 10\%$$

8.32 一个发展中国家打算由目前的 5.6 亿储蓄增加到 12 亿,如果每年以 15% 的速度增长,需要多少年?

解 ☞
$$12 = 5.6(1.15)^t$$

用对数变换求解指数,

$$\ln 12 = \ln 5.6 + t\ln 1.15$$
$$2.48491 = 1.72277 + 0.13976t$$
$$0.13976t = 0.76214 \qquad t \approx 5.45 \text{ 年}$$

8.33 在第三世界国家中,人口以 3.2% 的速度增长,计算现在人口为 1 000 000 的国家 20 年后的人口数.

由于人口是连续增长的,所以涉及到自然指数函数,

解 ☞ $$P = 1\ 000\ 000\mathrm{e}^{0.032(20)} = 1\ 000\ 000\mathrm{e}^{0.64}$$
$$= 1\ 000\ 000(1.89648) \approx 1\ 896\ 480$$

8.34 如果问题 8.33 中的人口 2.4% 的速度增长，则 20 年后的人口数是多少？

解 ☞ $$P = 1\ 000\ 000\mathrm{e}^{0.024(20)} = 1\ 000\ 000\mathrm{e}^{0.48}$$
$$= 1\ 000\ 000(1.61607) \approx 1\ 616\ 070$$

8.35 如果世界人口以 2.6% 增长，需要多少年人口将翻番？

解 ☞ $$2 = \mathrm{e}^{0.026t}$$
$$\ln 2 = 0.026t$$
$$0.69315 = 0.026t \qquad t - 26.66 \text{ 年}$$

8.36 如果世界上可耕种的土地由于气候条件以 3.5% 的速度被侵蚀，现在 A 数量的可耕种的土地 12 年后将剩下多少？

解 ☞ $$P = A\mathrm{e}^{-0.035(12)} = A\mathrm{e}^{-0.42} = 0.657047A \quad \text{或} \quad 66\%$$

指数函数的转换

8.37 利用(a) 指数函数，(b) 等价的自然对数函数，求本金 $P = \$2000$ 以 12% 的利率每半年复利一次，3 年后的价值 S.

解 ☞ (a) $$S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = 2000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = 2000(1.06)^6$$
$$= 2000(1.41852) \approx 2837.04$$

(b) $$S = P\mathrm{e}^{rt}$$

其中

$$r = m\ln(1 + i/m) = 2\ln 1.06 = 2(0.05827) = 0.11654.$$

所以，

$$S = 2000\mathrm{e}^{0.11654(3)} - 2000\mathrm{e}^{0.34962} = 2000(1.41853) \approx 2837.06^{*}$$

8.38 本金 $P = \$600$，以 9% 的利率每年复利一次，$t = 5$ 年，重做问题 8.37.

解 ☞ (a) $$S = 600(1.09)^5 = 600(1.53862) \approx 923.17$$

(b) $S = P\mathrm{e}^{rt}$，其中 $r = \ln 1.09 = 0.08618$. 因此
$$S = 600\mathrm{e}^{0.08618(5)} = 600\mathrm{e}^{0.4309} = 600(1.53864) \approx 923.18^{*}$$

8.39 本金 $P = \$1800$ 以 8% 的利率，每季度复利一次，$t = 2\frac{1}{2}$年，重做问题 8.37.

解 ☞ (a) $S = 1800(1.02)^{10} = 1800(1.21899) \approx 2194.18$

(b) $r = 4\ln 1.02 = 4(0.01980) = 0.07920$
$$S = 1800\mathrm{e}^{0.07920(2.5)} = 1800\mathrm{e}^{0.19800} = 1800(1.21896) = 2194.13^{*}$$

8.40 在每年复利一次的离散情形下，求 $S = P\mathrm{e}^{0.07696t}$ 的等价形式.

解 ☞ $$r = m\ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)$$

由于每年复利一次，$m = 1$,

$$0.07696 = \ln(1 + i)$$
$$1 + i = \text{antilog}_e\, 0.07696 = 1.08$$
$$i = 0.08$$

所以

$$S = P(1.08)^t$$

8.41 在每半年复利一次的离散情形下，求 $P\mathrm{e}^{0.09758t}$ 的等价形式.

* 误差是由于保留小数点后二位而进行取整产生的.

解 ☞

$$r = 2\ln(1 + 0.5i)$$
$$0.09758 = 2\ln(1 + 0.5i)$$
$$1 + 0.5i = \text{antilog}_e 0.04879 = 1.05$$
$$0.5i = 0.05 \quad i = 0.10$$

所以

$$S = P(1.05)^{2t}$$

8.42 在每季度复利一次的情况下,求 $S = Pe^{0.15688t}$ 的等价形式.

解 ☞

$$r = 4\ln(1 + 0.25i)$$
$$\frac{1}{4}(0.15688) = \ln(1 + 0.25i)$$
$$1 + 0.25i = \text{antilog}_e 0.03922 = 1.04$$
$$i = 0.16$$
$$S = P(1.04)^{4t}$$

由资料建立指数函数

8.43 一种动物由1997年的3.5亿增长到2001年的4.97亿.以自然指数表示该动物数量P,并确定增长率.

解 ☞

$$3.50 = P_0 e^{r(0)} = P_0 \tag{8.12}$$
$$4.97 = P_0 e^{r(4)} \tag{8.13}$$

将(8.12)中的 $P = 3.50$ 代入(8.13)并简化,

$$4.97 = 3.50e^{4r}$$
$$1.42 = e^{4r}$$

两边取自然对数,

$$\ln 1.42 = \ln e^{4r} = 4r$$
$$0.35066 = 4r$$
$$r = 0.08767 \approx 8.8\%$$

所以

$$P = 3.50e^{0.088t} \quad r = 8.8\%$$

8.44 政府项目成本由1995年的5.39亿增至2001年的10.64亿.用一般指数表示成本,并确定年增长率.

解 ☞

$$5.39 = C_0(1 + i)^0 = C_0 \tag{8.14}$$
$$10.64 = C_0(1 + i)^6 \tag{8.15}$$

将(8.14)中的 $C = 5.39$ 代入(8.15),并简化,

$$10.64 = 5.39(1 + i)^6$$
$$1.974 = (1 + i)^6$$

两边取普通对数,

$$\log 1.974 = 6\log(1 + i)$$
$$\frac{1}{6}(0.29535) = \log(1 + i)$$
$$\log(1 + i) = 0.04923$$
$$1 + i = \text{antilog}0.04923 = 10^{0.04923} = 1.12$$
$$i = 1.12 - 1 = 0.12 = 12\%$$
$$C = 5.39(1 + 0.12)^t \quad i = 12\%$$

8.45 已知1991年 $C = 2.80$, 2001年 $C = 5.77$,重做问题8.44.

解 ☞

$$2.80 = C_0(1 + i)^0 = C_0 \tag{8.16}$$
$$5.77 = C_0(1 + i)^{10} \tag{8.17}$$

将 $C=2.80$ 代入(8.17)，

$$5.77=2.80(1+i)^{10}$$
$$2.06=(1+i)^{10}$$

取对数，

$$\log 2.06=10\log(1+i)$$
$$\frac{1}{10}(0.31387)=\log(1+i)$$
$$\log(1+i)=0.03139$$
$$1+i=\text{antilog}0.03139=10^{0.03139}\doteq 1.07495$$
$$i=1.07495-1=0.07495\approx 7.5\%$$

所以

$$C=2.80(1+0.075)^{t}\qquad i=7.5\%$$

第九章　指数和对数函数的微分

9.1　微分法则

下面给出指数函数和对数函数的微分法则，并在例1～例4及问题9.1～9.8中给予解释说明．问题9.35～9.40给出部分法则的证明．

9.1.1　自然指数函数法则

给定 $f(x)=e^{g(x)}$，其中 $g(x)$ 为 x 的可微函数，导数为

$$f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)\tag{9.1}$$

即，自然指数函数的导数等于原来指数函数乘以指数的导数．

例1　求出下列自然指数函数的导数：

1．$f(x)=e^x$

令 $g(x)=x$，于是 $g'(x)=1$．代入(9.1)，

$$f'(x)=e^x\cdot 1=e^x$$

所以 e^x 的导数是它本身．

2．$f(x)=e^{x^2}$

由于 $g(x)=x^2$，则 $g'(x)=2x$，代入(9.1)，

$$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}$$

3．$f(x)=3e^{7-2x}$

这里 $g(x)=7-2x$，所以 $g'(x)=-2$，由(9.1)得，

$$f'(x)=3e^{7-2x}\cdot -2=-6e^{7-2x}$$

求其在 $x=4$ 的斜率，

$$f'(4)=-6e^{7-2(4)}=-6e^{-1}=-6\left(\frac{1}{2.71828}\right)=-2.2$$

见问题9.1．

9.1.2　底为 a 的指数函数法则

给定 $f(x)=a^{g(x)}$，其中 $a>0, a\neq 1$，且 $g(x)$ 为 x 的可微函数．导数为

$$f'(x)=a^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot \ln a\tag{9.2}$$

即，指数函数的导数是原函数乘以底的自然对数．

例2　求出底为 a 的指数函数的导数：

1．$f(x)=a^{1-2x}$．这里 $g(x)=1-2x$，则 $g'(x)=-2$，代入(9.2)，

$$f'(x)=a^{1-2x}\cdot -2\cdot \ln a=-2a^{1-2x}\ln a$$

2．$y=a^x$．这里 $g(x)=x$，则 $g'(x)=1$．由(9.2)，

$$y'=a^x\cdot 1\cdot \ln a=a^x\ln a$$

注意　a 可以为具体的数值，见问题9.2(c)～9.2(g)．

3．$y=x^2a^{3x}$．由于 y 是 x^2 与 a^{3x}的积，所以积的法则是必须的．

$$\begin{aligned}y'&=x^2(a^{3x}\cdot 3\cdot \ln a)+a^{3x}(2x)\\&=xa^{3x}(3x\ln a+2)\end{aligned}$$

见问题9.2．

9.1.3　自然对数函数法则

给定 $f(x)=\ln g(x)$，$g(x)$ 为正且可微的．导数为，

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{9.3}$$

见例 3 和问题 9.3～9.5.

例 3 求下列自然对数函数的导数：

1. $f(x) = \ln 6x^2$. 令 $g(x) = 6x^2$, 则 $g'(x) = 12x$, 代入(9.2),

$$f'(x) = \frac{1}{6x^2} \cdot 12x = \frac{2}{x}$$

2. $y = \ln x$. 令 $g(x) = x, g'(x) = 1$. 由(9.3),

$$y' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

3. $y = \ln(x^2 + 6x + 2)$. 导数为

$$y' = \frac{1}{x^2 + 6x + 2} \cdot (2x + 6) = \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 2}$$

求其在 $x = 4$ 的斜率,

$$y'(4) = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$$

9.1.4 底为 a 的对数函数的导数的法则

给定 $f(x) = \log_a g(x)$, 其中 $a > 0, a \neq 1$, 且 $g(x)$ 为正的且可微. 导数为

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \log_a e \quad 或 \quad f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{\ln a} \tag{9.4}$$

因为 $\log_a e = 1/\ln a$ 见例 4 和问题 9.6 及 9.40.

例 4 求下列底为 a 的对数函数的导数：

1. $f(x) = \log_a(2x^2 + 1)$. 令 $g(x) = 2x^2 + 1$; 则 $g'(x) = 4x$. 代入(9.4),

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 1} \cdot 4x \cdot \log_a e = \frac{4x}{2x^2 + 1}\log_a e$$

或, 由(9.4),

$$f'(x) = \frac{4x}{(2x^2 + 1)\ln a}$$

2. $y = \log_a x$ 令 $g(x) = x, g'(x) = 1$. 由(9.4),

$$y' = \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot \log_a e = \frac{\log_a e}{x}$$

或

$$y' = \frac{1}{x\ln a}$$

9.2 高阶导数

对前一阶的导数再求导, 便得到高阶导数, 见例 5 和问题 9.9 及问题 9.10.

例 5 求下列指数和对数函数的一阶和二阶导数：

1. 已知 $y = e^{5x}$. 一阶和二阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x}(5) = 5e^{5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5e^{5x}(5) = 25e^{5x}$$

2. 已知 $y = a^x$, 一阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = a^x(1)\ln a = a^x\ln a$$

其中 $\ln a$ 为常数,所以二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^x(\ln a)(1)(\ln a)=a^x(\ln a)^2=a^x\ln^2 a$$

3. 已知 $y=\ln x$,一阶导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x}(2)=\frac{1}{x} \quad 或 \quad x^{-1}$$

由简单幂函数法则,有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2} \quad 或 \quad -\frac{1}{x^2}$$

4. 已知 $y=\log_a 3x$,一阶导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x}(3)\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

由商的法则,其中 $\ln a$ 为常数,二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\ln a(0)-1\ln a}{(x\ln a)^2}=\frac{-\ln a}{x^2\ln^2 a}=-\frac{1}{x^2\ln a}$$

9.3　偏导数

当保持其他变量不变求函数关于一个变量的微分时,便得到了偏导数.见例 6 和问题 9.11.

例 6　求下列函数的一阶和二阶偏导数:

1. 已知 $z=e^{(3x+2y)}$.一阶和二阶偏导数为

$$z_x=e^{(3x+2y)}(3)=3e^{(3x+2y)} \qquad z_y=e^{(3x+2y)}(2)=2e^{(3x+2y)}$$
$$z_{xx}=3e^{(3x+2y)}(3)=9e^{(3x+2y)} \qquad z_{yy}=2e^{(3x+2y)}(2)=4e^{(3x+2y)}$$
$$z_{xy}=6e^{(3x+2y)}=z_{yx}$$

2. 已知 $z=\ln(5x+9y)$,偏导数为

$$z_x=\frac{5}{5x+9y} \qquad z_y=\frac{9}{5x+9y}$$

由商的法则,

$$z_{xx}=\frac{(5x+9y)(0)-5(5)}{(5x+9y)^2}=\frac{-25}{(5x+9y)^2}$$
$$z_{yy}=\frac{(5x+9y)(0)-9(9)}{(5x+9y)^2}=\frac{-81}{(5x+9y)^2}$$
$$z_{xy}=\frac{-45}{(5x+9y)^2}=z_{yx}$$

9.4　指数和对数函数的优化

指数和对数函数遵循 4.5 节和 5.4 节的优化法则.见例 7,问题 9.12 及 9.21.

例 7　求指数和对数函数的驻点及判断最大或最小的步骤如下:

1. 已知 $y=2xe^{4x}$.利用积的法则并令导数为零,有

$$\frac{dy}{dx}=2x(4e^{4x})+2(e^{4x})=0=2e^{4x}(4x+1)=0$$

要使导数为零,或者 $2e^{4x}=0$ 或者 $4x+1=0$.由于对 x 的所有值有 $2e^{4x}\neq 0$

$$4x+1=0 \qquad \bar{x}=-\frac{1}{4}$$

检验二阶条件.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{4x}(4) + (4x+1)(2e^{4x})(4) = 8e^{4x}(4x+2)$$

求函数在驻点的值，$\bar{x} = -\frac{1}{4}$，$d^2y/dx^2 = 8e^{-1}(-1+2) = 8/e > 0$，由于二阶导数为正，所以函数在驻点取得最小值.

2. 已知 $y = \ln(x^2 - 6x + 10)$. 由自然对数法则，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-6}{x^2-6x+10} = 0$$

两边同乘分母

$$x^2 - 6x + 10 \quad 2x - 6 = 0 \quad \bar{x} = 3$$

利用商的法则求二阶导数，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x^2-6x+10)(2)-(2x-6)(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2}$$

求二阶导数在驻点的值，$\bar{x} = 3$，$d^2y/dx^2 = 2 > 0$.

所以，函数取得最小值.

3. 已知 $z = e^{(x^2-2x+y^2-6y)}$.

$$z_x = (2x-2)e^{(x^2-2x+y^2-6y)} = 0 \qquad z_y = (2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)} = 0$$

由于对任意的 x 和 y 都有 $e^{(x^2-2x+y^2-6x)} \neq 0$ 所以，有，

$$2x - 2 = 0 \qquad 2y - 6 = 0$$

$$\bar{x} = 1 \qquad \bar{y} = 3$$

利用积的法则检验二阶条件，

$$z_{xx} = (2x-2)(2x-2)e^{(x^2-2x+y^2-6y)} + e^{(x^2-2x+y^2-6y)}(2)$$

$$z_{yy} = (2y-6)(2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)} + e^{(x^2-2x+y^2-6y)}(2)$$

求在驻点的值，因为 e 的任意次幂均为正的，有

$$z_{xx} = 0 + 2e^{-10} > 0 \qquad z_{yy} = 0 + 2e^{-10} > 0$$

检验混合偏导数，

$$z_{xy} = (2x-2)(2y-6)e^{(x^2-2x+y^2-6y)} = z_{yx}$$

在 $\bar{x} = 1, \bar{y} = 3$ 处有 $z_{xy} = 0 = z_{yx}$. 由于 z_{xx} 和 z_{yy} 均为正且有 $z_{xx}z_{yy} > (z_{xy})^2$ 成立，则函数此时取得最小值.

9.5 对数微分

经常用自然对数及其导数来简化多项积和商的微分的求解过程，该过程被称为对数化微分. 见例 8 及问题 9.22.

例 8 利用对数化微分求如下函数的导数：

$$g(x) = \frac{(5x^3-8)(3x^4+7)}{(9x^5-2)} \tag{9.5}$$

(a) 两边取自然对数

$$\ln g(x) = \ln\frac{(5x^3-8)(3x^4+7)}{(9x^5-2)}$$
$$= \ln(5x^3-8) + \ln(3x^4+7) - \ln(9x^5-2)$$

(b) 求导数

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{15x^2}{5x^3-8} + \frac{12x^3}{3x^4+7} - \frac{45x^4}{9x^5-2} \tag{9.6}$$

(c) 由(9.6)代数求解 $g'(x)$，

$$g'(x)=\left(\frac{15x^2}{5x^3-8}+\frac{12x^3}{3x^4+7}-\frac{45x^4}{9x^5-2}\right)\cdot g(x) \tag{9.7}$$

(d)　将(9.5)的 $g(x)$ 代入(9.7),

$$g'(x)=\left(\frac{15x^2}{5x^3-8}+\frac{12x^3}{3x^4+7}-\frac{45x^4}{9x^5-2}\right)\cdot\frac{(5x^3-8)(3x^4+7)}{(9x^5-2)}$$

9.6　增长率的两种度量

一个函数 $y=f(t)$ 的增长 G 定义为

$$G=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{y}=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{y'}{y}$$

由9.1.3节知,G 恰好是 $\ln y$ 的导数.所以,函数的增长可以由(1)　导数除以函数本身,(2)取自然对数,再微分的两种方法来求.后者有时对复杂的函数更为有用.见例9及问题9.23～9.30.

例9　分别用上述两种方法求 $V=Pe^{rt}$ 的增长率,其中 P 为常数.

1. 由第一种方法,

$$G=\frac{V'}{V}$$

其中,$V'=Pe^{rt}(r)=rPe^{rt}$,所以

$$G=\frac{rPe^{rt}}{Pe^{rt}}=r$$

2. 第二种方法,取函数的自然对数,

$$\ln V=\ln P+\ln e^{rt}=\ln P+rt$$

再求对数关于 t 的导数,

$$G=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln V)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln P+rt)=0+r=r$$

9.7　最优时间

指数函数被用来表示一定时间内增值或贬值的商品的价值.例如,酒,奶酪和自然资源等商品.由于将来的一美元不如今天的一美元值钱,有必要将未来的值贴现为现值.投资者和潜在的投资者追求他们资产的现值最大.见例10及问题9.31～9.34.

例10　奶酪的价值随着时间增加而增加,即 $V=1400(1.25)^{\sqrt{t}}$.如果在连续复利的情形下,资金成本为9%,假设没有储藏成本,那么一个企业应该储藏多久呢?

解　☞企业想使奶酪的现值 $P=Ve^{-rt}$ 最大.代入已知的 V 及 r,有 $P=1400(1.25)^{\sqrt{t}}e^{-0.09t}$.取自然对数,

$$\ln P=\ln 1400+t^{1/2}\ln 1.25-0.09t$$

再求导数,并令导数为零以求最大的 P,

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0+\frac{1}{2}(\ln 1.25)t^{-1/2}-0.09=0$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P\left[\frac{1}{2}(\ln 1.25)t^{-1/2}-0.09\right]=0 \tag{9.8}$$

因为 $P\neq0$, $\frac{1}{2}(\ln 1.25)t^{-1/2}-0.09=0$

$$t^{-1/2}=\frac{0.18}{\ln 1.25}$$

$$t=\left(\frac{\ln 1.25}{0.18}\right)^2=\left(\frac{0.22314}{0.18}\right)^2\approx 1.54\text{ 年}$$

由(9.8)求二阶导数,因为 $P=f(t)$,我们得到,

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P\left[-\frac{1}{4}(\ln 1.25)t^{-3/2}\right] + \left[\frac{1}{2}(\ln 1.25)t^{-1/2} - 0.09\right]\frac{dP}{dt}$$

由于在驻点 $dP/dt = 0$，有

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P\left[-\frac{1}{4}(\ln 1.25)t^{-3/2}\right] = -P(0.05579t^{-3/2})$$

因为 $P, t > 0$, $d^2P/dt^2 < 0$，所以函数取得最大值.

9.8 利用对数变换求柯布-道格拉斯需求函数的导数

需求函数将一个顾客对一种商品的购买量表示为该商品的价格和顾客收入的函数. 通过求满足收入约束条件下的柯布-道格拉斯效用的最大化，得到柯布-道格拉斯需求函数. 给定 $u = x^{\alpha}y^{\beta}$ 及预算约束 $p_x x + p_y y = M$，先取效用函数的对数，

$$\ln u = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

再建立拉格朗日函数并求最大，

$$U = \alpha \ln x + \beta \ln y + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

$$U_x = \alpha \cdot \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0 \qquad \alpha = \lambda p_x x$$

$$U_y = \beta \cdot \frac{1}{y} - \lambda p_y = 0 \qquad \beta = \lambda p_y y$$

$$U_\lambda = M - p_x x - p_y y = 0$$

使 α 与 β 相加，并将 $p_x x + p_y y = M$ 代入，

$$\alpha + \beta = \lambda(p_x x + p_y y) = \lambda M$$

所以，

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta}{M}$$

现在将 $\lambda = (\alpha + \beta)/M$ 代回 U_x 和 U_y，有

$$\frac{\alpha}{x} - \left(\frac{\alpha + \beta}{M}\right)p_x = 0 \qquad \bar{x} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\left(\frac{M}{p_x}\right) \tag{9.9a}$$

$$\frac{\beta}{y} - \left(\frac{\alpha + \beta}{M}\right)p_y = 0 \qquad \bar{y} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\left(\frac{M}{p_y}\right) \tag{9.9b}$$

对于一个严格的柯布-道格拉斯函数有 $\alpha + \beta = 1$，所以，

$$\bar{x} = \frac{\alpha M}{p_x} \quad 及 \quad \bar{y} = \frac{\beta M}{p_y} \tag{9.9c}$$

例 11　已知一个效用函数 $u = x^{0.3}y^{0.7}$，收入为 $M = 200$，(a) 导出对 x 和 y 的需求函数，(b) 求在 $p_x = 5, p_y = 8$ 和 $p_x = 6, p_y = 10$ 的值.

解 ☞ (a) 由(9.9)，

$$\bar{x} = \frac{\alpha M}{p_x} \quad 及 \quad \bar{y} = \frac{\beta M}{p_y}$$

(b) 在 $p_x = 5, p_y = 8$

$$\bar{x} = \frac{0.3(200)}{5} = 12 \quad 及 \quad \bar{y} = \frac{0.7(200)}{8} = 17.5$$

在 $p_x = 6, p_y = 10$

$$\bar{x} = \frac{0.3(200)}{6} = 10 \quad 及 \quad \bar{y} = \frac{0.7(200)}{10} = 14$$

习 题 解 答

自然指数函数的导数

9.1　根据法则，$d/dx[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$，求下列自然指数函数的微分：

(a)　$y=e^{2x}$

解　令 $g(x)=2x$，则 $g'(x)=2$，及 $y'=e^{2x}(2)=2e^{2x}$

(b)　$y=e^{(-1/3)x}$

解

$$g(x)=-\frac{1}{3}x,\ g'(x)=-\frac{1}{3}\text{及}$$

$$y'=e^{-(1/3)x}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}e^{(-1/3)x}$$

(c)　$y=e^{x^3}$

解

$$y'=e^{x^3}(3x^2)=3x^2e^{x^3}$$

(d)　$y=3e^{x^2}$

解

$$y'=3e^{x^2}(2x)=6xe^{x^2}$$

(e)　$y=e^{2x+1}$

解

$$y'=e^{2x+1}(2)=2e^{2x+1}$$

(f)　$y=e^{1-4x}$

解

$$y'=-4e^{1-4x}$$

(g)　$y=5e^{1-x^2}$

解

$$y'=-10xe^{1-x^2}$$

(h)　$y=2xe^{x}$

解　由乘法法则，

$$y'=2x(e^x)+e^x(2)=2e^x(x+1)$$

(i)　$y=3xe^{2x}$

解

$$y'=3x(2e^{2x})+e^{2x}(3)=3e^{2x}(2x+1)$$

(j)　$y=x^2e^{5x}$

解

$$y'=x^2(5e^{5x})+e^{5x}(2x)=xe^{5x}(5x+2)$$

(k)　$y=\dfrac{e^{5x}-1}{e^{5x}+1}$

解　由商的法则，

$$y'=\frac{(e^{5x}+1)(5e^{5x})-(e^{5x}-1)(5e^{5x})}{(e^{5x}+1)^2}=\frac{10e^{5x}}{(e^{5x}+1)^2}$$

(l)　$y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

解

$$y'=\frac{(e^{2x}-1)(2e^{2x})-(e^{2x}+1)(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$

底非 e 的指数函数的微分

9.2　根据 $d/dx[a^{g(x)}]=a^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot\ln a$ 求下列指数函数的微分：

(a)　$y=a^{2x}$

解

$$\text{令 } g(x)=2x,\text{则 } g'(x)=2\text{ 及}$$

$$y'=a^{2x}(2)\ln a=2a^{2x}\ln a$$

(b)　$y=a^{5x^2}$

解

$$y'=a^{5x^2}(10x)\ln a=10xa^{5x^2}\ln a$$

(c)　$y=4^{2x+7}$

解

$$y'=4^{2x+7}(2)\ln 4=2(4)^{2x+7}\ln 4$$

利用计算器，

解 ☞ $$y' = 2(1.38629)(4)^{2x+7} = 2.77258(4)^{2x+7}$$

(d) $y = 2^x$

解 ☞ $$y' = 2^x(1)\ln 2 = 2^x\ln 2 = 0.69315(2)^x$$

(e) $y = 7^{x^2}$

解 ☞ $$y' = 7^{x^2}(2x)\ln 7 = 2x(7)^{x^2}\ln 7 = 2x(7)^{x^2}(1.94591) = 3.89182x(7)^{x^2}$$

(f) $y = x^3 2^x$

注意　x^3 是幂函数，而 2^x 是指数函数.由积的法则有，

解 ☞ $$y' = x^3[2^x(1)\ln 2] + 2^x(3x^2) = x^2 2^x(x\ln 2 + 3)$$

(g) $y = x^2 2^{5x}$

解 ☞ $$y' = x^2[2^{5x}(5)\ln 2] + 2^{5x}(2x) = x2^{5x}(5x\ln 2 + 2)$$

自然对数函数的导数

9.3　根据法则 $d/dx[\ln g(x)] = 1/[g(x)]\cdot g'(x)$，求下列自然对数函数的微分：

(a) $y = \ln 2x^3$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{2x^3}(6x^2) = \frac{3}{x}$$

(b) $y = \ln 7x^2$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{7x^2}(14x) = \frac{2}{x}$$

(c) $y = \ln(1+x)$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{1+x}$$

(d) $y = \ln(4x+7)$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{4x+7}(4) = \frac{4}{4x+7}$$

(e) $y = \ln 6x$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{6x}(6) = \frac{1}{x}$$

(f) $y = 6\ln x$

解 ☞ $$y' = 6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$$

注意　对数表达式中的常系数在微分中消去，见(e)，而对数表达式之外的常系数则保留，见(f).

9.4　求下列自然对数函数的导数：

(a) $y = \ln^2 x = (\ln x)^2$

解 ☞ 由广义幂函数法则

$$y' = 2\ln x\frac{d}{dx}(\ln x) = 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}$$

(b) $y = \ln^2 8x = (\ln 8x)^2$

解 ☞ $$y' = 2\ln 8x\left(\frac{1}{8x}\right)(8) = \frac{2\ln 8x}{x}$$

(c) $y = \ln^2(3x+1) = [\ln(3x+1)]^2$

解 ☞ $$y' = 2\ln(3x+1)\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$$

(d) $y = \ln^2(5x+6)$

解 ☞ $$y' = 2\ln(5x+6)\left(\frac{1}{5x+6}\right)(5) = \frac{10\ln(5x+6)}{5x+6}$$

(e) $y = \ln^3(4x+13)$

解 ☞ $$y' = 3[\ln(4x+13)]^2\left(\frac{1}{4x+13}\right)(4) = 3\ln^2(4x+13)\left(\frac{4}{4x+13}\right)$$
$$= \frac{12}{4x+13}\ln^2(4x+13)$$

(f) $y = \ln(x+5)^2 \neq [\ln(x+5)]^2$

解 ☞ 令 $g(x) = (x+5)^2$，则 $g'(x) = 2(x+5)$，及

$$y' = \frac{1}{(x+5)^2}[2(x+5)] = \frac{2}{x+5}$$

(g) $y = \ln(x-8)^2$

解 ☞ $$y' = \frac{1}{(x-8)^2}[2(x-8)] = \frac{2}{x-8}$$

(h) $y = 3\ln(1+x)^2$

解 ☞ $$y' = 3\left[\frac{1}{(1+x)^2}\right][2(1+x)] = \frac{6}{1+x}$$

9.5 利用 7.3 节中的对数定律简化下列自然对数函数的微分过程：

(a) $y = \ln(x+5)^2$

解 ☞ 由对数定律，有 $\ln(x+5)^2 = 2\ln(x+5)$．所以正如问题 9.4(f)，

$$y' = 2\left(\frac{1}{x+5}\right)(1) = \frac{2}{x+5}$$

(b) $y = \ln(2x+7)^2$

解 ☞ $$y = 2\ln(2x+7)$$
$$y' = 2\left(\frac{1}{2x+7}\right)(2) = \frac{4}{2x+7}$$

(c) $y = \ln[(3x+7)(4x+2)]$

解 ☞ $$y = \ln(3x+7) + \ln(4x+2)$$
$$y' = \frac{3}{3x+7} + \frac{4}{4x+2}$$

(d) $y = \ln[5x^2(3x^3-7)]$

解 ☞ $$y = \ln 5x^2 + \ln(3x^3-7)$$
$$y' = \frac{10x}{5x^2} + \frac{9x^2}{3x^3-7} = \frac{2}{x} + \frac{9x^2}{3x^3-7}$$

(e) $y = \ln\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

解 ☞ $$y = \ln 3x^2 - \ln(x^2-1)$$
$$y' = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-1}$$

(f) $y = \ln\dfrac{x^3}{(2x+5)^2}$

解 ☞ $$y = \ln x^3 - \ln(2x+5)^2$$
$$y' = \frac{1}{x^3}(3x^2) - 2\left(\frac{1}{2x+5}\right)(2) = \frac{3}{x} - \frac{4}{2x+5}$$

(g) $y = \ln\sqrt{\dfrac{2x^2+3}{x^2+9}}$

解 ☞ $$y = \frac{1}{2}[\ln(2x^2+3) - \ln(x^2+9)]$$
$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{4x}{2x^2+3} - \frac{2x}{x^2+9}\right) = \frac{2x}{2x^2+3} - \frac{x}{x^2+9}$$

以非 e 为底的对数函数的导数

9.6 根据法则

$$\frac{d}{dx}[\log_a g(x)] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \log_a e = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$$

求下列对数函数的微分.

(a)　$y = \log_a(4x^2 - 3)$

解 ☞
$$y' = \frac{1}{4x^2 - 3}(8x)\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{8x}{(4x^2 - 3)\ln a}$$

(b)　$y = \log_4 9x^3$

解 ☞
$$y' = \frac{1}{9x^3}(27x^2)\left(\frac{1}{\ln 4}\right) = \frac{3}{x\ln 4}$$

(c)　$y = \log_2(8 - x)$

解 ☞
$$y' = \frac{1}{(8 - x)}(-1)\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{(8 - x)\ln 2}$$

(d)　$y = x^3 \log_6 x$

解 ☞ 由乘法法则

$$y' = x^3\left[\frac{1}{x}(1)\left(\frac{1}{\ln 6}\right)\right] + (\log_6 x)(3x^2) = \frac{x^2}{\ln 6} + 3x^2\log_6 x$$

(e)　$y = \log_a\sqrt{x^2 - 7}$

解 ☞ 由对数定律, $y = \frac{1}{2}\log_a(x^2 - 7)$. 所以,

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2 - 7}(2x)\left(\frac{1}{\ln a}\right)\right] = \frac{x}{(x^2 - 7)\ln a}$$

法则的混合应用

9.7　利用法则求下列函数的微分:

(a)　$y = x^2 \ln x^3$

解 ☞ 由乘法法则

$$y' = x^2\left(\frac{1}{x^3}\right)(3x^2) + \ln x^3(2x) = 3x + 2x\ln x^3 = 3x + 6x\ln x = 3x(1 + 2\ln x)$$

(b)　$y = x^3 \ln x^2$

解 ☞
$$y' = x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)(2x) + \ln x^2(3x^2) = 2x^2 + 6x^2\ln x = 2x^2(1 + 3\ln x)$$

(c)　$y = e^x \ln x$

解 ☞ 由乘法法则

$$y' = e^x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(e^x) = e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

(d)　$y = e^{-2x}\ln 2x$

解 ☞
$$y' = e^{-2x}\left(\frac{1}{2x}\right)(2) + \ln 2x(-2e^{-2x}) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x} - 2\ln 2x\right)$$

(e)　$y = \ln e^{3x+2}$

解 ☞
$$y' = \frac{1}{e^{3x+2}}(3e^{3x+2}) = 3$$

因为 $\ln e^{3x+2} = 3x + 2$, $d/dx(\ln e^{3x+2}) = d/dx(3x + 2) = 3$.

(f)　$y = e^{\ln x}$

解 ☞
$$y' = e^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

因为 $e^{\ln x} = x$.

(g)　$y = e^{\ln(2x+1)}$

解 ☞
$$y' = e^{\ln(2x+1)}\left(\frac{1}{2x+1}\right)(2) = 2$$

因为 $e^{\ln(2x+1)} = 2x + 1$.

(h)　$y=e^{x\ln x}$

解 ☞
$$y'=e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x)$$

对于 $d/dx(x\ln x)$，利用乘法法则

$$y'=e^{x\ln x}\left[x\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)\right]=e^{x\ln x}(1+\ln x)$$

(i)　$y=e^{x^2\ln 3x}$

解 ☞
$$y'=e^{x^2\ln 3x}\left[x^2\left(\frac{1}{3x}\right)(3)+\ln 3x(2x)\right]$$
$$=e^{x^2\ln 3x}(x+2x\ln 3x)=xe^{x^2\ln 3x}(1+2\ln 3x)$$

指数和对数函数的斜率

9.8　求出下列函数在指定点处的斜率.

(a)　$y=3e^{0.2x}$　在 $x=5$ 点.

解 ☞
$$y'=0.6e^{0.2x}$$

在 $x=5$,
$$y'=0.6e^{0.2(5)}=0.6(2.71828)\approx 1.63097.$$

(b)　$y=2e^{-1.5x}$　在 $x=4$ 点.

解 ☞
$$y'=-3e^{-1.5x}$$

在 $x=4$,
$$y'=-3e^{-1.5(4)}=-3e^{-6}=-3(0.00248)\approx -0.00744.$$

(c)　$y=\ln(x^2+8x+4)$　在 $x=2$.

解 ☞
$$y'=\frac{2x+8}{x^2+8x+4}$$

在 $x=2$,
$$y'=\frac{12}{24}=0.5.$$

(d)　$y=\ln^2(x+4)$　在 $x=6$.

解 ☞
$$y'=[2\ln(x+4)]\left(\frac{1}{x+4}\right)(1)=\frac{2\ln(x+4)}{x+4}$$

在 $x=6$,
$$y'=\frac{2\ln 10}{10}=\frac{2(2.30259)}{10}\approx 0.46052$$

二阶导数

9.9　求下列函数的一阶和二阶导数:

(a)　$y=e^{3x}$

解 ☞
$$y'=3e^{3x}\qquad y''=9e^{3x}$$

(b)　$y=e^{-(1/2)x}$

解 ☞
$$y'=-\frac{1}{2}e^{-(1/2)x}\qquad y''=\frac{1}{4}e^{-(1/2)x}$$

(c)　$y=3e^{5x+1}$

解 ☞
$$y'=15e^{5x+1}\qquad y''=75e^{5x+1}$$

(d)　$y=2xe^x$

解 ☞ 由乘法法则,
$$y'=2x(e^x)+e^x(2)=2e^x(x+1)$$
$$y''=2e^x(1)+(x+1)(2e^x)=2e^x(x+2)$$

(e)　$y=\ln 2x^5$

解 ☞　$y'=\frac{1}{2x^5}(10x^4)=\frac{5}{x}=5x^{-1}$　$y''=-5x^{-2}=\frac{-5}{x^2}$

(f)　$y=4\ln x$

解 ☞　$y'=4\left(\frac{1}{x}\right)(1)=\frac{4}{x}=4x^{-1}$　$y''=-4x^{-2}$

9.10　求下列函数的一阶和二阶导数：

(a)　$y=a^{3x}$

解 ☞
$$y'=a^{3x}(3)\ln a=3a^{3x}\ln a$$

其中 $\ln a=a$ 为常数，所以

$$y''=(3a^{3x}\ln a)(3)\ln a=9a^{3x}(\ln a)^2$$

(b)　$y=a^{5x+1}$

解 ☞
$$y'=a^{5x+1}(5)\ln a=5a^{5x+1}\ln a$$
$$y''=(5a^{5x+1}\ln a)(5)\ln a=25a^{5x+1}(\ln a)^2$$

(c)　$y=\log_a 5x$

解 ☞
$$y'=\frac{1}{5x}(5)\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}=(x\ln a)^{-1}$$

利用广义幂函数法则

$$y''=-1(x\ln a)^{-2}\ln a=\frac{-\ln a}{x^2\ln^2 a}=-\frac{1}{x^2\ln a}$$

(d)　$y=\log_3 6x$

解 ☞
$$y'=\frac{1}{6x}(6)\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{x\ln 3}=(x\ln 3)^{-1}$$
$$y''=-1(x\ln 3)^{-2}(\ln 3)=\frac{-\ln 3}{x^2\ln^2 3}=-\frac{1}{x^2\ln 3}$$

(e)　$y=3xe^x$

解 ☞ 由乘法法则

$$y'=3x(e^x)+e^x(3)=3e^x(x+1)$$
$$y''=3e^x(1)+(x+1)(3e^x)=3e^x(x+2)$$

(f)　$y=\frac{4x}{3\ln x}$

解 ☞ 由商的法则

$$y'=\frac{(3\ln x)(4)-4x(3)(1/x)}{9\ln^2 x}=\frac{12\ln x-12}{9\ln^2 x}=\frac{12(\ln x-1)}{9\ln^2 x}$$
$$y''=\frac{(9\ln^2 x)[12(1/x)]-12(\ln x-1)[9(2)\ln x](1/x)}{81\ln^4 x}$$
$$=\frac{(108/x)(\ln^2 x)-(216/x)(\ln x-1)(\ln x)}{81\ln^4 x}$$
$$=\frac{4\ln x-8(\ln x-1)}{3x\ln^3 x}=\frac{-4\ln x+8}{3x\ln^3 x}=\frac{4(2-\ln x)}{3x\ln^3 x}$$

偏导数

9.11　求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(a)　$z=e^{x^2+y^2}$

解 ☞
$$z_x=2xe^{x^2+y^2}\qquad z_y=2ye^{x^2+y^2}$$

由乘法法则

$$z_{xx}=2x(2xe^{x^2+y^2})+e^{x^2+y^2}(2)=2e^{x^2+y^2}(2x^2+1)$$
$$z_{yy}=2y(2ye^{x^2+y^2})+e^{x^2+y^2}(2)=2e^{x^2+y^2}(2y^2+1)$$

$$z_{xy} = 4xye^{x^2+y^2} = z_{yx}$$

(b)　$z = e^{2x^2+3y}$

解 ☞

$$z_x = 4xe^{2x^2+3y} \qquad z_y = 3e^{2x^2+3y}$$

$$z_{xx} = 4x(4xe^{2x^2+3y}) + e^{2x^2+3y}(4) = 4e^{2x^2+3y}(4x^2+1)$$

$$z_{yy} = 9e^{2x^2+3y}$$

$$z_{xy} = 12xe^{2x^2+3y} = z_{yx}$$

(c)　$z = a^{2x+3y}$

解 ☞

$$z_x = a^{2x+3y}(2)\ln a = 2a^{2x+3y}\ln a$$

$$z_y = a^{2x+3y}(3)\ln a = 3a^{2x+3y}\ln a$$

$$z_{xx} = 2a^{2x+3y}(\ln a)(2)(\ln a) = 4a^{2x+3y}\ln^2 a$$

$$z_{yy} = 3a^{2x+3y}(\ln a)(3)(\ln a) = 9a^{2x+3y}\ln^2 a$$

$$z_{xy} = 6a^{2x+3y}\ln^2 a = z_{yx}$$

(d)　$z = 4^{3x+5y}$

解 ☞

$$z_x = 4^{3x+5y}(3)\ln 4 = 3(4)^{3x+5y}\ln 4$$

$$z_y = 4^{3x+5y}(5)\ln 4 = 5(4)^{3x+5y}\ln 4$$

$$z_{xx} = 3(4)^{3x+5y}(\ln 4)(3)(\ln 4) = 9(4)^{3x+5y}\ln^2 4$$

$$z_{yy} = 5(4)^{3x+5y}(\ln 4)(5)(\ln 4) = 25(4)^{3x+5y}\ln^2 4$$

$$z_{xy} = 15(4)^{3x+5y}\ln^2 4 = z_{yx}$$

(e)　$z = \ln(7x+2y)$

解 ☞

$$z_x = \frac{7}{7x+2y} \qquad z_y = \frac{2}{7x+2y}$$

由商的法则

$$z_{xx} = \frac{(7x+2y)(0)-7(7)}{(7x+2y)^2} = \frac{-49}{(7x+2y)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{(7x+2y)(0)-2(2)}{(7x+2y)^2} = \frac{-4}{(7x+2y)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{-14}{(7x+2y)^2} = z_{yx}$$

(f)　$z = \ln(x^2+4y^2)$

解 ☞

$$z_x = \frac{2x}{x^2+4y^2} \qquad z_y = \frac{8y}{x^2+4y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{(x^2+4y^2)(2)-2x(2x)}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{8y^2-2x^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{(x^2+4y^2)(8)-8y(8y)}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{8x^2-32y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{-16xy}{(x^2+4y^2)^2} = z_{yx}$$

(g)　$z = \log_a(x-2y)$

解 ☞

$$z_x = \frac{1}{(x-2y)\ln a} \qquad z_y = \frac{-2}{(x-2y)\ln a}$$

$$z_{xx} = \frac{-1\ln a}{(x-2y)^2\ln^2 a} = \frac{-1}{(x-2y)^2\ln a}$$

$$z_{yy} = \frac{4\ln a}{(x-2y)^2\ln^2 a} = \frac{4}{(x-2y)^2\ln a}$$

$$z_{xy} = \frac{2}{(x-2y)^2\ln a} = z_{yx}$$

(h)　$z = \log_a(3x^2+y^2)$

解 ☞

$$z_x = \frac{6x}{(3x^2+y^2)\ln a} \qquad z_y = \frac{2y}{(3x^2+y^2)\ln a}$$

$$z_{xx} = \frac{(3x^2 + y^2)(\ln a)(6) - 6x(6x\ln a)}{(3x^2 + y^2)^2\ln^2 a} = \frac{6y^2 - 18x^2}{(3x^2 + y^2)^2\ln a}$$

$$z_{yy} = \frac{(3x^2 + y^2)(\ln a)(2) - 2y(2y\ln a)}{(3x^2 + y^2)^2\ln^2 a} = \frac{6x^2 - 2y^2}{(3x^2 + y^2)^2\ln a}$$

$$z_{xy} = \frac{-12xy}{(3x^2 + y^2)^2\ln a} = z_{yx}$$

指数和对数函数的最优化

9.12 已知 $y = 4xe^{3x}$, (a) 求驻点, (b) 决定函数是取得最大还是最小值.

解 ☞ (a) 由乘法法则

$$y' = 4x(3e^{3x}) + e^{3x}(4) = 0$$
$$4e^{3x}(3x + 1) = 0$$

由于没有 x 的值满足 $4e^{3x} = 0$ 或 $e^x = 0$,

$$3x + 1 = 0 \qquad \bar{x} = -\frac{1}{3}$$

(b)
$$y'' = 4e^{3x}(3) + (3x + 1)(12e^{3x}) = 12e^{3x}(3x + 2)$$

在 $\bar{x} = -\frac{1}{3}$, $y'' = 12e^{-1}(1)$. 因此 $y'' = 12(0.36788) > 0$. 函数取得最小值

9.13 重做问题 9.12, 已知 $y = 5xe^{-0.2x}$.

解 ☞ (a)
$$y' = 5x(-0.2e^{-0.2x}) + e^{-0.2x}(5) = 0$$
$$5e^{-0.2x}(1 - 0.2x) = 0$$

因为 $5e^{-0.2x} \neq 0$, $(1 - 0.2x) = 0$ $\quad \bar{x} = 5$

(b)
$$y'' = 5e^{-0.2x}(-0.2) + (1 - 0.2x)(-1e^{-0.2x}) = e^{-0.2x}(0.2x - 2)$$

在 $\bar{x} = 5$, $y'' = e^{-1}(1 - 2)$. 因此 $y'' = (0.36788)(-1) < 0$. 函数取得最大值.

9.14 重做问题 9.12. 已知 $y = \ln(x^2 - 8x + 20)$.

解 ☞ (a)
$$y' = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 20} = 0$$

两边同乘以 $x^2 - 8x + 20$ 有 $2x - 8 = 0$ 及 $\bar{x} = 4$.

(b)
$$y'' = \frac{(x^2 - 8x + 20)(2) - (2x - 8)(2x - 8)}{(x^2 - 8x + 20)^2}$$

在 $\bar{x} = 4$, $y'' = \frac{8}{16} > 0$. 函数取得最小值.

9.15 重做问题 9.12, 已知 $y = \ln(2x^2 - 20x + 5)$.

解 ☞ (a)
$$y' = \frac{4x - 20}{2x^2 - 20x + 5} = 0$$
$$4x - 20 = 0 \qquad \bar{x} = 5$$

(b)
$$y'' = \frac{(2x^2 - 20x + 5)(4) - (4x - 20)(4x - 20)}{(2x^2 - 20x + 5)^2}$$

在 $\bar{x} = 5$, $y'' = -180/2025 < 0$. 函数取得最大值.

9.16 已知函数 $z = \ln(2x^2 - 12x + y^2 - 10y)$, (a) 求驻点, (b) 确定函数是取得最大值还是最小值.

解 ☞ (a)
$$z_x = \frac{4x - 12}{2x^2 - 12x + y^2 - 10y} = 0 \qquad z_y = \frac{2y - 10}{2x^2 - 12x + y^2 - 10y} = 0$$
$$4x - 12 = 0 \quad \bar{x} = 3 \qquad 2y - 10 = 0 \quad \bar{y} = 5$$

(b)
$$z_{xx} = \frac{(2x^2 - 12x + y^2 - 10y)(4) - (4x - 12)(4x - 12)}{(2x^2 - 12x + y^2 - 10y)^2}$$
$$z_{yy} = \frac{(2x^2 - 12x + y^2 - 10y)(2) - (2y - 10)(2y - 10)}{(2x^2 - 12x + y^2 - 10y)^2}$$

评估在 $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 5$ 处的值,

$$z_{xx} = \frac{(-43)(4) - 0}{(-43)^2} = \frac{-172}{1849} < 0$$

$$z_{yy} = \frac{(-43)(2) - 0}{(-43)^2} = \frac{-86}{1849} < 0$$

$$z_{xy}=\frac{-(4x-12)(2y-10)}{(2x^2-12x+y^2-10y)^2}=z_{yx}$$

在 $\bar{x}=3,\bar{y}=5$, $z_{xy}=0=z_{yx}$. 由于 $z_{xx},z_{yy}<0$ 及 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$,所以函数取得最大值.

9.17 重做问题9.16,已知 $z=\ln(x^2-4x+3y^2-6y)$.

解 ☞ (a)

$$z_x=\frac{2x-4}{x^2-4x+3y^2-6y}=0 \qquad z_y=\frac{6y-6}{x^2-4x+3y^2-6y}=0$$

$$2x-4=0 \quad \bar{x}=2 \quad 6y-6=0 \quad \bar{y}=1$$

(b)

$$z_{xx}=\frac{(x^2-4x+3y^2-6y)(2)-(2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}$$

$$z_{yy}=\frac{(x^2-4x+3y^2-6y)(6)-(6y-6)(6y-6)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}$$

在 $\bar{x}=2,\bar{y}=1$,

$$z_{xx}=\frac{(-7)(2)-0}{(-7)^2}=-\frac{14}{49}<0$$

$$z_{yy}=\frac{(-7)(6)-0}{(-7)^2}=-\frac{42}{49}<0$$

$$z_{xy}=\frac{-(2x-4)(6y-6)}{(x^2-4x+3y^2-6y)^2}=z_{yx}$$

在 $\bar{x}=2,\bar{y}=1$, $z_{xy}=0=z_{yx}$. 由于 $z_{xx},z_{yy}<0$ 及 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$,所以函数取得最大值.

9.18 重做问题9.16,已知 $z=e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}$.

解 ☞ (a) $z_x=(6x-6)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}=0 \qquad z_y=(2y-8)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}=0$

$$6x-6=0 \quad \bar{x}=1 \quad 2y-8=0 \quad \bar{y}=4$$

(b) 利用乘法法则

$$z_{xx}=(6x-6)(6x-6)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}+e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}(6)$$

$$z_{yy}=(2y-8)(2y-8)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}+e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}(2)$$

评估在 $\bar{x}=1,\bar{y}=4$ 的值,

$$z_{xx}=0+6e^{-19}>0 \qquad z_{yy}=0+2e^{-19}>0$$

再检验交叉偏导数,

$$z_{xy}=(6x-6)(2y-8)e^{(3x^2-6x+y^2-8y)}=z_{yx}$$

在 $\bar{x}=1,\bar{y}=4$ 处, $z_{xy}=0=z_{yx}$. 又由于有 $z_{xx},z_{yy}>0$ 及 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$ 成立,则函数取得最小值.

9.19 已知 $z=e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}$,重做9.16.

解 ☞ (a)

$$z_x=(4x-12-2y)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}=0$$

$$4x-2y-12=0 \tag{9.10}$$

$$z_y=(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}=0$$

$$-2x+2y-4=0 \tag{9.11}$$

联立求解(9.10)和(9.11),得 $\bar{x}=8,\bar{y}=10$.

(b) $z_{xx}=(4x-12-2y)(4x-12-2y)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(4)$

$$z_{yy}=(-2x+2y-4)(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(2)$$

评估在 $\bar{x}=8,\bar{y}=10$ 的值,

$$z_{xx}=0+4e^{-68}>0 \qquad z_{yy}=0+2e^{-68}>0$$

利用乘法法则求混合偏导数,

$$z_{xy}=(4x-12-2y)(-2x+2y-4)e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}+e^{(2x^2-12x-2xy+y^2-4y)}(-2)=z_{yx}$$

评估在 $\bar{x}=8,\bar{y}=10$ 的值,有 $z_{xy}=0-2e^{-68}=z_{yx}$. 因为又有 $z_{xx},z_{yy}>0$ 及 $z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$ 成立,所以函数取得最小值.

9.20 已知需求函数

$$P = 8.25e^{-0.02Q} \tag{9.12}$$

(a) 求当总收益最大时的量和价格,(b) 检验二阶条件.

解 ☞ (a)
$$TR = PQ = (8.25e^{-0.02Q})Q$$

由乘积法则有

$$\frac{dTR}{dQ} = (8.25e^{-0.02Q})(1) + Q(-0.02)(8.25e^{-0.02Q}) = 0$$

$$(8.25e^{-0.02Q})(1-0.02Q) = 0$$

因为对任意的 Q,有$(8.25e^{-0.02Q})\neq 0$,所以 $1-0.02Q=0$;$\overline{Q}=50$.

将 $\overline{Q}=50$ 代入(9.12),有 $P=8.25e^{-0.02(50)}$及 $P=8.25(0.36788)=3.04$.

(b) 由乘积法则有

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = (8.25e^{-0.02Q})(-0.02) + (1-0.02Q)(-0.02)(8.25e^{-0.02Q})$$
$$= (-0.02)(8.25e^{-0.02Q})(2-0.02Q)$$

评估在 $\overline{Q}=50$ 的值,

$$d^2TR/dQ^2 = (-0.02)(8.25e^{-1})(1) = -0.165(0.36788) < 0.$$

所以 TR 取得最大值.

9.21 已知需求函数 $P=12.50e^{-0.005Q}$,(a) 求总收益最大时的量和价格,(b) 检验二阶条件.

解 ☞ (a)
$$TR = (12.50e^{-0.005Q})Q$$

$$\frac{dTR}{dQ} = (12.50e^{-0.005Q})(1) + Q(-0.005)(12.50e^{-0.005Q})$$
$$= (12.50e^{-0.005Q})(1-0.005Q) = 0$$
$$1-0.005Q = 0 \qquad \overline{Q} = 200$$

所以,

$$P = 12.50e^{-0.005(200)} = 12.50e^{-1} = 12.50(0.36788) = 4.60$$

(b)
$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = (12.50e^{-0.005Q})(-0.005) + (1-0.005Q)(-0.005)(12.50e^{-0.005Q})$$
$$= (-0.005)(12.50e^{-0.005Q})(2-0.005Q)$$

评估在 $\overline{Q}=200$ 的值,

$$d^2TR/dQ^2 = (-0.005)(12.50e^{-1})(1) = -0.0625(0.36788) < 0.$$

所以函数取得最大值.

对数化微分法

9.22 利用对数化微分法求下列函数的导数:

解 ☞ (a)
$$g(x) = (x^3-2)(x^2-3)(8x-5) \tag{9.13}$$

(1) 两边取自然对数,

$$\ln g(x) = \ln(x^3-2) + \ln(x^2-3) + \ln(8x-5)$$

(2) 求 $\ln g(x)$的导数,

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5} \tag{9.14}$$

(3) 从(9.14)中代数地解出 $g'(x)$,

$$g'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right)\cdot g(x) \tag{9.15}$$

(4) 将(9.13)中的 $g(x)$代入(9.15),

$$g'(x) = \left(\frac{3x^2}{x^3-2} - \frac{2x}{x^2-3} + \frac{8}{8x-5}\right)[(x^3-2)(x^2-3)(8x-5)]$$

(b)
$$g(x) = (x^4+7)(x^5+6)(x^3+2) \tag{9.16}$$

(1) $$\ln g(x)=\ln(x^4+7)+\ln(x^5+6)+\ln(x^3+2)$$

(2) $$\frac{d}{dx}[\ln g(x)]=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{4x^3}{x^4+7}+\frac{5x^4}{x^5+6}+\frac{3x^2}{x^3+2}$$

(3) $$g'(x)=\left(\frac{4x^3}{x^4+7}+\frac{5x^4}{x^5+6}+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)\cdot g(x) \tag{9.17}$$

(4) 最后,将(9.16)的 $g(x)$ 代入(9.17),

$$g'(x)=\left(\frac{4x^3}{x^4+7}+\frac{5x^4}{x^5+6}+\frac{3x^2}{x^3+2}\right)\cdot(x^4+7)(x^5+6)(x^3+2)$$

(c) $$g(x)=\frac{(3x^5-4)(2x^3+9)}{(7x^4-5)}$$

(1) $$\ln g(x)=\ln(3x^5-4)+\ln(2x^3+9)-\ln(7x^4-5)$$

(2) $$\frac{d}{dx}[\ln g(x)]=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{15x^4}{3x^5-4}+\frac{6x^2}{2x^3+9}-\frac{28x^3}{7x^4-5}$$

(3) $$g'(x)=\left(\frac{15x^4}{3x^5-4}+\frac{6x^2}{2x^3+9}-\frac{28x^3}{7x^4-5}\right)\cdot g(x)$$

(4) $$g'(x)=\left(\frac{15x^4}{3x^5-4}+\frac{6x^2}{2x^3+9}-\frac{28x^3}{7x^4-5}\right)\cdot\frac{(3x^5-4)(2x^3+9)}{(7x^4-5)}$$

增长率

9.23 农产品的价格以每年 4% 的速度上涨,产量以 2% 的速度增加,求来自农业部门的收益 R 的年增长率.

解 ☞ 将收益公式 $R=PQ$ 转化为自然对数,

$$\ln R=\ln P+\ln Q$$

自然对数的导数同时也是函数的增长率 G(见 9.6 节),所以

$$G=\frac{d}{dt}(\ln R)=\frac{d}{dt}(\ln P)+\frac{d}{dt}(\ln Q)$$

但是,

$$\frac{d}{dt}(\ln P)=\text{价格 } P \text{ 的增长}=4\%$$

$$\frac{d}{dt}(\ln Q)=\text{产量 } Q \text{ 的增长}=2\%$$

所以,

$$G=\frac{d}{dt}(\ln R)=0.04+0.02=0.06$$

涉及产品的函数的增长率是各个成份的各自增长率之和.

9.24 在一定时间内,一企业的输入量以 10% 的速度增加,而输入成本以 3% 的速度增长.总输入成本的增长率是多少?

解 ☞

$$C=PQ$$

$$\ln C=\ln P+\ln Q$$

$$G=\frac{d}{dt}(\ln C)=\frac{d}{dt}(\ln P)+\frac{d}{dt}(\ln Q)=0.03+0.10=0.13$$

9.25 就业机会 E 每年以 4% 的速度增加,而人口以 2.5% 的速度增长.求每人就业 PCE 的增长率.

解 ☞

$$\text{PCE}=\frac{E}{P}$$

$$\ln \text{PCE}=\ln E-\ln P$$

求导数便得到增长率,

$$G=\frac{d}{dt}(\ln \text{PCE})=\frac{d}{dt}(\ln E)-\frac{d}{dt}(\ln P)=0.04-0.025=0.015=1.5\%$$

涉及商的函数的增长率是分子与分母各自增长率之差.

9.26 国民收入 Y 以 1.5% 的速度增长,而人口 P 以 2.5% 的速度增加,求每人国民收入的增长率.

解 ☞

$$PCY = \frac{Y}{P}$$

$$\ln PCY = \ln Y - \ln P$$

$$G = \frac{d}{dt}(\ln PCY) = \frac{d}{dt}(\ln Y) - \frac{d}{dt}(\ln P)$$

$$= 0.015 - 0.025 = -0.01 = -1\%$$

每人国民收入以 1% 的速度下降.

9.27 一个国家出口两种产品,分别是铜 c 和香蕉 b,它们的收入以百万元计,

$$c = c(t_0) = 4 \qquad b = b(t_0) = 1$$

如果 c 以 10% 的速度增加,b 以 20% 的速度增长,求出口创汇 E 的增长率.

解 ☞

$$E = c + b$$

$$\ln E = \ln(c + b)$$

$$G = \frac{d}{dt}(\ln E) = \frac{d}{dt}\ln(c + b)$$

由 9.13 节的求导法则,有

$$G_E = \frac{1}{c + b}[c'(t) + b'(t)] \tag{9.18}$$

由 9.6 节,有

$$G_c = \frac{c'(t)}{c(t)} \qquad G_b = \frac{b't}{b(t)}$$

所以

$$c'(t) = G_c c(t) \qquad b'(t) = G_b b(t)$$

代入(9.18)

$$G_E = \frac{1}{c + b}[G_c c(t) + G_b b(t)]$$

整理

$$G_E = \frac{c(t)}{c + b}G_c + \frac{b(t)}{c + b}G_b$$

代入已知值

$$G_E = \frac{4}{4 + 1}(0.10) + \frac{1}{4 + 1}(0.20) = \frac{4}{5}(0.10) + \frac{1}{5}(0.20) = 0.12 \quad 或 \quad 12\%$$

涉及其他函数之和的函数的增长率是其他函数增长率的加权平均.

9.28 一个公司的收益 70% 来自浴室设备,20% 来自浴帽,10% 来自浴巾.如果收益分别增加 15%,5% 及 4%,求总收益的增长率.

解 ☞

$$G_R = 0.70(0.15) + 0.20(0.05) + 0.10(0.04)$$

$$= 0.105 + 0.01 + 0.004 = 0.119 \quad 或 \quad 11.9\%$$

9.29 已知 $S(t) = 100\ 000e^{0.5\sqrt{t}}$,求在 $t = 4$ 时的销量相对增长率 G.

解 ☞ $\ln S(t) = \ln 100\ 000 + \ln e^{0.5\sqrt{t}} - \ln 100\ 000 + 0.5\sqrt{t}$

求导数,注意 $0.5\sqrt{t} = 0.5t^{1/2}$,

$$G = \frac{d}{dt}\ln S(t) = \frac{S'(t)}{S(t)} = 0.5\left(\frac{1}{2}\right)t^{-1/2} = \frac{0.25}{\sqrt{t}}$$

在 $t = 4$ 时,

$$G = \frac{0.25}{\sqrt{4}} = 0.125 = 12.5\%$$

9.30 已知 $\pi(t) = 250\ 000e^{1.2t^{1/3}}$.求在 $t = 8$ 时的利润相对增长率.

解 ☞

$$\ln \pi(t) = \ln 250\ 000 + 1.2t^{1/3}$$

$$G = \frac{d}{dt}\ln \pi(t) = \frac{\pi'(t)}{\pi(t)} = 1.2\left(\frac{1}{3}\right)t^{-2/3} = \frac{0.4}{t^{2/3}}$$

在 $t = 8$ 时,

$$G = \frac{0.4}{8^{2/3}} \approx \frac{0.4}{4} = 0.1 = 10\%$$

时间最优

9.31　现值 \$100 的切割用玻璃以下面公式增值，

$$V = 100e^{\sqrt{t}} = 100e^{t^{1/2}}$$

在以(a)　$r=0.08$，(b)　$r=0.12$ 连续复利的情形下，保持多久才会使现值最大?

解　(a)　现值 P 为 $P=Ve^{-rt}$，代入 V 及 r 的值，

$$P = 100e^{\sqrt{t}}e^{-0.08t} = 100e^{\sqrt{t}-0.08t}$$

转换成自然对数，有 $\ln P=\ln 100+\ln e^{\sqrt{t}-0.08t}=\ln 100+t^{1/2}-0.08t$。求导数，并令其为零，注意：$\ln 100$ 为常数.

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08$$

$$\frac{dP}{dt} = P\left(\frac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08\right) = 0 \tag{9.19}$$

因为 $P\neq 0$，

$$\frac{1}{2}t^{-1/2} = 0.08$$

$$t^{-1/2} = 0.16$$

$$t = (0.16)^{-2} = \frac{1}{0.0256} = 39.06$$

检验二阶条件，由于 $P=f(t)$，利用乘积法则有

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P\left(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\right) + \left(\frac{1}{2}t^{-1/2} - 0.08\right)\frac{dP}{dt}$$

因为在驻点处，有 $dP/dt\neq 0$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{-P}{4\sqrt{t^3}}$$

由于 P 及 t 均为正，所以上式为负，从而在 $t=39.06$ 时，函数取得最大值.

(b)　如果 $r=0.12$，在(9.19)中用 0.12 代替 0.08，

$$\frac{dP}{dt} = P\left(\frac{1}{2}t^{-1/2} - 0.12\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}t^{-1/2} = 0.12$$

$$t = (0.24)^{-2} = \frac{1}{0.0576} = 17.36$$

二阶条件不变.注意到，贴现率越高，储藏的时间越短.

9.32　为投机买入的土地以下面公式增值

$$V = 1000e^{\sqrt[3]{t}}$$

在连续复利的情形下贴现率为 0.09，为使土地的现值最大，应该持有该土地多久?

解

$$P = 1000e^{\sqrt[3]{t}}e^{-0.09t} = 1000e^{\sqrt[3]{t}-0.09t}$$

转换为自然对数，

$$\ln P = \ln 1000 + t^{1/3} - 0.09t$$

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09 = 0$$

求导数

$$\frac{dP}{dt} = P\left(\frac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}t^{-2/3} = 0.09 \qquad t = 0.27^{-3/2} \approx 7.13\text{年}$$

二阶条件为

$$\frac{d^2P}{dt^2} = P\left(-\frac{2}{9}t^{-5/3}\right) + \left(\frac{1}{3}t^{-2/3} - 0.09\right)\frac{dP}{dt} = -\frac{2P}{9\sqrt[3]{t^5}} < 0$$

注意 $dP/dt = 0$.

9.33　当前已故画家的艺术收藏品的估价为

$$V = 200\ 000(1.25)^{\sqrt[3]{t^2}}$$

在连续复利的情形下，如果贴现率为 0.06，则收藏者应持有多久后再出售，才会赚最多的钱？

解　☞ 将 V 的值代入 $P = Ve^{-rt}$，

$$P = 200\ 000(1.25)^{t^{2/3}}e^{-0.06t}$$

$$\ln P = \ln 200\ 000 + t^{2/3}\ln 1.25 - 0.06t$$

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{2}{3}(\ln 1.25)t^{-1/3} - 0.06 = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P\left[\frac{2}{3}(\ln 1.25)t^{-1/3} - 0.06\right] = 0$$

$$t^{-1/3} = \frac{3(0.06)}{2\ln 1.25} \qquad t = \left[\frac{0.18}{2(0.22314)}\right]^{-3} = (0.403)^{-3} \approx 15.3\ 年$$

9.34　为投资而买入的钻石的价值为

$$V = 250\ 000(1.75)^{\sqrt[4]{t}}$$

如果在连续复利的情形下，利率为 0.07，应持有多久获利才最大？

解　☞

$$P = 250\ 000(1.75)^{t^{1/4}}e^{-0.07t}$$

$$\ln P = \ln 250\ 000 + t^{1/4}(\ln 1.75) - 0.07t$$

$$\frac{d}{dt}(\ln P) = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{4}(\ln 1.75)t^{-3/4} - 0.07 = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = P\left[\frac{1}{4}(\ln 1.75)t^{-3/4} - 0.07\right] = 0$$

$$\frac{1}{4}(\ln 1.75)t^{-3/4} - 0.07 = 0 \quad t = \left(\frac{0.28}{\ln 1.75}\right)^{-4/3} = (0.50)^{-4/3} \approx 2.52\ 年$$

部分法则的证明

9.35　证明 $\ln x$ 的导数公式.

证　☞ 由导数的定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

特别地，$f(x) = \ln x$，

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

由对数性质 $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$，

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\ln[(x + \Delta x)/x]}{\Delta x}$$

整理得

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

变形得

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$

由对数性质，$a\ln x = \ln x^a$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

由于对数函数为连续的，有

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

令 $n = x/\Delta x$ 则当 $\Delta x\to 0$，有 $n\to\infty$，于是

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

由 7.4 节，$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$，所以

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

9.36　假设 $g(x)$为正且可微，证明 $y=\ln g(x)$的导数公式.

证　☞ 令 $y=\ln u$ 及 $u=g(x)$，于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

其中

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \quad 及 \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

代入

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot g'(x)$$

用 $g(x)$代替 u

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$$

所以

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

9.37　证明函数 $y=e^x$ 的导数为 e^x.

证　☞ 两边取自然对数

$$\ln y = \ln e^x$$

由方程(7.3)

$$\ln y = x$$

利用隐函数微分法则，注意 y 是 x 的函数，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

用 e^x 代替 y

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

9.38　已知 $y=e^{g(x)}$，证明 $dy/dx=e^{g(x)}\cdot g'(x)$.

证　☞ 利用链式法则，令 $y=e^u$ 及 $u=g(x)$；于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

其中

$$\frac{dy}{du} = e^u \quad 及 \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

代入

$$\frac{dy}{dx} = e^u\cdot g'(x)$$

用 $e^{g(x)}$代替左边的 y，用 $g(x)$代替右边的 u.

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)}\cdot g'(x)$$

9.39　证明 $\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$.

证　☞ 令 $s=\log_a x$ 及 $t=\log_a y$, 由 7.2 节的对数定义有

$$a^s = x \quad 及 \quad a^t = y$$

$$\frac{a^s}{a^t} = \frac{x}{y}$$

由指数的性质, 及 $a^s/a^y=a^{s-y}$

$$a^{s-t} = \frac{x}{y}$$

再次利用对数的定义

$$\log_a \frac{x}{y} = s - t$$

但 $s=\log_a x$, $t=\log_a y$, 所以

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

9.40　证明 $\log_a e=1/\ln a$, 见(9.4)方程.

证　☞ 将已知方程的两边作为 a 的指数,

$$a^{\log_a e} = a^{1/\ln a}$$

但 $a^{\log_a e}=e$. 代入

$$e = a^{1/\ln a}$$

两边取对数, 得

$$\log_a e = \log_a a^{1/\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

第十章 线性代数(矩阵)的基本原理

10.1 线性代数的角色

线性代数(1) 以简明方式表示复杂方程系统,(2) 提供简便方法验证方程组解的存在与否,而不必求解以及(3) 丰富方程系统的求解方法.然而,线性代数只能用于线性系统,由于许多经济关系可以由线性方程来近似,而余下的可以转换为线性关系,所以上述限制几乎是可以避免的.见例2和7.6节.

例1 一个公司具有几个发货口,均销售几种不同的产品.用一个矩阵来表示存货的情况.

发货口	滑雪板	钎	绑带	整套设备
1	120	110	90	150
2	200	180	210	110
3	175	190	160	80
4	140	170	180	140

矩阵的行表示各个发货口的存货水平,列代表各个产品的存货情况.

例2 非线性函数,例如有理函数 $z=x^{0.3}/y^{0.6}$,通过简单的整理很容易变成线性函数.

$$z=\frac{x^{0.3}}{y^{0.6}}=x^{0.3}y^{-0.6}$$

由对数变换有

$$\ln z=0.3\ln x-0.6\ln y$$

该函数是对数-线性的.类似地,许多指数函数和幂函数也很容易转换为线性的,于是用线性代数来处理.见7.6节.

10.2 定义和规定

矩阵是数,参数或变量的矩形排列.这些数(参数或变量)称为矩阵的元素.水平线上的数称为行,垂直向上的数称为列.设行的个数为 r,列的个数为 c,矩阵的维数定义为 $r\times c$,读作 r 乘 c.行的数 r 始终放在列数 c 之前.当行数等于列数,即 $r=c$ 时,矩阵称为方阵.如果矩阵是由单列构成的,即维数为 $r\times 1$,则称为列向量;如果矩阵由单行构成,即维数为 $1\times c$,则称为行向量.将矩阵 $\mathbf{A}$ 的行作为列,将其列作为行得到的矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的转置,记作 $\mathbf{A}'$(或 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$).见例3及问题10.1~10.3.

例3 已知

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&9&8\\4&2&7\end{bmatrix}_{2\times3}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}7\\4\\5\end{bmatrix}_{3\times1}\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}3&0&1\end{bmatrix}_{1\times3}$$

这里的 $\mathbf{A}$ 为由 $3\times3=9$ 个元素组成的矩阵,排列为三行三列,所以是方阵.注意到在矩阵的元素之间没有隔离符号.所有元素都有两个下标,准确地确定了在矩阵中的位置.第一个下标代表元素所在的行,第二个下标代表元素所在的列.a_{23}是出现在第二行第三列的那个元素;a_{32}是指出现在第三行第二列上的元素.纵向数得到行数,横向数得到列数.

这里的 $\boldsymbol{B}$ 为 2×3 矩阵.它的 b_{12}元素为9,b_{21}元素为4.矩阵 $\mathbf{C}$ 为 3×1 维的列向量;$\boldsymbol{D}$ 为 1×3 维的行向量.

$\boldsymbol{A}$ 的转置为

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ 的转置为

$$\boldsymbol{C}' = [7 \quad 4 \quad 5]$$

10.3 矩阵的加法和减法

矩阵的加法和减法要求矩阵必须有相同维数. 一个矩阵的每一个元素加到(或减去)另一个矩阵的相应位置的元素. 见例 4、例 5 及问题 10.4～10.8.

例 4 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 它们的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的计算如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

已知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$, 它们的差 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}$ 计算如下:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \boldsymbol{C}-\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 4-1 & 9-7 \\ 2-5 & 6-4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

例 5 假设例 1 中的企业的供货口收到发货 D, 新的存货水平为多少?

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 & 10 \\ 25 & 30 & 10 & 60 \\ 15 & 0 & 40 & 70 \\ 60 & 40 & 10 & 50 \end{bmatrix}$$

将例 1 中的初始矩阵记作 $\boldsymbol{S}$, 新的存货水平即为 $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}$, 相加相应的元素,

$$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 120+40 & 110+20 & 90+50 & 150+10 \\ 200+25 & 180+30 & 210+10 & 110+60 \\ 175+15 & 190+0 & 160+40 & 80+70 \\ 140+60 & 170+40 & 180+10 & 140+50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & 130 & 140 & 160 \\ 225 & 210 & 220 & 170 \\ 190 & 190 & 200 & 150 \\ 200 & 210 & 190 & 190 \end{bmatrix}$$

10.4 标量乘法

在矩阵代数中, 形如 12, −2 或 0.07 的简单数称为因数. 因数与矩阵相乘即是该数与矩阵的每一个元素相乘. 由于矩阵相应地放大或缩小了该数的倍数, 所以称此过程为标量乘法. 见例 6 及问题 10.10～10.12.

例 6 已知 $k=8$ 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下, 求标量乘法 $k\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8(6) & 8(9) \\ 8(2) & 8(7) \\ 8(8) & 8(4) \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 48 & 72 \\ 16 & 56 \\ 64 & 32 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

10.5 向量乘法

行向量 $\boldsymbol{A}$ 与列向量 $\boldsymbol{B}$ 相乘必须有一个前提: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的元素个数. 对应元素相乘

后再相加,便得到积

$$AB = (a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31})$$

行-列的乘积为一个数或因子.行-列向量乘法是极为重要的,因为它是矩阵乘法的基础.见例7及问题10.13～10.18.

例7　已知 A,B 如下,求行向量 A 与列向量 B 的乘积 AB.

$$A = [4 \quad 7 \quad 2 \quad 9]_{1\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

$$AB = 4(12) + 7(1) + 2(5) + 9(6) = 48 + 7 + 10 + 54 = 119$$

已知向量 C,D,

$$C = [3 \quad 6 \quad 8]_{1\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

它们的乘积为

$$CD = (3 \times 2) + (6 \times 4) + (8 \times 5) = 6 + 24 + 40 = 70$$

注意,由于以上两组的行-列向量都有相同的元素个数,所以,乘积是可能的.

颠倒乘积的顺序(BA 或 DC)会得到完全不同的答案.

例8　通过下面的例子,或许会更容易理解向量相乘的含义.

假设 Q 是某一天售出的汉堡包,炸薯条和苏打水的量,而 P 为它们的价格.

$$Q = [12 \quad 8 \quad 10] \qquad P = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

则通过向量相乘得到那一天的总销售价值 TVS 为

$$\text{TVS} = QP = [12(1.25) + 8(0.75) + 10(0.50)] = 26.00$$

10.6　矩阵相乘

维数为$(r_1 \times c_1)$和$(r_2 \times c_2)$的两个矩阵相乘要求矩阵是协调的,即 $c_1 = r_2$,或引导矩阵的列数等于滞后矩阵的行数.于是根据10.5节的行向量与列向量乘法规则,用引导矩阵中的每一行与滞后矩阵中的每一列相乘.行-列向量的乘积,称为内积或点积.积矩阵 C 就是由行-列的内积作为元素构成的,即 C 的每一个元素 C_{ij} 是由引导矩阵的第 i 行向量与滞后矩阵的第 j 列向量相乘得到的.见例9～例11及问题10.19～10.33.

例9　已知

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 5 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

在作矩阵乘法之前,需检验两个矩阵的协调性.简便的检验方法:将它们的维数以矩阵相乘的顺序放好,然后在心里将第一组的后一个数与第二组的前一个数圈起来,如果二个数相等,即引导矩阵的列数等于滞后矩阵的行数,则它们是协调的.而且,在圈之外的两个数恰好构成了乘积矩阵的维数.所以,对于 AB

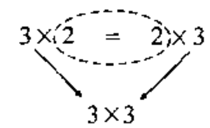
$$2\times(3 = 3)\times 2$$

$$2\times 2$$

引导矩阵的列数等于滞后矩阵的行数 3＝3;两个矩阵是相乘协调的;乘积矩阵 AB 的

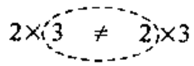
维数为 2×2. 当两个矩阵相乘协调时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是有定义的.

对于 $\boldsymbol{BC}$,



引导矩阵 B 的列数等于滞后矩阵 C 的行数 $2=2$；所以 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是协调的. 积 $\boldsymbol{BC}$ 有定义，且 $\boldsymbol{BC}$ 是 3×3 的矩阵.

对于 $\boldsymbol{AC}$,



$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是相乘不协调的，所以 $\boldsymbol{AC}$ 没有定义.

例 10　由于例 9 中的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 已经得到验证是协调的，则可以求出积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{D}$. 用引导矩阵的第一行 R_1 乘以滞后矩阵的第一列 C_1 便得到矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的第一个元素 $d_{11}(=R_1C_1)$，再用 R_1 乘以滞后矩阵的第二列 C_2 得到 $\boldsymbol{D}$ 的元素 $d_{12}(=R_1C_2)$. 由于滞后矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有两列，转移到引导矩阵的第二行 R_2，用 R_2 乘以 C_1，得到 $d_{21}(=R_2C_1)$，最后，用 R_2 乘以 C_2，得到 $d_{22}(=R_2C_2)$. 所以，

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2\\ R_2C_1 & R_2C_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2)\\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2)\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}139 & 110\\ 260 & 256\end{bmatrix}_{2\times2}$$

利用同样的方法计算 $\boldsymbol{BC}$,

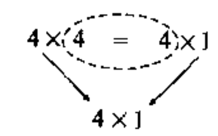
$$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3\\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3\\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6(1)+12(2) & 6(7)+12(4) & 6(8)+12(3)\\ 5(1)+10(2) & 5(7)+10(4) & 5(8)+10(3)\\ 13(1)+2(2) & 13(7)+2(4) & 13(8)+2(3)\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}30 & 90 & 84\\ 25 & 75 & 70\\ 17 & 99 & 110\end{bmatrix}_{3\times3}$$

例 11　参考例 1，假设滑板的价格为 \$200，钎的价格为 \$50，绑带的价格为 \$100，以及设备的价格为 \$150. 将价格用列向量 $\boldsymbol{P}$ 表示，则存货的价值为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{SP}=\begin{bmatrix}120 & 110 & 90 & 150\\ 200 & 180 & 210 & 110\\ 175 & 190 & 160 & 80\\ 140 & 170 & 180 & 140\end{bmatrix}_{4\times4}\begin{bmatrix}200\\ 50\\ 100\\ 150\end{bmatrix}_{4\times1}$$

两个矩阵为协调的，且积矩阵为 4×1 维的，因为



所以，

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}R_1C_1\\ R_2C_1\\ R_3C_1\\ R_4C_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}120(200)+110(50)+90(100)+150(150)\\ 200(200)+180(50)+210(100)+110(150)\\ 175(200)+190(50)+160(100)+80(150)\\ 140(200)+170(50)+180(100)+140(150)\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}61\ 000\\ 86\ 500\\ 72\ 500\\ 75\ 500\end{bmatrix}_{4\times1}$$

10.7　矩阵代数的交换、结合及分配定律

由于矩阵相加仅涉及矩阵的相应元素求和，与顺序无关，所以矩阵加法是可交换的(即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$)，同理，矩阵加法也是可结合的，即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$. 以上两定律对于矩阵的减法同样适用，这是由于矩阵减法 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可以转换为矩阵加法$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

矩阵的乘法除极少的 n 个特例外不满足交换律(即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$). 数量乘法满足交换律(即 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k$). 如果三个或三个以上矩阵是协调的. 即 $\boldsymbol{X}_{a\times b}$, $\boldsymbol{Y}_{c\times d}$, $\boldsymbol{Z}_{e\times f}$, 其中 $b=c$ 及 $d=e$, 只要矩阵以协调的顺序相乘，结合律是成立的，即$(\boldsymbol{XY})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{YZ})$. 在满足相同的条件下，矩阵乘法也满足分配定律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$. 见例 12～例 14 及问题 10.34～10.48.

例 12　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 17 & 6\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

证明(1) 矩阵的加法满足交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$, (2) 矩阵减法满足交换律 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

证 ☞ (1)

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4+3 & 11+7\\ 17+6 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 23 & 8\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$
$$=\begin{bmatrix}3+4 & 7+11\\ 6+17 & 2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 18\\ 23 & 8\end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4-3 & 11-7\\ 17-6 & 6-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3+4 & -7+11\\ -6+17 & -2+6\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}$$

例 13　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 7\\ 12 & 9 & 11\end{bmatrix}_{2\times 3}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 5 & 10\\ 13 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

验证矩阵乘法不满足交换律 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

证 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 是协调的，　$2\times(3=3)\times 2$　$\boldsymbol{AB}$ 是 2×2

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2)\\ 12(6)+9(5)+11(13) & 12(12)+9(10)+11(2)\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}139 & 110\\ 260 & 256\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 是协调的，　$3\times(2=2)\times 3$　$\boldsymbol{BA}$ 是 3×3

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}6(3)+12(12) & 6(6)+12(9) & 6(7)+12(11)\\ 5(3)+10(12) & 5(6)+10(9) & 5(7)+10(11)\\ 13(3)+2(12) & 13(6)+2(9) & 13(7)+2(11)\end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}162 & 144 & 174\\ 135 & 120 & 145\\ 63 & 96 & 113\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 通常矩阵不会在两个方向上都协调.

例 14　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 1 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}_{3\times 2}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & 9 & 10\\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 7\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

证明矩阵乘法满足结合律，即$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

证 ☞

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7(4)+5(2) & 7(9)+5(6) & 7(10)+5(5)\\ 1(4)+3(2) & 1(9)+3(6) & 1(10)+3(5)\\ 8(4)+6(2) & 8(9)+6(6) & 8(10)+6(5)\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\10 & 27 & 25\\44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\10 & 27 & 25\\44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{3\times 3}\begin{bmatrix}2\\6\\7\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix}38(2)+93(6)+95(7)\\10(2)+27(6)+25(7)\\44(2)+108(6)+110(7)\end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix}1299\\357\\1506\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}4(2)+9(6)+10(7)\\2(2)+6(6)+5(7)\end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}132\\75\end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\begin{bmatrix}7 & 5\\1 & 3\\8 & 6\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}132\\75\end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}7(132)+5(75)\\1(132)+3(75)\\8(132)+6(75)\end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix}1299\\357\\1506\end{bmatrix}_{3\times 1}\qquad \text{Q.E.D.}$$

10.8　单位矩阵和零矩阵

单位矩阵是指主对角线上从左到右的元素均为 1，其他元素均为 0 的方矩阵. 见例 15. 记作 $\boldsymbol{I}$，有时也记作 $\boldsymbol{I}_n$，其中 n 代表矩阵 $n\times n$ 的维数. 单位矩阵与代数中的数字 1 很相似，因为一个矩阵与单位矩阵相乘保持不变，(即 $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$). 单位矩阵与它本身相乘仍是它本身：$\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^2=\boldsymbol{I}$. 对于满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$ 的矩阵，称为对称矩阵. 满足 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ 的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为等幂矩阵. 单位矩阵是对称等幂矩阵.

零矩阵的元素全部为 0，是任意维数的；零矩阵不一定是方矩阵. 一个矩阵加或减零矩阵仍是原矩阵本身；一矩阵与零矩阵相乘，得到零矩阵. 见例 15 及问题 10.49～10.51.

例 15　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 10 & 14\\9 & 2 & 6\\1 & 3 & 7\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 12\\20 & 4\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

证明：(1)　$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$，即与单位矩阵相乘仍是原矩阵，(2)　$\boldsymbol{BN}=\boldsymbol{N}$，与零矩阵相乘产生零矩阵，(3)　$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}$，即加或减零矩阵仍等于原矩阵.

证　☞ (1)

$$\boldsymbol{AI}=\begin{bmatrix}7 & 10 & 14\\9 & 2 & 6\\1 & 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\8 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7(1)+10(0)+14(0) & 7(0)+10(1)+14(0) & 7(0)+10(0)+14(1)\\9(1)+2(0)+6(0) & 9(0)+2(1)+6(0) & 9(0)+2(0)+6(1)\\1(1)+3(0)+7(0) & 1(0)+3(1)+7(0) & 1(0)+3(0)+7(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 10 & 14\\9 & 2 & 6\\1 & 3 & 7\end{bmatrix}\qquad \text{Q.E.D.}$$

(2)

$$\boldsymbol{BN}=\begin{bmatrix}5(0)+12(0) & 5(0)+12(0)\\20(0)+4(0) & 20(0)+4(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\qquad \text{Q.E.D.}$$

(3)

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}5+0 & 12+0\\20+0 & 4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 12\\20 & 4\end{bmatrix}\qquad \text{Q.E.D.}$$

10.9　线性方程组的矩阵表示

矩阵代数可以精练地表示线性方程组.例如,线性方程组

$$7x_1+3x_2=45$$
$$4x_1+5x_2=29$$

可以用矩阵的形式表示

$$AX=B$$

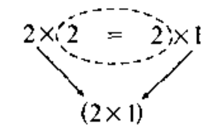
其中

$$A=\begin{bmatrix}7&3\\4&5\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad 及\quad B=\begin{bmatrix}45\\29\end{bmatrix}$$

这里 A 为系数矩阵, X 为解向量, B 为常数向量. X 和 B 总是列向量.见例 16 及 17.

例 16　为了证明 $AX=B$ 准确地代表着上述方程组,必须求出 AX.

证　☞ 因为 A 和 X 是协调的,积 AX 是有意义的,且其维数为 2×1,



所以,

$$AX=\begin{bmatrix}7&3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7x_1+3x_2\\4x_1+5x_2\end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$AX=B:\begin{bmatrix}7x_1+3x_2\\4x_1+5x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45\\29\end{bmatrix}\qquad \text{Q.E.D.}$$

例 17　已知

$$8w+12x-7y+2z=139$$
$$3w-13x+4y+9z=242$$

为了用矩阵形式表示该方程组,在心里颠倒矩阵乘法的顺序:

$$\begin{bmatrix}8&12&-7&2\\3&-13&4&9\end{bmatrix}_{2\times4}\begin{bmatrix}w\\x\\y\\z\end{bmatrix}_{4\times1}=\begin{bmatrix}139\\242\end{bmatrix}_{2\times1}$$

令 A 为系数矩阵, W 为变量列向量, B 为常数列向量,方程组可以表达为

$$A_{2\times4}W_{4\times1}=B_{2\times1}$$

习 题 解 答

矩阵格式

10.1　(a)　指出下列矩阵的维数,(b)　给出它们的转置及其维数.

$$A=\begin{bmatrix}6&7&9\\2&8&4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}12&9&2&6\\7&5&8&3\\9&1&0&4\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}12\\19\\25\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}2&1\\7&8\\3&0\\9&5\end{bmatrix}\qquad E=\begin{bmatrix}10&2&9&6&8&1\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}1&2&5\\5&9&3\\6&7&6\\3&8&9\end{bmatrix}$$

解 ☞ (a)　$\boldsymbol{A}=2\times3$, $\boldsymbol{B}=3\times4$, $\boldsymbol{C}=3\times1$, $\boldsymbol{D}=4\times2$, $\boldsymbol{E}=1\times6$ 及 $\boldsymbol{F}=4\times3$. $\boldsymbol{C}$ 为列向量. $\boldsymbol{E}$ 为行向量.

(b)　$\boldsymbol{A}$ 的转置即是将 $\boldsymbol{A}$ 的行作为列,列作为行.

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}6&2\\7&8\\9&4\end{bmatrix}_{3\times2}\qquad \boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix}12&7&9\\9&5&1\\2&8&0\\6&3&4\end{bmatrix}_{4\times3}\qquad \boldsymbol{C}'=\begin{bmatrix}12&19&25\end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$\boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix}2&7&3&9\\1&8&0&5\end{bmatrix}_{2\times4}\qquad \boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}10\\2\\9\\6\\8\\1\end{bmatrix}_{6\times1}\qquad \boldsymbol{F}'=\begin{bmatrix}1&5&6&3\\2&9&7&8\\5&3&6&9\end{bmatrix}_{3\times4}$$

10.2　已知 $a_{21}=4$, $a_{32}=5$, $a_{13}=3$, $a_{23}=6$, $a_{12}=10$ 及 $a_{31}=-5$,利用你的下标知识完成下面的矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&—&—\\—&7&—\\—&—&9\end{bmatrix}$$

解 ☞ 由于下标总是以行-列的顺序给出,所以 $a_{21}=4$ 意味着 4 位于第二行第一列; $a_{32}=5$ 意味着 5 位于第三行第二列;等等. 所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&10&3\\4&7&6\\-5&5&9\end{bmatrix}$$

10.3　一个公司有 5 家零售店,第一家有 10 台电视 t, 15 个立体电唱机 s, 9 个磁带架 d, 12 个录音机 r;第二家有 $20t$, $14s$, $8d$, $5r$;第三家有 $16t$, $8s$, $15d$, $6r$;第四家有 $25t$, $15s$, $7d$, $16r$;第五家有 $5t$, $12s$, $20d$, $18r$. 用矩阵表示各家零售店的存货.

解 ☞

零售店	t	s	d	r
1	10	15	9	12
2	20	14	8	5
3	16	8	15	6
4	25	15	7	16
5	5	12	20	18

矩阵的加法和减法

10.4　求下列矩阵的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(a)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8&9\\12&7\end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}13&4\\2&6\end{bmatrix}$

解 ☞

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}8+13&9+4\\12+2&7+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&13\\14&13\end{bmatrix}$$

(b)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&-10\\-8&2\end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-8&4\\12&-6\end{bmatrix}$

解 ☞

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7+(-8)&-10+4\\-8+12&2+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-6\\4&-4\end{bmatrix}$$

(c)　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}12&16&2&7&8\end{bmatrix}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&9&5&6\end{bmatrix}$

解 ☞

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}12&17&11&12&14\end{bmatrix}$$

(d) $A=\begin{bmatrix}9&4\\2&7\\3&5\\8&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&3\\6&5\\2&8\\9&2\end{bmatrix}$

解 ☞
$$A+B=\begin{bmatrix}10&7\\8&12\\5&13\\17&8\end{bmatrix}$$

10.5 已知

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-6&2\\-3&5&8&7\\2&9&-1&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}7&2&12&6&5\\4&3&8&10&6\\1&0&5&11&9\end{bmatrix}$$

重做问题 10.4.

解 ☞ 因为 A 和 B 的维数不同，$A=3\times4$，$B=3\times5$，所以它们不是加法协调的.

10.6 问题 10.3 中的母公司发货 D 给它的商店：

$$D=\begin{bmatrix}4&3&5&2\\0&9&6&1\\5&7&2&6\\12&2&4&8\\9&6&3&5\end{bmatrix}$$

求新的存货水平.

解 ☞
$$I_2=I_1+D=\begin{bmatrix}10&15&9&12\\20&14&8&5\\16&8&15&6\\25&15&7&16\\5&12&20&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&3&5&2\\0&9&6&1\\5&7&2&6\\12&2&4&8\\9&6&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&18&14&14\\20&23&14&6\\21&15&17&12\\37&17&11&24\\14&18&23&23\end{bmatrix}$$

10.7 求下列矩阵的差 $A-B$：

(a) $A=\begin{bmatrix}3&7&11\\12&9&2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}6&8&1\\9&5&8\end{bmatrix}$

解 ☞
$$A-B=\begin{bmatrix}3-6&7-8&11-1\\12-9&9-5&2-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-1&10\\3&4&-6\end{bmatrix}$$

(b) $A=\begin{bmatrix}16\\2\\15\\9\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}7\\11\\3\\8\end{bmatrix}$

解 ☞
$$A-B=\begin{bmatrix}16-7\\2-11\\15-3\\9-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-9\\12\\1\end{bmatrix}$$

(c) $A=\begin{bmatrix}13&-5&8\\4&9&1\\10&6&-2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}14&2&-5\\9&6&8\\-3&13&11\end{bmatrix}$

解 ☞
$$A-B=\begin{bmatrix}-1&-7&13\\-5&3&-7\\13&-7&-13\end{bmatrix}$$

10.8 问题10.6中的公司的月销售月报表 R 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}8&12&6&9\\10&11&8&3\\15&6&9&7\\21&14&5&18\\6&11&13&9\end{bmatrix}$$

求月底的存货水平.

解 ☞

$$I_2-\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}14&18&14&14\\20&23&14&6\\21&15&17&12\\37&17&11&24\\14&18&23&23\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&12&6&9\\10&11&8&3\\15&6&9&7\\21&14&5&18\\6&11&13&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6&8&5\\10&12&6&3\\6&9&8&5\\16&3&6&6\\8&7&10&14\end{bmatrix}$$

协调性

10.9 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&2&6\\5&4&8\\3&1&9\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&2\\5&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}11\\4\\13\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}14\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=[8\quad 1\quad 10]\quad \boldsymbol{F}=[13\quad 3]$$

检验下列乘积的存在性,即检验乘法协调性.如果协调,即乘积矩阵存在,确定其维数.
(a)$\boldsymbol{AC}$,(b)$\boldsymbol{BD}$,(c)$\boldsymbol{EC}$,(d)$\boldsymbol{DF}$,(e)$\boldsymbol{CA}$,(f)$\boldsymbol{DE}$,(g)$\boldsymbol{DB}$,(h)$\boldsymbol{CF}$,(i)$\boldsymbol{EF}$.

解 ☞ (a) 以乘法顺序排列 $\boldsymbol{AC}$ 的维数,$3\times(3=3)\times 1$.由于 $\boldsymbol{A}$ 的行数与 $\boldsymbol{C}$ 的列数相等,矩阵 $\boldsymbol{AC}$ 是有定义的.圈外的数字恰好是 $\boldsymbol{AC}$ 矩阵的维数 3×1.

(b) 排列 $\boldsymbol{BD}$ 的维数是 $2\times(2=2)\times 1$.矩阵 $\boldsymbol{BD}$ 有定义;其维数为 2×1.

(c) 排列 $\boldsymbol{EC}$ 的维数是 $1\times(3=3)\times 1$.矩阵 $\boldsymbol{EC}$ 有定义,其维数为 1×1,为一个数.

(d) 排列 $\boldsymbol{DF}$ 的维数是 $2\times(1=1)\times 2$.矩阵 $\boldsymbol{DF}$ 有定义,其维数为 2×2.

(e) 排列 $\boldsymbol{CA}$ 的维数是 $3\times(1\neq 3)\times 3$.积矩阵 $\boldsymbol{CA}$ 不存在,因为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 不是乘法协调的.
[注意:在(a) 中 $\boldsymbol{AC}$ 是有意义的.这正说明了矩阵乘法不满足交换律:$\boldsymbol{AC}\neq\boldsymbol{CA}$].

(f) 排列 $\boldsymbol{DE}$ 的维数是 $2\times(1=1)\times 3$.矩阵 $\boldsymbol{DE}$ 是有意义的,且其维数为 2×3.

(g) 排列 $\boldsymbol{DB}$ 的维数是 $2\times(1\neq 2)\times 2$.矩阵 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是乘法协调的.所以矩阵 $\boldsymbol{DB}$ 无意义.

(h) 排列 $\boldsymbol{CF}$ 的维数是 $3\times(1=1)\times 2$.矩阵为协调的.积矩阵 $\boldsymbol{CF}$ 的维数为 3×2.

(i) 排列矩阵 $\boldsymbol{EF}$ 的维数是 $1\times(3\neq 1)\times 2$.矩阵 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 是不协调的.所以 $\boldsymbol{EF}$ 不存在.

比例和向量乘法

10.10 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2\\9&5\\6&7\end{bmatrix}\qquad (k=4)$$

确定 $\boldsymbol{A}k$.

解 ☞ 这里的 k 是一个数,所以任意维数的矩阵的数量乘法都是可行的,即积是有定义的.

$$Ak = \begin{bmatrix} 3(4) & 2(4) \\ 9(4) & 5(4) \\ 6(4) & 7(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 36 & 20 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}$$

10.11　已知

$$k = -2 \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

求 $k\boldsymbol{A}$.

解 ☞

$$kA = \begin{bmatrix} -2(7) & -2(-3) & 2(2) \\ -2(-5) & -2(6) & -2(8) \\ -2(2) & 2(-7) & -2(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 6 & -4 \\ 10 & -12 & -16 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

10.12　一个服装店年底对其所有的休闲裤，夹克衫和套装打折扣 20% 如果 $\boldsymbol{V}_1$ 是打折扣之前的存货价值，

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{bmatrix} 5\,000 & 4\,500 & 6\,000 \\ 10\,000 & 12\,000 & 7\,500 \\ 8\,000 & 9\,000 & 11\,000 \end{bmatrix}$$

求打折扣后的价值.

解 ☞ 减价 20% 意味着服装以原来价格的 80% 售出. 所以 $\boldsymbol{V}_1 = 0.8\boldsymbol{V}_2$.

$$\boldsymbol{V}_2 = 0.8\begin{bmatrix} 5\,000 & 4\,500 & 6\,000 \\ 10\,000 & 12\,000 & 7\,500 \\ 8\,000 & 9\,000 & 11\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,000 & 3\,600 & 4\,800 \\ 8\,000 & 9\,600 & 6\,000 \\ 6\,400 & 7\,200 & 8\,800 \end{bmatrix}$$

10.13　已知

$$\boldsymbol{A} = [9 \quad 11 \quad 3] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 ☞ 因为 $1 \times (3 = 3) \times 1$，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义，且积为一个数.

$$\boldsymbol{AB} = 9(2) + 11(6) + 3(7) = 18 + 66 + 21 = 105$$

10.14　已知

$$\boldsymbol{A} = [12 \quad -5 \quad 6 \quad 11] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 ☞ 因为 $1 \times (4 = 4) \times 1$，矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义.

$$\boldsymbol{AB} = 12(3) + (-5)(2) + 6(-8) + 11(6) = 44$$

10.15　已知

$$\boldsymbol{A} = [9 \quad 6 \quad 2 \quad 0 \quad -5] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 ☞ 矩阵 AB 定义为 $1 \times (5 = 5) \times 1$

$$AB = 9(2) + 6(13) + 2(5) + 0(8) + (-5)(1) = 101$$

10.16　求 AB，设

$$A = [12 \quad 9 \quad 2 \quad 4] \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解　☞ 矩阵 AB 无定义；$1 \times (1 \neq 3) \times 1$，不能相乘.

10.17　电视机的价格为 \$ 300，立体音响的价格为 \$ 250，磁带架价格为 \$ 175．录音机的价格为 \$ 125．利用向量确定问题 10.3 中的第二发货口的存货价值．

解　☞ 存货价值为 $V = QP$．第二发货口的存货量用向量表示为 $Q = [20 \quad 14 \quad 8 \quad 5]$，价格向量 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 300 \\ 250 \\ 175 \\ 125 \end{bmatrix}$$

矩阵 QP 有定义；$1 \times (4 = 4) \times 1$，所以

$$V = QP = 20(300) + 14(250) + 8(175) + 5(125) = 11\,525$$

10.18　重做问题 10.17，其中的第二发货口改为第五发货口．

解　☞ 这里 $Q = [5 \quad 12 \quad 20 \quad 18]$，$P$ 不变．矩阵 QP 有定义．所以

$$V = 5(300) + 12(250) + 20(175) + 18(125) = 10\,250$$

矩阵乘法

10.19　已知

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

判断 AB 是否有定义，如果有定义，则指出其维数．并求积矩阵 AB．

解　☞ 矩阵 AB 有定义；$2 \times (2 = 2) \times 2$；积矩阵的维数 2×2．矩阵乘法无非是一系列的行-列向量的乘法，积矩阵的元素 a_{11} 是引导矩阵的第一行 R_1 与滞后矩阵的第一列 C_1 的乘积；a_{12} 元素是引导矩阵的第一行 R_1 与滞后矩阵的第二列 C_2 的乘积；元素 a_{ij} 是引导矩阵的第 i 行 R_i 与滞后矩阵的第 j 列 C_j 的乘积，等等．所以

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12(3) + 14(0) & 12(9) + 14(2) \\ 20(3) + 5(0) & 20(9) + 5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 136 \\ 60 & 190 \end{bmatrix}$$

10.20　已知

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

重做问题 10.19．

解　☞ 矩阵 AB 有定义；$2 \times (2 = 2) \times 3$，积矩阵的维数为 2×3．

$$AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(3) + 7(2) & 4(8) + 7(6) & 4(5) + 7(7) \\ 9(3) + 1(2) & 9(8) + 1(6) & 9(5) + 1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 74 & 69 \\ 29 & 78 & 52 \end{bmatrix}$$

10.21　已知

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

重做问题 10.19

解 ☞ 矩阵 AB 无定义；$2\times(2 \neq 3)\times 2$. 由于矩阵 AB 对已给的顺序不是乘法协调的，所以它们不能做乘法. 矩阵 A 的列数 2 不等于矩阵 B 的行数 3.

10.22　对问题 10.21 中的 BA，重做 10.19.

解 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 有定义；$3\times(2 = 2)\times 2$；积矩阵的维数为 3×2.

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix}2 & 9\\4 & 6\\7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\8 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2\\R_2C_1 & R_2C_2\\R_3C_1 & R_3C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2(3)+9(8) & 2(1)+9(2)\\4(3)+6(8) & 4(1)+6(2)\\7(3)+5(8) & 7(1)+5(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}78 & 20\\60 & 16\\61 & 17\end{bmatrix}$$

10.23　对问题 10.21 中的 $\boldsymbol{AB}'$，其中 B' 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置. 重做问题 10.19.

$$\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\9 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

解 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{AB}'$ 有定义；$2\times(2 = 2)\times 3$，积为 2×3 矩阵.

$$\boldsymbol{AB}' = \begin{bmatrix}3 & 1\\8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\9 & 6 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(2)+1(9) & 3(4)+1(6) & 3(7)+1(5)\\8(2)+2(9) & 8(4)+2(6) & 8(7)+2(5)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15 & 18 & 26\\34 & 44 & 66\end{bmatrix}$$

(由问题 10.21 和 10.23 注意到 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{AB}'$. 矩阵乘法的不可交换性在问题 10.36 和 10.41 中涉及到.)

10.24　已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}7 & 11\\2 & 9\\10 & 6\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}12 & 4 & 5\\3 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

重做问题 10.19.

解 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义；$3\times(2 = 2)\times 3$；积矩阵为 3×3 维.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3\\R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3\\R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7(12)+11(3) & 7(4)+11(6) & 7(5)+11(1)\\2(12)+9(3) & 2(4)+9(6) & 2(5)+9(1)\\10(12)+6(3) & 10(4)+6(6) & 10(5)+6(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}117 & 94 & 46\\51 & 62 & 19\\138 & 76 & 56\end{bmatrix}$$

10.25　已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}6 & 2 & 5\\7 & 9 & 4\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}10 & 1\\11 & 3\\2 & 9\end{bmatrix}$$

重做问题 10.19.

解 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义；$2\times(3 = 3)\times 2$；积矩阵的维数为 2×2.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2\\R_2C_1 & R_2C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6(10)+2(11)+5(2) & 6(1)+2(3)+5(9)\\7(10)+9(11)+4(2) & 7(1)+9(3)+4(9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}92 & 57\\177 & 70\end{bmatrix}$$

10.26　已知

$$\boldsymbol{A} = [2\quad 3\quad 5] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}7 & 1 & 6\\5 & 2 & 4\\9 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

重做问题 10.19

解 ☞ 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义；$1\times(3 = 3)\times 3$. 积矩阵的维数为 1×3.

$$\boldsymbol{AB} = [R_1C_1\quad R_1C_2\quad R_1C_3]$$
$$= [2(7)+3(5)+5(9)\quad 2(1)+3(2)+5(2)\quad 2(6)+3(4)+5(7)] = [74\quad 18\quad 59]$$

10.27　已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}5\\1\\10\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}3 & 9 & 4\\2 & 1 & 8\\5 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

重做问题 10.19.

解 ☞ 矩阵 **AB** 无定义;$3\times(1 \neq 3)\times 3$.按给定的顺序乘法无法进行.

10.28 求问题 10.27 中的 **BA**.

解 ☞ 矩阵 **BA** 有定义;$3\times(3 = 3)\times 1$.积矩阵维数为 3×1.

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}3&9&4\\2&1&8\\5&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1C_1\\R_2C_1\\R_3C_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(5)+9(1)+4(10)\\2(5)+1(1)+8(10)\\5(5)+6(1)+1(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64\\91\\41\end{bmatrix}$$

10.29 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&5\\3&2&6\\1&4&3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10&1&2\\5&3&6\\2&1&2\end{bmatrix}$$

重做问题 10.19.

解 ☞ 矩阵 AB 有定义;$3\times(3 = 3)\times 3$.积矩阵的维数为 3×3.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}R_1C_1&R_1C_2&R_1C_3\\R_2C_1&R_2C_2&R_2C_3\\R_3C_1&R_3C_2&R_3C_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(10)+1(5)+5(2)&2(1)+1(3)+5(1)&2(2)+1(6)+5(2)\\3(10)+2(5)+6(2)&3(1)+2(3)+6(1)&3(2)+2(6)+6(2)\\1(10)+4(5)+3(2)&1(1)+4(3)+3(1)&1(2)+4(6)+3(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}35&10&20\\52&15&30\\36&16&32\end{bmatrix}$$

10.30 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\\5\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=[2\quad 6\quad 5\quad 3]$$

重做问题 10.19.

解 ☞ 矩阵 AB 有定义;$4\times(1 = 1)\times 4$.积矩阵的维数为 4×4.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}R_1C_1&R_1C_2&R_1C_3&R_1C_4\\R_2C_1&R_2C_2&R_2C_3&R_2C_4\\R_3C_1&R_3C_2&R_3C_3&R_3C_4\\R_4C_1&R_4C_2&R_4C_3&R_4C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)&3(6)&3(5)&3(3)\\1(2)&1(6)&1(5)&1(3)\\4(2)&4(6)&4(5)&4(3)\\5(2)&5(6)&5(5)&5(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&18&15&9\\2&6&5&3\\8&24&20&12\\10&30&25&15\end{bmatrix}$$

10.31 当

$$\boldsymbol{A}=[3\quad 9\quad 8\quad 7]\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$$

求 **AB**.

解 ☞ 矩阵 **AB** 无意义,因为 $1\times(4 \neq 3)\times 1$.

10.32 求问题 10.31 中的 **BA**.

解 ☞ 矩阵 **BA** 有定义;$3\times(1 = 1)\times 4$.积矩阵的维数为 4×4.

$$BA=\begin{bmatrix}R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 & R_1C_4\\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 & R_2C_4\\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 & R_3C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}[3\quad 9\quad 8\quad 7]$$

$$=\begin{bmatrix}2(3) & 2(9) & 2(8) & 2(7)\\ 5(3) & 5(9) & 5(8) & 5(7)\\ 3(3) & 3(9) & 3(8) & 3(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 18 & 16 & 14\\ 15 & 45 & 40 & 35\\ 9 & 27 & 24 & 21\end{bmatrix}$$

10.33　利用问题 10.3 中的存货矩阵及 10.7 中的价格向量,确定公司的第五个发货口的存货价值.

解　☞　$V=QP\times QP$ 是有定义的;$5\times(4=4)\times1$;V 的维数为 5×1.

$$V=\begin{bmatrix}10 & 15 & 9 & 12\\ 20 & 14 & 8 & 5\\ 16 & 8 & 15 & 6\\ 25 & 15 & 7 & 16\\ 5 & 12 & 20 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}300\\250\\175\\125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1C_1\\R_2C_1\\R_3C_1\\R_4C_1\\R_5C_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10(300)+15(250)+9(175)+12(125)\\ 20(300)+14(250)+8(175)+5(125)\\ 16(300)+8(250)+15(175)+6(125)\\ 25(300)+15(250)+7(175)+16(125)\\ 5(300)+12(250)+20(175)+18(125)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\,825\\ 11\,525\\ 10\,175\\ 14\,475\\ 10\,250\end{bmatrix}$$

交换律及矩阵运算

10.34　已知

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 5 & 4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\ 3 & 4 & 1\\ 7 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

求(a)　$A+B$ 及(b)　$B+A$

解　☞　(a)　$A+B=\begin{bmatrix}7+2 & 3+0 & 2+5\\ 1+3 & 4+4 & 6+1\\ 2+7 & 5+9 & 4+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 7\\ 4 & 8 & 7\\ 9 & 14 & 10\end{bmatrix}$

(b)　$B+A=\begin{bmatrix}2+7 & 0+3 & 5+2\\ 3+1 & 4+4 & 1+6\\ 7+2 & 9+5 & 6+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 7\\ 4 & 8 & 7\\ 9 & 14 & 10\end{bmatrix}$

$A+B=B+A$.说明了矩阵加法满足交换律.

问题 10.35～10.42 说明的是交换律在矩阵其他运算中的应用.

10.35　已知

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 9\\ 10 & 8\\ 6 & 12\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 13\\ 7 & 9\\ 2 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

求(a)　$A-B$ 及(b)　$-B+A$.

解　☞　(a)　$A-B=\begin{bmatrix}5-3 & 3-13\\ 4-7 & 9-9\\ 10-2 & 8-1\\ 6-8 & 12-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -10\\ -3 & 0\\ 8 & 7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

(b)　$-B+A=\begin{bmatrix}-3+5 & -13+3\\ -7+4 & -9+9\\ -2+10 & -1+8\\ -8+6 & -6+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -10\\ -3 & 0\\ 8 & 7\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.这说明了矩阵减法满足交换律.

10.36　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 12 & 9 & 6\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}13\\5\\-2\\7\end{bmatrix}$$

求(a)　$\boldsymbol{AB}$ 及(b)　$\boldsymbol{BA}$.

首先检验协调性,再指出矩阵的维数.

解　☞ (a)　矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义;$1\times(4=4)\times 1$.积的维数为 1×1.它为一个数.

$$\boldsymbol{AB}=[4(13)+12(5)+9(-2)+6(7)]=136$$

(b)　矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 也有定义;$4\times(1=1)\times 4$.积矩阵维数为 4×4.

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}13(4) & 13(12) & 13(9) & 13(6)\\ 5(4) & 5(12) & 5(9) & 5(6)\\ -2(4) & -2(12) & -2(9) & -2(6)\\ 7(4) & 7(12) & 7(9) & 7(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52 & 156 & 117 & 78\\ 20 & 60 & 45 & 30\\ -8 & -24 & -18 & -12\\ 28 & 84 & 63 & 42\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.这说明了矩阵乘法不满足交换律.如果乘法的顺序颠倒,积矩阵一般在维数或元素方面不同.

10.37　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 6 & 2\\ 1 & 8\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3 & 9 & 1\\ 2 & 12 & 7\end{bmatrix}$$

求(a)　$\boldsymbol{AB}$ 及(b)　$\boldsymbol{BA}$.

解　☞ (a)　矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义;$3\times(2=2)\times 3$;积矩阵的维数为 3×3.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7(-3)+4(2) & 7(9)+4(12) & 7(1)+4(7)\\ 6(-3)+2(2) & 6(9)+2(12) & 6(1)+2(7)\\ 1(-3)+8(2) & 1(9)+8(12) & 1(1)+8(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 111 & 35\\ -14 & 78 & 20\\ 13 & 105 & 57\end{bmatrix}$$

(b)　矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 也有定义;$2\times(3=3)\times 2$;积矩阵的维数为 2×2.

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}-3(7)+9(6)+1(1) & -3(4)+9(2)+1(8)\\ 2(7)+12(6)+7(1) & 2(4)+12(2)+7(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34 & 14\\ 93 & 88\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.矩阵乘法不满足交换律.这里的两个积的维数及元素均不相同.

10.38　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 9 & 8\\ 7 & 6 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

求(a)　$\boldsymbol{AB}$ 及(b)　$\boldsymbol{BA}$.

解　☞ (a)　矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有定义;$3\times(3=3)\times 3$;积矩阵的维数为 3×3.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4(1)+9(5)+8(0) & 4(2)+9(3)+8(2) & 4(0)+9(1)+8(4)\\ 7(1)+6(5)+2(0) & 7(2)+6(3)+2(2) & 7(0)+6(1)+2(4)\\ 1(1)+5(5)-3(0) & 1(2)+5(3)+3(2) & 1(0)+5(1)+3(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49 & 51 & 41\\ 37 & 36 & 14\\ 26 & 23 & 17\end{bmatrix}$$

(b)　矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 也有定义.其维数为 3×3.

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1(4)+2(7)+0(1) & 1(9)+2(6)+0(5) & 1(8)+2(2)+0(3)\\ 5(4)+3(7)+1(1) & 5(9)+3(6)+1(5) & 5(8)+3(2)+1(3)\\ 0(4)+2(7)+4(1) & 0(9)+2(6)+4(5) & 0(8)+2(2)+4(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 21 & 12\\ 42 & 68 & 49\\ 18 & 32 & 16\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.维数相同但元素不同.

10.39　已知

$$A=\begin{bmatrix}7&5&2&6\\1&3&9&4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}$$

求(a)　AB 或(b)　BA.

解　☞ (a)　矩阵 AB 有定义;$2\times(4=4)\times1$;积矩阵的维数为 2×1.

$$AB=\begin{bmatrix}7(1)+5(0)+2(-1)+6(3)\\1(1)+3(0)+9(-1)+4(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\4\end{bmatrix}$$

(b)　矩阵 BA 无定义;$4\times(1\neq2)\times4$.乘法无法进行.这种情况是矩阵乘法不满足交换律的另外一种方式.

10.40　已知

$$A=\begin{bmatrix}11&14\\2&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}7&6\\4&5\\1&3\end{bmatrix}$$

求(a)AB 和(b)BA.

解　☞ (a)矩阵 AB 无定义;$2\times(2\neq3)\times2$,因此乘法无法进行.

(b)矩阵 BA 有定义;$3\times(2=2)\times2$,乘积是 3×2 维矩阵

$$BA=\begin{bmatrix}7(11)+6(2)&7(14)+6(6)\\4(11)+5(2)&4(14)+5(6)\\1(11)+3(2)&1(14)+3(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}89&134\\54&86\\17&32\end{bmatrix}$$

因 AB 不存,故 $BA\neq AB$.

10.41　已知

$$A=\begin{bmatrix}-2\\4\\7\end{bmatrix}\qquad B=[3\quad6\quad-2]$$

求(a)　AB 和(b)　BA.

解　☞ (a)矩阵 AB 有定义;$3\times(1=1)\times3$;乘积是 3×3 维矩阵

$$AB=\begin{bmatrix}-2(3)&-2(6)&-2(-2)\\4(3)&4(6)&4(-2)\\7(3)&7(6)&7(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-12&4\\12&24&-8\\21&42&-14\end{bmatrix}$$

(b)矩阵 BA 也有定义;$1\times(3=3)\times1$,积是 1×1 维矩阵或数

$$BA=[3(-2)+6(4)+(-2)(7)]=4$$

因矩阵的乘积不满足交换律,故改变乘积的顺序可能得出完全不同的答案.矩阵 AB 是 3×3 矩阵,而 BA 却是一个数.

10.42　已知

$$A=\begin{bmatrix}23&6&14\\18&12&9\\24&2&6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

求(a)　AB 和(b)　BA.

解 ☞ 矩阵 AB 有定义;$3\times(3 = 3)\times 3$.乘积的是 3×3 维的矩阵

$$AB=\begin{bmatrix}23(1)+6(0)+14(0) & 23(0)+6(1)+14(0) & 23(0)+6(0)+14(1)\\ 18(1)+12(0)+9(0) & 18(0)+12(1)+9(0) & 18(0)+12(0)+9(1)\\ 24(1)+2(0)+6(0) & 24(0)+2(1)+6(0) & 24(0)+2(0)+6(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}23 & 6 & 14\\ 18 & 12 & 9\\ 24 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

(b) 矩阵 BA 也有定义;$3\times(3 = 3)\times 3$.积也是维数为 3×3 的矩阵

$$BA=\begin{bmatrix}1(23)+0(18)+0(24) & 1(6)+0(12)+0(2) & 1(14)+0(9)+0(6)\\ 0(23)+1(18)+0(24) & 0(6)+1(12)+0(2) & 0(14)+1(9)+0(6)\\ 0(23)+0(18)+1(24) & 0(6)+0(12)+1(2) & 0(14)+0(9)+1(6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}23 & 6 & 14\\ 18 & 12 & 9\\ 24 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

这里 $AB=BA$.因自左乘或自右乘一个单位矩阵得到原来的矩阵.故,对于一个单位矩阵的乘积是可交换的.这里给出一个矩阵和它的逆矩阵.见 11.7 节.

结合律和分配律

10.43 分析矩阵运算是否满足结合律和分配律(即$(A+B)+C=A+(B+C)$,$(AB)C=A(BC)$,$A(B+C)=AB+AC$ 满足 10.7 节的条件),已知

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 9 & 5 & 3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}9 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 10 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

求(a) $(A+B)+C$ 和(b) $A+(B+C)$.

解 ☞ (a)

$$A+B=\begin{bmatrix}6+9 & 2+1 & 7+3\\ 9+4 & 5+2 & 3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 3 & 10\\ 13 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}15+7 & 3+5 & 10+1\\ 13+10 & 7+3 & 9+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 8 & 11\\ 23 & 10 & 17\end{bmatrix}$$

(b)

$$B+C=\begin{bmatrix}9+7 & 1+5 & 3+1\\ 4+10 & 2+3 & 6+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 6 & 4\\ 14 & 5 & 14\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}6+16 & 2+6 & 7+4\\ 9+14 & 5+5 & 3+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 8 & 11\\ 23 & 10 & 17\end{bmatrix}$$

所以$(A+B)+C=A+(B+C)$.这说明了矩阵的加法满足结合律.问题 10.44~10.47 中说明了其他运算的情况.

10.44 已知

$$A=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 12\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3\\ 8\\ 5\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}13\\ 2\\ 6\end{bmatrix}$$

求(a) $(A-B)+C$ 及(b) $A+(-B+C)$.

解 ☞ (a)

$$A-B=\begin{bmatrix}7-3\\ 6-8\\ 12-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 7\end{bmatrix}$$

$$(A-B)+C=\begin{bmatrix}4+13\\ -2+2\\ 7+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\ 0\\ 13\end{bmatrix}$$

(b)

$$-B+C=\begin{bmatrix}-3+13\\ -8+2\\ -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ -6\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A+(-B+C)=\begin{bmatrix}7+10\\6+(-6)\\12+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\0\\13\end{bmatrix}$$

$(A-B)+C=A+(-B+C)$ 说明了矩阵减法也满足结合律.

10.45 已知

$$A=\begin{bmatrix}7 & 1 & 5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}6 & 5\\2 & 4\\3 & 8\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}9 & 4\\3 & 10\end{bmatrix}$$

求(a)　$(AB)C$ 及(b)　$A(BC)$.

解 ☞ (a)矩阵 AB 有定义;$1\times(3=3)\times2$,产生一个 1×2 矩阵.

$$AB=\begin{bmatrix}7(6)+1(2)+5(3) & 7(5)+1(4)+5(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}59 & 79\end{bmatrix}$$

矩阵$(AB)C$ 有定义;$1\times(2=2)\times2$,产生一个 1×2 矩阵.

$$(AB)C=\begin{bmatrix}59(9)+79(3) & 59(4)+79(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}768 & 1026\end{bmatrix}$$

(b)矩阵 BC 有定义;$3\times(2=2)\times2$,产生一个 3×2 矩阵.

$$BC=\begin{bmatrix}6(9)+5(3) & 6(4)+5(10)\\2(9)+4(3) & 2(4)+4(10)\\3(9)+8(3) & 3(4)+8(10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}69 & 74\\30 & 48\\51 & 92\end{bmatrix}$$

矩阵 $A(BC)$也有定义;$1\times(3=3)\times2$,产生一个 1×2 矩阵.

$$A(BC)=\begin{bmatrix}7(69)+1(30)+5(51) & 7(74)+1(48)+5(92)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}768 & 1026\end{bmatrix}$$

在保持乘法顺序不变的前提下,矩阵乘法满足结合律.

10.46 已知

$$A=\begin{bmatrix}4 & 7 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}6\\5\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}9\\5\\8\end{bmatrix}$$

求(a)　$A(B+C)$及(b)　$AB+AC$.

解 ☞ (a)

$$B+C=\begin{bmatrix}6+9\\5+5\\1+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\10\\9\end{bmatrix}$$

矩阵 $A(B+C)$有定义;$1\times(3=3)\times1$.积矩阵为 1×1 维的.

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}4(15)+7(10)+2(9)\end{bmatrix}=148$$

(b)　矩阵 AB 有定义;$1\times(3=3)\times1$,产生一个 1×1 的矩阵.

$$AB=\begin{bmatrix}4(6)+7(5)+2(1)\end{bmatrix}=61$$

矩阵 AC 有定义;$1\times(3=3)\times1$,也产生一个 1×1 矩阵.

$$AC=\begin{bmatrix}4(9)+7(5)+2(8)\end{bmatrix}=87$$

所以 $AB+AC=61+87=148$.这说明矩阵乘法满足分配定律.

10.47 一个汉堡包连锁店一周内销售 1000 个汉堡包.600 个干酪汉堡包,1200 个泡沫奶.它们的价格分别为 45¢,60¢,50¢.成本分别为 38¢,42¢,32¢.求企业一周的利润,利用(a)　总概念及(b)　单位分析证明矩阵乘法是可分配的.

解 ☞ (a)设销售量为 Q,价格为 P,成本为 C,用矩阵形式表示为

$$Q=\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}0.45\\0.60\\0.50\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0.38\\0.42\\0.32\end{bmatrix}$$

总收益 TR 为

$$TR = \boldsymbol{PQ} = \begin{bmatrix}0.45\\0.60\\0.50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

虽然,这样的 TR 无定义.取 $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{Q}$ 的转置以使乘法协调.可见乘积的顺序的重要性.行向量乘积($\boldsymbol{P'Q}$ 或 $\boldsymbol{Q'P}$)将产生一个实数;列向量乘积($\boldsymbol{PQ'}$ 或 $\boldsymbol{QP'}$)将产生一个 3×3 矩阵,它没有任何经济意义.所以,取 $\boldsymbol{P}$ 的转置,并左乘 $\boldsymbol{Q}$,得

$$TR = \boldsymbol{P'Q} = [0.45 \quad 0.60 \quad 0.50]\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{P'Q}$ 有定义,$1\times(3 \;=\; 3)\times1$,产生一个 1×1 矩阵或实数.

$$TR = [0.45(1000) + 0.60(600) + 0.50(1200)] = 1410$$

同样地,总成本 $TC = \boldsymbol{C'Q}$:

$$TC = [0.38 \quad 0.42 \quad 0.32]\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix} = [0.38(1000) + 0.42(600) + 0.32(1200)] = 1016$$

所以利润为

$$\prod = TR - TC = 1410 - 1016 = 394$$

(b) 利用单位分析,单位利润 U 为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}0.45\\0.60\\0.50\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.38\\0.42\\0.32\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.07\\0.18\\0.18\end{bmatrix}$$

总利润 $\prod$ 为单位利润与所售出的量的积.

$$\prod = \boldsymbol{UQ} = \begin{bmatrix}0.07\\0.18\\0.18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

这里 $\prod$ 无定义.取 U 的转置,

$$\prod = \boldsymbol{U'P} = [0.07 \quad 0.18 \quad 0.18]\begin{bmatrix}1000\\600\\1200\end{bmatrix}$$

$$= [0.07(1000) + 0.18(600) + 0.18(1200)] = 394 \qquad \text{Q.E.D.}$$

10.48 一个音录商店每周销售 700 张 CD, 400 盘磁带及 200 部 CD 碟机.价格分别为 \$4, \$6, \$150.成本分别为 \$3.25, \$4.75, \$125.求每周利润,分别采用(a) 总成本 (b) 单位概念.

解 ☞ (a)

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}700\\400\\200\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}4\\6\\150\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}3.25\\4.75\\125.00\end{bmatrix}$$

$$TR = \boldsymbol{P'Q} = [4 \quad 6 \quad 150]\begin{bmatrix}700\\400\\200\end{bmatrix} = [4(700) + 6(400) + 150(200)] = 35\,200$$

$$TC = \boldsymbol{C'Q} = [3.25 \quad 4.75 \quad 125]\begin{bmatrix}700\\400\\200\end{bmatrix} = [3.25(700) + 4.75(400) + 125(200)] = 29\,175$$

$$\prod = TR - TC = 35\,200 - 29\,175 = 6025$$

(b) 单位利润 $\boldsymbol{U}$ 为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}4\\6\\150\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3.25\\4.75\\125.00\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.75\\1.25\\25.00\end{bmatrix}$$

总利润Π为

$$\prod = U'Q = [0.75 \quad 1.25 \quad 25]\begin{bmatrix}700\\400\\200\end{bmatrix} = [0.75(700) + 1.25(400) + 25(200)] = 6025$$

矩阵的特性

10.49 已知

$$A = \begin{bmatrix}6 & -12\\-3 & 6\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}12 & 6\\6 & 3\end{bmatrix}$$

(a) 求 AB.(b) 为什么说积矩阵是独特的?

解 ☞ (a) $$AB = \begin{bmatrix}6(12)-12(6) & 6(6)-12(3)\\-3(12)+6(6) & -3(6)+6(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

(b) 不像普通代数:二个非零数的乘积绝不为零,矩阵代数有这样的特性:二个非零矩阵之积可能是零矩阵.其原因是二个矩阵为奇异的.奇异矩阵是指其一行或一列为另一行或列的倍数(见11.1节).在本问题中,A 的第一行为第二行的2倍,第二列为第一列的2倍.对于 B,第一行为第二行的2倍,第一列为第二列的2倍.所以,在矩阵代数中,涉及奇异矩阵的乘法可能产生一个零矩阵,但不一定必为零矩阵.见问题10.50.

10.50 已知

$$A = \begin{bmatrix}6 & 12\\3 & 6\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}12 & 6\\6 & 3\end{bmatrix}$$

(a) 求 AB,(b) 对解给予评价.

解 ☞ (a) $$AB = \begin{bmatrix}6(12)+12(6) & 6(6)+12(3)\\3(12)+6(6) & 3(6)+6(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}144 & 72\\72 & 36\end{bmatrix}$$

(b) 虽然,A,B 均为奇异的,但它们的积不是零矩阵.然而积 AB 也是奇异的.

10.51 已知

$$A = \begin{bmatrix}4 & 8\\1 & 2\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}-2 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$$

(a) 求 AB 及 AC,(b)评价解的非寻常性质.

解 ☞ (a) $$AB = \begin{bmatrix}4(2)+8(2) & 4(1)+8(2)\\1(2)+2(2) & 1(1)+2(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & 20\\6 & 5\end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix}4(-2)+8(4) & 4(1)+8(2)\\1(-2)+2(4) & 1(1)+2(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & 20\\6 & 5\end{bmatrix}$$

(b) 尽管 $B \neq C$,但 $AB = AC$.在一般代数中,一个数同二个不同的数相乘不可能产生相同的积,但在矩阵代数中,一个矩阵同二个不同矩阵相乘则可能得到完全相同的积矩阵,但不一定必相等.在这种情形中,A 为奇异矩阵.

第十一章 逆 矩 阵

11.1 行列式和非奇异性

一个 2×2 矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|$,称为二阶行列式.是由主对角的两个元素之积减去非对角的两个元素的乘积而得到的.已知一般的 2×2 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & \times & a_{12}\\ a_{21} & & a_{22}\end{vmatrix}\begin{matrix}(-)\\(+)\end{matrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

行列式是一个数,只有方阵才有行列式.如果一个矩阵的行列式等于零,则称该行列式消没,且该矩阵为奇异的.奇异矩阵是指至少有两行或两列线性相关的矩阵.如果$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的,它的所有的行和列都线性无关.

如果一个线性方程组线性相关,则该方程组有无数多个解,即没有惟一解存在.所以我们想要知道方程组解的情况,只需进行下面简单的行列式检验就可发现潜在的问题.设一个系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的方程组,

如果$|\boldsymbol{A}|=0$,矩阵是奇异的,方程之间存在线性相关性.所以没有惟一解存在.

如果$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,矩阵是非奇异的,方程之间没有线性相关性.有惟一解存在.

我们将一个矩阵的线性无关的行或列的最大个数定义为秩 ρ.矩阵的秩也可用作线性相关性的简单检验.设 $\boldsymbol{A}$ 为一个维数为 n 的矩阵,

如果 $\rho(\boldsymbol{A})=n$,$\boldsymbol{A}$ 为非奇异的,且线性无关.

如果 $\rho(\boldsymbol{A})<n$,$\boldsymbol{A}$ 为奇异的,且线性相关.

见例 1 和问题 11.1,11.3 和 11.7.关于非奇异性和线性无关的证明,见问题 11.16.

例 1 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 7 & 9\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

行列式计算如下:

由前面陈述的规则有

$$|\boldsymbol{A}|=6(9)-4(7)=26$$

由于$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,矩阵是非奇异的,即,没有任何两行或两列线性相关,所以秩为 2,记作,$\rho(\boldsymbol{A})=2$.相反地,有

$$|\boldsymbol{B}|=4(9)-6(6)=0$$

由于$|\boldsymbol{B}|=0$,$\boldsymbol{B}$ 为奇异的,有相互线性相关的两行或两列存在.仔细观察发现,第二行和第二列是第一行和第一列的 1.5 倍.所以 $\rho(\boldsymbol{B})=1$

11.2 三阶行列式

一个 3×3 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

称为三阶行列式,它是三个积的总和.为了获得这三个积:

1．取第一行的第一个元素 a_{11} 并在心里划去 a_{11} 所在的行和列，见(a)．再用 a_{11} 去乘余下的元素的行列式．

2．取第一行的第二个元素 a_{12}，并在心里划去其所在的行和列，见(b)．然后用 a_{12} 去乘余下的元素的行列式的 -1 倍．

3．取第一行的第三个元素 a_{13}，并在心里划去其所在的行和列，见(c)．然后用 a_{13} 去乘余下的元素的行列式．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a)　(b)　(c)

所以，行列式的计算如下

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (11.1) \end{aligned}$$

为一个数

见例 2 和例 3 及问题 11.2，11.3 和 11.7．

以相同的方法，我们可以得知 4×4 矩阵的行列式为 4 个积之和；5×5 矩阵的行列式为 5 个积之和．见 11.4 节及例 5．

例 2　已知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

行列式 $|\mathbf{A}|$ 计算如下

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8[4(3) - 7(1)] - 3[6(3) - 7(5)] + 2[6(1) - 4(5)] \\ &= 8(5) - 3(-17) + 2(-14) = 63 \end{aligned}$$

因为 $|\mathbf{A}| \neq 0$，所以 $\mathbf{A}$ 为非奇异的，且 $\rho(\mathbf{A}) = 3$．

11.3　子式与余子式

在 11.2 节中描述的划去一个元素所在的行和列后，余下的元素形成该矩阵的一个子行列式，我们称之为子式．所以，子式 $|M_{ij}|$ 是划去第 i 行和第 j 列后的余子阵的行列式．利用 11.2 节中给出的矩阵，有

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

其中 $|M_{11}|$ 是 a_{11} 的子式，$|M_{12}|$ 为 a_{12} 的子式．$|M_{13}|$ 为 a_{13} 的子式．这样(11.1)的行列式计算公式可以改写成

$$|\mathbf{A}| = a_{11}|M_{11}| + a_{12}(-1)|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \qquad (11.2)$$

余子式 $|C_{ij}|$ 是带有符号的子式．余子式的符号规则如下：

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

所以，如果下标之和为偶数，则 $|C_{ij}| = |M_{ij}|$，因为 -1 的偶数次幂为 1．如果 $i+j$ 等于奇数，则 $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$，因为 -1 的奇数次幂为它本身 -1．见例 3 和问题 11.18～11.24．

例 3　对于 11.2 节中的矩阵 $\mathbf{A}$，余子式(1)　$|C_{11}|$，(2)　$|C_{12}|$ 及(3)　$|C_{13}|$ 的求法如下：

1)
$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}|$$

由于$(-1)^{1+1}=(-1)^2=1$,

$$|C_{11}| = |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) $$|C_{12}|=(-1)^{1+2}|M_{12}|$$

由于$(-1)^{1+2}=(-1)^3=-1$,

$$|C_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3) $$|C_{13}|=(-1)^{1+3}|M_{13}|$$

由于$(-1)^{1+3}=(-1)^4=1$,

$$|C_{13}| = |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

11.4 拉普拉斯展式及高阶行列式

拉普拉斯展式是用余子式行列式的值的方法.因此,高阶行列式可以用较低阶的行列式来计算.三阶行列式的拉普拉斯展式为

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| \tag{11.3}$$

其中$|C_{ij}|$是基于二阶行列式的余子式.在(11.3)中,不同于(11.1)和(11.2),a_{12}没有乘以-1,因为由余子式的符号规则,$|C_{12}|$中自动地乘以-1了.

拉普拉斯展式允许按任一行或列求出行列式的值.一般选择零多的行或列,这样可以通过消除项简化求行列式的过程.拉普拉斯展式也为计算三阶以上的高阶行列式打下了基础.见例4、例5及问题11.25.

例4 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

沿第三列进行拉普拉斯展开,求得行列式

$$|\boldsymbol{A}| = a_{13}|C_{13}| + a_{23}|C_{23}| + a_{33}|C_{33}|$$

由于 $a_{13}=0, a_{33}=0$

$$|\boldsymbol{A}| = a_{23}|C_{23}| \tag{11.4}$$

划去第2行和第3列,求$|C_{23}|$,

$$|C_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)[12(7)-7(6)] = -42$$

代入(11.4),$|\boldsymbol{A}|=3(-42)=-126$.所以 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的,且 $\rho(\boldsymbol{A})=3$.

可以通过沿第一行进行拉普拉斯展开,验证上述答案的正确性.

例5 4阶行列式的拉普拉斯展式为

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| + a_{14}|C_{14}|$$

其中的余子式为三阶的,它们可以用上述方法降阶为2阶行列式.5阶和更高阶的行列式以同样的方法求得.见问题11.25(d)~11.25(e).

11.5 行列式的性质

下面介绍的行列式的7个性质提供了简化矩阵元素或将矩阵部分变化为零,再进而求解行列式的方法.

1. 一行(或列)加上或减去另一行(或列)的任何非零倍数,行列式不变.
2. 交换任意两行(或列),只改变符号,不改变行列式的绝对值.

3. 以某一常数乘以某一行或列,行列式变为原行列式的该常数倍.

4. 三角矩阵,即主对角线以上或以下元素均为零的矩阵,其行列式为主对角上元素之积.

5. 一矩阵的行列式与其转置的行列式相等:$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'|$.

6. 如果矩阵的某一行或列上所有的元素均为零,则行列式为零.

7. 如果矩阵有二行或二列完全相等或成比例,即线性相关,则行列式为零.

见问题11.4~11.15.

11.6 余子式矩阵及共轭矩阵

余子式矩阵是用$|C_{ij}|$代替 a_{ij}构成的矩阵.共轭矩阵是余子式矩阵的转置.所以,

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

例6 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

如下求得余子式矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及共轭矩阵 $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}$:

以$|C_{ij}|$代替元素 a_{ij},

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \\ -9 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵 $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}$ 是$\boldsymbol{C}$ 的转置,

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

11.7 逆矩阵

对于一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$是指满足关系.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$$

的惟一矩阵.注意只有当 A 为方矩阵且非奇异时,逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$才存在.

逆矩阵乘上原矩阵简化为单位矩阵,所以,逆矩阵在线性代数中起着普通代数中的倒数的作用.求逆矩阵的公式为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}$$

见例 7 及问题 11.25.

例7 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

1. 检查 $\boldsymbol{A}$ 是否为方矩阵,因为只有方矩阵才可能有逆存在.这里 A 为 3×3 维的.

2. 计算 $\boldsymbol{A}$ 的行列式以确信$|\boldsymbol{A}|\neq0$,因为只有非奇异矩阵才可能有逆存在.

$$|\boldsymbol{A}| = 4[3(4)-1(-1)] - 1[(-2)(4)-1(3)] + (-5)[(-2)(-1)-3(3)]$$
$$= 52 + 11 + 35 = 98 \neq 0$$

$\boldsymbol{A}$ 为非奇异的；$\rho(\boldsymbol{A}) = 3$.

3．求 $\boldsymbol{A}$ 的余子式矩阵，

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

转置余子式矩阵以得到共轭矩阵.

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

4．以 $1/|\boldsymbol{A}| = 1/98$ 乘共轭矩阵，得到

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1327 & 0.0102 & 0.1633 \\ 0.1122 & 0.3163 & 0.0612 \\ -0.0714 & 0.0714 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

5．作乘法 $\boldsymbol{AA}^{-1}$或 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$ 以检验答案的正确性.如果答案正确，两个积均应为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$.见题 11.26(a).

11.8 用逆矩阵求解线性方程组

逆矩阵可以被用来求解矩阵方程.如果

$$\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{B}_{n\times 1}$$

且逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$存在，等式两边均乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，根据协调性，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{B}_{n\times 1}$$

由 11.7 节，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.所以

$$\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} = \boldsymbol{A}^{-1}_{n\times n}\boldsymbol{B}_{n\times 1}$$

由 10.8 节，$\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{X}$，所以

$$\boldsymbol{X}_{n\times 1} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})_{n\times 1}$$

方程组的解为系数矩阵的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$与常数列向量 $\boldsymbol{B}$ 的积.见问题 11.27～11.33.

例 8　已知方程组

$$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$$

求解 x_1, x_2 及 x_3.

解　☞ 首先，以矩阵形式表示方程组，

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

由 11.8 节，

$$X = A^{-1}B$$

代入例 7 中的 A^{-1}，并作乘法有

$$X = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{104}{98} + \frac{12}{98} + \frac{80}{98} \\ \frac{88}{98} + \frac{372}{98} + \frac{30}{98} \\ -\frac{8}{14} + \frac{12}{14} + \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{196}{98} \\ \frac{490}{98} \\ \frac{14}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 5$ 及 $\bar{x}_3 = 1$.

11.9 方程组解的克莱姆法则

克莱姆法则提供了利用行列式求解线性方程组的简单方法. 克莱姆法则:

$$\bar{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

其中 x_i 为方程组的第 i 个未知变量，$|A|$ 为系数矩阵的行列式，$|A_i|$ 为原来的系数矩阵 A 中 x_i 的系数所在的列被常数列向量代替所形成的特别矩阵的行列式. 见例 9 及问题 11.34～11.37. 问题 11.38 中给出克莱姆法则的证明.

例 9 利用克莱姆法则求解如下方程组

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 49 \\ 3x_1 + 4x_2 = 32 \end{cases}$$

解 ☞ 1. 用矩阵形式表达

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 32 \end{bmatrix}$$

2. 求 A 的行列式

$$|A| = 6(4) - 5(3) = 9$$

3. 用 B 代替 x_1 的系数，即 A 的第 1 列，得到新的矩阵 A_1，以求解 x_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 32 & 4 \end{bmatrix}$$

求 A_1 的行列式

$$|A_1| = 49(4) - 5(32) = 36$$

利用克莱姆法则

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{36}{9} = 4$$

4. 为了求 x_2，用 B 代替 x_2 的系数，即 A 的第 2 列，得到新矩阵 A_2，

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$$

求 A_2 的行列式

$$|A_2| = 6(32) - 49(3) = 45$$

利用公式

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{45}{9} = 5$$

对于三个方程的方程组的求解，见问题 11.35(b)～(e).

习题解答

行列式

11.1　求下列矩阵的行列式：

(a)　$A=\begin{bmatrix}9 & 13\\15 & 18\end{bmatrix}$　　(b)　$A=\begin{bmatrix}40 & -10\\25 & -5\end{bmatrix}$

$|A|=9(18)-13(15)=-33$　　$|A|=40(-5)-(-10)(25)=50$

(c)　$A=\begin{bmatrix}7 & 6\\9 & 5\\2 & 12\end{bmatrix}$

解 ☞ 因为 A 的维数为 3×2，只有方阵才有行列式，所以，A 的行列式不存在.

11.2　求下列矩阵的行列式.注意，体会零的出现如何简化行列式的求解任务.

(a)　$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & 5\\2 & 1 & 8\\7 & 9 & 1\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|A|=3\begin{vmatrix}1 & 8\\9 & 1\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}2 & 8\\7 & 1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & 1\\7 & 9\end{vmatrix}$$
$$=3[1(1)-8(9)]-6[2(1)-8(7)]+5[2(9)-1(7)]$$
$$=3(-71)-6(-54)+5(11)=166$$

(b)　$A=\begin{bmatrix}12 & 0 & 3\\9 & 2 & 5\\4 & 6 & 1\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|A|=12\begin{vmatrix}2 & 5\\6 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}9 & 5\\4 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}9 & 2\\4 & 6\end{vmatrix}$$
$$=12(2-30)-0+3(54-8)=-198$$

(c)　$A=\begin{bmatrix}0 & 6 & 0\\3 & 5 & 2\\7 & 6 & 9\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|A|=0\begin{vmatrix}5 & 2\\6 & 9\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}3 & 2\\7 & 9\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3 & 5\\7 & 6\end{vmatrix}$$
$$=0-6(27-14)+0=-78$$

矩阵的秩

11.3　求下列矩阵的秩 ρ：

(a)　$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 2\\1 & 5 & 4\\4 & -8 & 2\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|A|=-3\begin{vmatrix}5 & 4\\-8 & 2\end{vmatrix}+6(-1)\begin{vmatrix}1 & 4\\4 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 5\\4 & -8\end{vmatrix}$$
$$=-3[10-(-32)]-6(2-16)+2(\ \ 8-20)=-98$$

由于 $|A|\neq0$，即 A 为非奇异矩阵，且三行和三列均线性无关，所以，$\rho(A)=3$.

(b)　$B=\begin{bmatrix}5 & -9 & 3\\2 & 12 & -4\\-3 & -18 & 6\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|B|=5\begin{vmatrix}12 & -4\\-18 & 6\end{vmatrix}-9(-1)\begin{vmatrix}2 & -4\\-3 & 6\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 12\\-3 & -18\end{vmatrix}$$
$$=5[72-(+72)]+9[12-(+12)]+3[-36-(-36)]$$

$$=5(0)+9(0)+3(0)=0$$

由于 $|\boldsymbol{B}|=0$，$\boldsymbol{B}$ 为奇异矩阵，且三行和三列是线性相关的．所以，$\rho(\boldsymbol{B})\neq 3$．

现在测试二行或二列是否为线性无关：从左上角的子矩阵开始，求 2×2 的行列式，

$$\begin{vmatrix}5 & -9\\2 & 12\end{vmatrix}=60-(-18)=78\neq 0$$

所以，$\rho(\boldsymbol{B})=2$．$\boldsymbol{B}$ 中只有二个行或列线性无关．第3行为第2行的 -1.5 倍，而第3列为第2列的 $-\frac{1}{3}$ 倍．

(c) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -6\\10 & -2.5 & 7.5\\24 & -6 & 18\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|\boldsymbol{C}|=-8\begin{vmatrix}-2.5 & 7.5\\-6 & 18\end{vmatrix}+2(-1)\begin{vmatrix}10 & 7.5\\24 & 18\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}10 & -2.5\\24 & -6\end{vmatrix}$$
$$=-8[-45-(-45)]-2(180-180)-6[-60-(-60)]=0$$

因为 $|\boldsymbol{C}|=0$，$\rho(\boldsymbol{C})\neq 3$．测试各个 2×2 子矩阵的情况：

$$\begin{vmatrix}-8 & 2\\10 & -2.5\end{vmatrix}=20-20=0 \qquad \begin{vmatrix}2 & -6\\-2.5 & 7.5\end{vmatrix}=15-15=0$$

$$\begin{vmatrix}10 & -2.5\\24 & -6\end{vmatrix}=-60-(-60)=0 \qquad \begin{vmatrix}-2.5 & 7.5\\-6 & 18\end{vmatrix}=-45-(-45)=0$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 的所有 2×2 子矩阵的行列式都为零，即 $\boldsymbol{C}$ 没有任何二行或二列是线性无关的，所以 $\rho(\boldsymbol{C})\neq 2$ 而 $\rho(\boldsymbol{C})=1$．第2行是第1行的 -1.25 倍，第3行是第一行的 -3 倍，第2列为第1列的 $-\frac{1}{4}$ 倍，第3列为第1列的 $\frac{3}{4}$ 倍．

(d) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 5\\7 & 11\\3 & 1\end{bmatrix}$

解 ☞ 由于矩阵的线性无关的最大的行数一定等于线性无关的最大的列数，$\boldsymbol{D}$ 的秩不可能超过2．检验子矩阵，

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\7 & 11\end{vmatrix}=22-35=-13\neq 0 \qquad \rho(\boldsymbol{D})=2$$

显然 $\boldsymbol{D}$ 的二列线性无关，与此同时，$\boldsymbol{D}$ 也只有二行线性无关，因为第2行为第1行的2倍与第3行的和．

行列式的性质

11.4 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\3 & 2 & 4\\1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

比较(a) $\boldsymbol{A}$ 的行列式与(b) $\boldsymbol{A}$ 的转置的行列式．(c) 指明满足行列式的哪个性质．

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{A}|=2(4-16)-5(6-4)+1(12-2)=-24$

(b) $\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\5 & 2 & 4\\1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$$|\boldsymbol{A}'|=2(4-16)-3(10-4)+1(20-2)=-24$$

(c) 这说明了一矩阵的行列式等于其转置的行列式．见11.5节．

11.5 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

比较(a) $\boldsymbol{A}$ 的行列式与(b) $\boldsymbol{A}'$的行列式.

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (b) $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ $|\boldsymbol{A}'| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

11.6 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,(b) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的 1,2 两行的位置得到一个新矩阵 $\boldsymbol{B}$,求$|\boldsymbol{B}|$.(c) 交换$\boldsymbol{A}$ 的 1,2 两列得到另外一个矩阵 $\boldsymbol{C}$,求$|\boldsymbol{C}|$.(d) 比较上述行列式并指明满足哪个行列式性质.

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{A}| = 1(10-12) - 4(6-8) + 2(9-10) = 4$

(b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$|\boldsymbol{B}| = 3(8-6) - 5(2-4) + 4(3-8) = -4$

(c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$|\boldsymbol{C}| = 2(10-9) - 4(8-6) + 1(12-10) = -4$

(d) $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$,说明了交换两行或两列只改变行列式的符号,但不改变行列式的绝对值.

11.7 已知

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

(a) 求 $\boldsymbol{W}$ 的行列式,(b) 交换 $\boldsymbol{W}$ 的 1,2 两行,得到一个新矩阵 $\boldsymbol{Y}$,并比较$|\boldsymbol{Y}|$与$|\boldsymbol{W}|$.

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{W}| = wz - yx$

(b) $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y & z \\ w & x \end{bmatrix}$ $|\boldsymbol{Y}| = yx - wz = -(wz - yx) = -|\boldsymbol{W}|$

11.8 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,(b) $\boldsymbol{A}$ 的第一行乘以 2 得到新矩阵 $\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$ 的行列式.(c) 比较行列式并指明满足行列式的哪个性质.

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{A}| = 3(3-8) - 5(6-16) + 7(4-4) = 35$

(b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $|\boldsymbol{B}| = 6(3-8) - 10(6-16) + 14(4-4) = 70$

(c) $|\boldsymbol{B}| = 2|\boldsymbol{A}|$.用一个纯量乘上矩阵的某一行或列后,行列式等于放大或缩小了该纯量倍数.

11.9 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) 求$|\boldsymbol{A}|$,(b) 用$\frac{1}{5}$乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列,形成新的矩阵 $\boldsymbol{B}$,求$|\boldsymbol{B}|$.(c) 比较行列式.

解 ☞ (a) $|\boldsymbol{A}| = 2(40-15) - 5(12-1) + 8(45-10) = 275$

(b)　注意，乘以$\frac{1}{5}$相当于除以 5.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad |B| = 2(8-3) - 1(12-1) + 8(9-2) = 55$$

(c)
$$|B| = \frac{1}{5}|A|$$

11.10　已知

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

比较(a)　A 的行列式与(b)　B 的行列式.

解　☞ (a)　$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(b)　$|B| = a_{11}ka_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22}) - k(a_{12}a_{21}) = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k|A|$

11.11　已知

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(a)　求$|A|$，(b)　第 1 列减去第 2 列的 5 倍，形成新的矩阵 B. 求$|B|$. (c)　比较行列式并指明满足行列式的哪个性质.

解　☞ (a)　$|A| = 5(12-5) - 1(18-20) + 4(3-8) = 17$

(b)　$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad |B| = 0 - 1(-42+5) + 4(-7+2) = 17$

(c)　$|B| = |A|$. 从一行或一列加上或减去另一行或另一列的非零倍数，不改变行列式的值.

11.12　(a)　对问题 11.11 中的矩阵 A，从第 1 行减去第 3 行. 形成新矩阵 C，及(b)　求$|C|$.

解　☞ (a)　$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(b)　$|C| = 1(12-5) - 0 + (-2)(3-8) = 17$

11.13　已知上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

即主对角线以上的元素均为零. (a)　求$|A|$. (b)　求沿主对角线的元素之积. (c)　说明演示的是行列式的哪个性质.

解　☞ (a)　$|A| = -3(-20-0) \quad 0+0 = 60$

(b)　$(-3)(-5)(4) = 60$

(c)　三角矩阵的行列式等于其主对角元素之积.

11.14　已知下三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

即主对角线之下元素均为零. (a)　求$|A|$，(b)　求主对角元素的积.

解　☞ (a)　$|A| = 2(-21-0) - (-5)(0-0) - 1(0-0) = -42$

(b)　$2(3)(-7) = -42$

11.15　已知

$$A=\begin{bmatrix}12 & 16 & 13\\ 0 & 0 & 0\\ -15 & 20 & -9\end{bmatrix}$$

(a)　求$|A|$.(b)　说明演示的是行列式的哪个性质?

解　☞ (a)　$|A|=12(0-0)-16(0-0)+13(0-0)=0$

(b)　如果矩阵的某一行或列的所有元素为零,则行列式为零.由于 A 的第二行元素全部为 0,所以矩阵实际上为 2×3 维的,而不是 3×3 的.只有方矩阵才有行列式.

奇异与非奇异矩阵

11.16　利用一个 2×2 的系数矩阵 A,证明:如果$|A|\neq0$,则 A 的两两行与列之间线性无关,从而方程组有惟一解.

解　☞ 设含二个未知数的二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1 & (11.5)\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 & (11.6)\end{cases}$$

通过用 a_{22}乘以(11.5),用 $-a_{12}$乘(11.6),并相加以消去 y,以求解 x.

$$\begin{aligned}a_{11}a_{22}x+a_{12}a_{22}y&=a_{22}b_1\\ -a_{12}a_{21}x-a_{12}a_{22}y&=-a_{12}b_2\\ \hline (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x&=a_{22}b_1-a_{12}b_2\end{aligned}$$

$$x=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{11.7}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=|A|$.如果在(11.7)中,$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$,$x$ 没有惟一解.意味着方程之间线性相关;如果$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$,则 x 有惟一解.且方程一定是线性无关的.

11.17　利用行列式判断下列方程组是否存在惟一解:

(a)　$\begin{cases}12x_1+7x_2=147\\ 15x_1+19x_2=168\end{cases}$

解　☞ 找出系数矩阵 A,并求行列式$|A|$.如果$|A|\neq0$,矩阵 A 是非奇异的,方程组有唯一解存在.如果$|A|=0$,矩阵是奇异的,方程组没有惟一解.所以

$$A=\begin{bmatrix}12 & 7\\ 15 & 19\end{bmatrix}\qquad |A|=12(19)-(7)15=123$$

因为$|A|\neq0$,A 是非奇异的,且有惟一解存在.

(b)　$\begin{cases}2x_1+3x_2=27\\ 6x_1+9x_2=81\end{cases}$

解　☞

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{bmatrix}\qquad |A|=2(9)-6(3)=0$$

没有惟一解存在.方程是线性相关的,第 2 个方程是第一个的 3 倍.

(c)　$\begin{cases}72x_1-54x_2=216\\ 64x_1-48x_2=192\end{cases}$

解　☞ $A=\begin{bmatrix}72 & -54\\ 64 & -48\end{bmatrix}$　$|A|=72(-48)-(-54)(64)=-3456+3456=0$

由于$|A|=0$,所以方程组没有惟一解存在.仔细观察发现,第 2 个方程是第 1 个的$\frac{8}{9}$倍.

(d)　$\begin{cases}4x_1+3x_2+5x_3=27\\ x_1+6x_2+2x_3=19\\ 3x_1+x_2+3x_3=15\end{cases}$

解　☞ $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ 1 & 6 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}$　$|A|=4(18-2)-3(3-6)+5(1-18)=-12$

惟一解存在.

(e) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 10x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 70 \end{cases}$

解 ☞ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ $|A| = 4(15-10) - 2(45-20) + 6(15-10) = 0$

方程组没有惟一解存在.仔细观察发现第3个方程为第1个方程的2.5倍.

(f) $\begin{cases} 56x_1 + 47x_2 + 8x_3 = 365 \\ 84x_1 - 39x_2 + 12x_3 = 249 \\ 28x_1 - 81x_2 + 4x_3 = 168 \end{cases}$

解 ☞
$$A = \begin{bmatrix} 56 & 47 & 8 \\ 84 & -39 & 12 \\ 28 & -81 & 4 \end{bmatrix}$$

求行列式之前从第1列中提出公因子28,从第3列中提出4,

$$|A| = 28(4)\begin{vmatrix} 2 & 47 & 2 \\ 3 & -39 & 3 \\ 1 & -81 & 1 \end{vmatrix}$$

显然,第1列和第3列线性相关.行列式等于0,所以没有惟一解存在.

$$|A| = 112[2(-39+243) - 47(0) + 2(-243+39)] = 112(0) = 0$$

子式和余子式

11.18 已知

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

求第一行每个元素的(a) 子式$|M_{ij}|$和(b) 余子式$|C_{ij}|$.

解 ☞ (a) 为求a_{11}的子式,在心里划去第1行和第1列,余下的元素为子式.所以$|M_{11}| = a_{22}$,类似地,$|M_{12}| = a_{21}$.

(b) 由余子式的法则,有

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1}|M_{11}| = +1(a_{22}) = a_{22}$$
$$|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -1(a_{21}) = -a_{21}$$

11.19 已知

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$$

求第二行每个元素的(a) 子式及(b) 余子式.

解 ☞ (a) $|M_{21}| = 17$ $|M_{22}| = 13$

(b) $|C_{21}| = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -1(17) = -17$

$|C_{22}| = (-1)^{2+2}|M_{22}| = +1(13) = 13$

11.20 已知

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

求第2列每个元素的(a) 子式及(b) 余子式.

解 ☞ (a) $|M_{12}| = 12$ $|M_{22}| = 6$

(b) $|C_{12}| = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -12$

$|C_{22}| = (-1)^{2+2}|M_{22}| = 6$

11.21　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4\\ 6 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

求第一行每个元素的(a)　子式和(b)　余子式.

解　☞ (a)划掉第一行和第一列

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-26$$

同样地,

$$|M_{12}|=\begin{vmatrix}6 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=17$$

$$|M_{13}|=\begin{vmatrix}6 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=15$$

(b)

$$|C_{11}|=(-1)^2|M_{11}|=-26$$

$$|C_{12}|=(-1)^3|M_{12}|=-17$$

$$|C_{13}|=(-1)^4|M_{13}|=15$$

11.22　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}9 & 11 & 4\\ 3 & 2 & 7\\ 6 & 10 & 4\end{bmatrix}$$

求第三行元素的(a)　子式及(b)　余子式.

解　☞ (a)　划去第三行和第一列

$$|M_{31}|-\begin{vmatrix}11 & 4\\ 2 & 7\end{vmatrix}=69$$

类似地,

$$|M_{32}|=\begin{vmatrix}9 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}=51$$

$$|M_{33}|=\begin{vmatrix}9 & 11\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-15$$

(b)

$$|C_{31}|=(-1)^4|M_{31}|=69$$

$$|C_{32}|=(-1)^5|M_{32}|=-51$$

$$|C_{33}|=(-1)^6|M_{33}|=-15$$

11.23　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}13 & 6 & 11\\ 12 & 9 & 4\\ 7 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

求第二列元素的(a)　子式及(b)　余子式.

解　☞ (a)

$$|M_{12}|=\begin{vmatrix}12 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$|M_{22}|=\begin{vmatrix}13 & 11\\ 7 & 2\end{vmatrix}=-51$$

$$|M_{32}|=\begin{vmatrix}13 & 11\\ 12 & 4\end{vmatrix}=-80$$

(b)
$$|C_{12}| = (-1)^3 |M_{12}| = -1(-4) = 4$$
$$|C_{22}| = (-1)^4 |M_{22}| = 51$$
$$|C_{32}| = (-1)^5 |M_{32}| = -1(-80) = 80$$

11.24 求下列矩阵的(1) 余子式矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和(2) 共轭矩阵 Adj$\boldsymbol{A}$.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

解 ☞ (1) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |M_{11}| & -|M_{12}| \\ -|M_{21}| & |M_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$

(2) $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

解 ☞ (1) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & -13 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -13 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ -20 & 7 \end{bmatrix}$

解 ☞ (1) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 & 20 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$ (2) $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 20 & 9 \end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

解 ☞ (1)
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -23 & 22 & 3 \\ 19 & -15 & -12 \\ -10 & -19 & 14 \end{bmatrix}$$

(2) $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} -23 & 19 & -10 \\ 22 & -15 & -19 \\ 3 & -12 & 14 \end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 8 \\ -9 & 6 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

解 ☞ (1)
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -9 & -4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -9 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 13 & 8 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 14 & 11 & -20 \\ -40 & -20 & 60 \end{bmatrix}$$

(2) $\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 2 & 14 & -40 \\ 3 & 11 & -20 \\ 0 & -20 & 60 \end{bmatrix}$

拉普拉斯展式

11.25 利用拉普拉斯展式求下列矩阵的行列式,注意:用最简单求解的行或列展开.

(a) $A=\begin{bmatrix}15 & 7 & 9\\ 2 & 5 & 6\\ 9 & 0 & 12\end{bmatrix}$

解 ☞ 沿第二列展开

$$|A| = a_{12}|C_{12}| + a_{22}|C_{22}| + a_{32}|C_{32}| = 7(-1)\begin{vmatrix}2 & 6\\ 9 & 12\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}15 & 9\\ 9 & 12\end{vmatrix} + 0$$
$$= -7(-30) + 5(99) = 705$$

(b) $A=\begin{bmatrix}23 & 35 & 0\\ 72 & 46 & 10\\ 15 & 29 & 0\end{bmatrix}$

解 ☞ 沿第三列展开,有

$$|A| = a_{13}|C_{13}| + a_{23}|C_{23}| + a_{33}|C_{33}| = 0 + 10(-1)\begin{vmatrix}23 & 35\\ 15 & 29\end{vmatrix} + 0$$
$$= -10(142) = -1420$$

(c) $A=\begin{bmatrix}12 & 98 & 15\\ 0 & 25 & 0\\ 21 & 84 & 19\end{bmatrix}$

解 ☞ 沿第二列展开,有

$$|A| = a_{21}|C_{21}| + a_{22}|C_{22}| + a_{23}|C_{23}| = 0 + 25\begin{vmatrix}12 & 15\\ 21 & 19\end{vmatrix} + 0 = 25(-87) = -2175$$

(d) $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

解 ☞ 沿第一行展开,有

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| + a_{14}|C_{14}|$$
$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix} +$$
$$1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix} + 5(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

再沿第一行展开每个 3×3 子矩阵,

$$|A| = 2\left[2\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right] - 4\left[3\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\right] +$$
$$1\left[3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right] - 5\left[3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right]$$
$$= 2[2(-10) - 5(-12) + 1(2)] - 4[3(-10) - 5(-10) + 1(0)] +$$
$$1[3(-12) - 2(-10) + 1(-2)] - 5[3(2) - 2(0) + 5(-2)]$$
$$= 2(42) - 4(20) + 1(-18) - 5(-4) = 6$$

(e) $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

解 ☞ 沿第二列展开

$$|A| = a_{12}|C_{12}| + a_{22}|C_{22}| - a_{32}|C_{32}| + a_{42}|C_{42}|$$
$$= 0 + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

再代入 3×3 子矩阵的行列式值

$$|A| = 2(-60) + 1(88) = -32$$

逆矩阵

11.26 求下列矩阵的逆矩阵 A^{-1}. 对(a)检验你的答案.

(a) $A = \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

解 ☞
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A$$

求行列式的值

$$|A| = 24(7) - 15(8) = 48$$

再求余子式矩阵以获得共轭矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -15 & 24 \end{bmatrix}$$

及

$$\text{Adj}A = C' = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{48} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

利用(11.8)中 A^{-1} 未化简的形式,检验 $A^{-1}A = I$,

$$A^{-1}A = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7 & -15 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 7(24) - 15(8) & 7(15) - 15(7) \\ -8(24) + 24(8) & -8(15) + 24(7) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

解 ☞
$$|A| = 7(12) - 9(6) = 30$$

余子式矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$$

及

$$\text{Adj}A = C' = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{30} \end{bmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} -7 & 16 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}$

解 ☞
$$|A| = -7(13) - 16(-9) = 53$$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -16 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'=\begin{bmatrix}13 & -16\\ 9 & -7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{53}\begin{bmatrix}13 & -16\\ 9 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{53} & -\frac{16}{53}\\ \frac{9}{53} & -\frac{7}{53}\end{bmatrix}$$

(d) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 8\\ 9 & 6 & 7\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|\boldsymbol{A}|=4(7-48)-2(21-72)+5(18-9)=-17$$

余子式矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 8\\ 6 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 8\\ 9 & 7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 5\\ 9 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 2\\ 9 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-41 & 51 & 9\\ 16 & -17 & -6\\ 11 & -17 & -2\end{bmatrix}$$

及

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'=\begin{bmatrix}-41 & 16 & 11\\ 51 & -17 & -17\\ 9 & -6 & -2\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-41 & 16 & 11\\ 51 & -17 & -17\\ 9 & -6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{41}{17} & \frac{16}{17} & -\frac{11}{17}\\ -3 & 1 & 1\\ -\frac{9}{17} & \frac{6}{17} & \frac{2}{17}\end{bmatrix}$$

(e) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}14 & 0 & 6\\ 9 & 5 & 0\\ 0 & 11 & 8\end{bmatrix}$

解 ☞

$$|\boldsymbol{A}|=14(40)-0+6(99)=1154$$

余子式矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}40 & -72 & 99\\ 66 & 112 & -154\\ -30 & 54 & 70\end{bmatrix}$$

共轭矩阵为

$$\mathrm{Adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}40 & 66 & -30\\ -72 & 112 & 54\\ 99 & -154 & 70\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{1154}\begin{bmatrix}40 & 66 & -30\\ -72 & 112 & 54\\ 99 & -154 & 70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{577} & \frac{33}{577} & -\frac{15}{577}\\ -\frac{36}{577} & \frac{56}{577} & \frac{27}{577}\\ \frac{99}{1154} & -\frac{77}{577} & \frac{35}{577}\end{bmatrix}$$

方程组解的矩阵求逆方法

11.27　利用矩阵求逆方法求解下列线性方程组.将所求的解代入原方程以验证你的答案.

(a) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 28 \\ 2x_1 + 5x_2 = 42 \end{cases}$

解 ☞
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$$

由 11.8 节，$X = A^{-1}B$. 先求 A 的逆，这里 $|A| = 4(5) - 3(2) = 14$. A 的余子式矩阵为
$$C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

及
$$\mathrm{Adj}A = C' = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

所以
$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

于是代入 $X = A^{-1}B$，并相乘得
$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 10 - 9 \\ -4 + 12 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

所以，$\bar{x}_1 = 1$ 及 $\bar{x}_2 = 8$.

(b) $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 = 56 \\ 2x_1 + 3x_2 = 44 \end{cases}$

解 ☞
$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 44 \end{bmatrix}$$

这里，$|A| = 6(3) - 7(2) = 4$.
$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Adj}A = C' = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

及
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

所以
$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} 56 \\ 44 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 42 - 77 \\ -28 + 66 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} -35 \\ 38 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

有 $\bar{x}_1 = -35$ 及 $\bar{x}_2 = 38$.

11.28 两个相关市场(叉子与牛排)的均衡条件为
$$\begin{cases} 18P_b - P_p = 87 \\ -2P_b + 36P_p = 98 \end{cases}$$

求每个市场的均衡价格.

解 ☞
$$\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ -2 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_b \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 \\ 98 \end{bmatrix}$$

这里，$|A| = 18(36) - (-1)(-2) = 646$.
$$C = \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Adj}A = \begin{bmatrix} 36 & 1 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$$

及

$$A^{-1} = \frac{1}{646}\begin{bmatrix} 36 & 1 \\ 2 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{323} & \frac{1}{646} \\ \frac{1}{323} & \frac{9}{323} \end{bmatrix}$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} \frac{18}{323} & \frac{1}{646} \\ \frac{1}{323} & \frac{9}{323} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 87 \\ 98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1615}{323} \\ \frac{969}{323} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

得 $\bar{P}_b = 5$ 及 $\bar{P}_p = 3$.

这与问题 2.12 中由联立方程求得的解相同. 作为练习, 利用矩阵求逆的方法求问题 2.13 的解.

11.29 两个可替代商品的均衡条件为

$$\begin{cases} 5P_1 - 2P_2 = 15 \\ -P_1 + 8P_2 = 16 \end{cases}$$

求均衡价格.

解 ☞

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

这里, $|A| = 5(8) - (-1)(-2) = 38$.

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{Adj}A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

及

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60+16}{19} \\ \frac{15+80}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

即 $\bar{P}_1 = 4$ 及 $\bar{P}_2 = 2.5$.

11.30 已知: IS 方程为 $0.3Y + 100i - 252 = 0$ 及 LM 方程为 $0.25Y - 200i - 176 = 0$. 求收入的均衡水平及利率.

解 ☞ 将 IS 与 LM 方程写成如下形式

$$\begin{cases} 0.3Y + 100i = 252 \\ 0.25Y - 200i = 176 \end{cases}$$

以矩阵形式表达, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 100 \\ 0.25 & -200 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 252 \\ 176 \end{bmatrix}$$

所以

$$|A| = 0.3(-200) - 100(0.25) = -85$$

$$C = \begin{bmatrix} -200 & -0.25 \\ -100 & 0.3 \end{bmatrix}$$

及

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{85}\begin{bmatrix} -200 & -100 \\ -0.25 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{17} & \frac{20}{17} \\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17} \end{bmatrix}$$

所以

$$X=\begin{bmatrix}\frac{40}{17} & \frac{20}{17}\\ \frac{0.05}{17} & -\frac{0.06}{17}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}252\\176\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10\,080+3520}{17}\\ \frac{12.6-10.56}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800\\0.12\end{bmatrix}$$

均衡 $\bar{Y}=800$ 及 $\bar{i}=0.12$ 正是问题 2.23 中用联立方程所求得的解.自己完成问题 2.24 的练习.

11.31 利用矩阵求逆方法求解下述线性方程组的未知数.

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-3x_3=12\\ 3x_1-5x_2+2x_3=13\\ -x_1+3x_2+2x_3=17\end{cases}$$

解 ☞

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & -3\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\13\\17\end{bmatrix}$$

其中 $|A|=2(-16)-4(8)-3(4)=-76$.

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -5\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -8 & 4\\ -17 & 1 & -10\\ -7 & -13 & -22\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}A=\begin{bmatrix}-16 & -17 & -7\\ -8 & 1 & -13\\ 4 & -10 & -22\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{76}\begin{bmatrix}-16 & -17 & -7\\ -8 & 1 & -13\\ 4 & -10 & -22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{76} & \frac{17}{76} & \frac{7}{76}\\ \frac{8}{76} & -\frac{1}{76} & \frac{13}{76}\\ -\frac{4}{76} & \frac{10}{76} & \frac{22}{76}\end{bmatrix}$$

其中的公分母 76 是为后面的计算方便而特意保持的.

所以

$$X=\begin{bmatrix}\frac{16}{76} & \frac{17}{76} & \frac{7}{76}\\ \frac{8}{76} & -\frac{1}{76} & \frac{13}{76}\\ -\frac{4}{76} & \frac{10}{76} & \frac{22}{76}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\13\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{192+221+119}{76}\\ \frac{96-13+221}{76}\\ \frac{-48+130+374}{76}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

11.32 三个相关子市场的均衡条件为

$$\begin{cases}11P_1-P_2-P_3=31\\ -P_1+6P_2-2P_3=26\\ -P_1-2P_2+7P_3=24\end{cases}$$

求各个子市场的均衡价格.

解 ☞

$$\begin{bmatrix}11 & -1 & -1\\ -1 & 6 & -2\\ -1 & -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31\\26\\24\end{bmatrix}$$

其中 $|A|=11(38)+1(-9)-1(8)=401$.

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{401}\begin{bmatrix} 38 & 9 & 8 \\ 9 & 76 & 23 \\ 8 & 23 & 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{401} & \frac{9}{401} & \frac{8}{401} \\ \frac{9}{401} & \frac{76}{401} & \frac{23}{401} \\ \frac{8}{401} & \frac{23}{401} & \frac{65}{401} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{38}{401} & \frac{9}{401} & \frac{8}{401} \\ \frac{9}{401} & \frac{76}{401} & \frac{23}{401} \\ \frac{8}{401} & \frac{23}{401} & \frac{65}{401} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1178 + 234 + 192}{401} \\ \frac{279 + 1976 + 552}{401} \\ \frac{248 + 598 + 1560}{401} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \end{bmatrix}
$$

见问题 2.16，用联立方程得到相同解.

11.33　已知 $Y = C + I_0$，其中 $C = C_0 + bY$. 利用矩阵求逆法求 Y 和 C 的均衡水平.

解　将已给的方程整理以使内生变量 C 和 Y，连同系数 $-b$ 同在方程的左手边，而外生变量 C_0 和 I_0 在右手边.

$$
\begin{cases} Y - C = I_0 \\ -bY + C = C_0 \end{cases}
$$

所以

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ C_0 \end{bmatrix}
$$

系数矩阵的行列式为 $|\boldsymbol{A}| = 1(1) + 1(-b) = 1 - b$. 余子式矩阵为 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

从而

$$
\mathrm{Adj}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}
$$

及

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}
$$

令 $X = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$，

$$
X = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ C_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b}\begin{bmatrix} I_0 + C_0 \\ bI_0 + C_0 \end{bmatrix}
$$

所以

$$
Y = \frac{1}{1-b}(I_0 + C_0) \qquad \bar{C} = \frac{1}{1-b}(C_0 + bI_0)
$$

在第 2 章的例 3 中没用矩阵方法也求解出了相同的均衡收入水平.

克莱姆法则

11.34　用克莱姆法则求解下列未知数：

(a)　$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 22 \\ -x_1 + 5x_2 = 53 \end{cases}$

解 ☞ 由克莱姆法则

$$\bar{x}_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

其中 A_i 为由常数列向量替代 x_i 的系数列而得到的新矩阵. 所以, 由原数据有

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 53 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 2(5) - 6(-1) = 16$.

用常数列代替系数矩阵的第一列,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 22 & 6 \\ 53 & 5 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_1| = 22(5) - 6(53) = -208$. 所以

$$\bar{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = -\frac{208}{16} = -13$$

用常数列代替原系数矩阵的第二列,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 22 \\ -1 & 53 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_2| = 2(53) - 22(-1) = 128$. 所以

$$\bar{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{128}{16} = 8$$

(b) $\begin{cases} 7p_1 + 2p_2 = 60 \\ p_1 + 8p_2 = 78 \end{cases}$

解 ☞

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

其中, $|A| = 7(8) - 2(1) = 54$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 60 & 2 \\ 78 & 8 \end{bmatrix}$$

其中, $|A_1| = 60(8) - 2(78) = 324$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 60 \\ 1 & 78 \end{bmatrix}$$

$|A_2| = 7(78) - 60(1) = 486$.

$$\bar{p}_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{324}{54} = 6 \quad 及 \quad \bar{p}_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{486}{54} = 9$$

(c) $\begin{cases} 18P_b - P_p = 87 \\ -2P_b + 36P_p = 98 \end{cases}$

解 ☞

$$A = \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ -2 & 36 \end{bmatrix}$$

其中 $|A| = 18(36) - 1(-1)(-2) = 646$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 87 & -1 \\ 98 & 36 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_1| = 87(36) + 1(98) = 3230$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 18 & 87 \\ -2 & 98 \end{bmatrix}$$

其中 $|A_2| = 18(98) - 87(-2) = 1938$.

$$\bar{P}_b = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3230}{646} = 5 \quad 及 \quad \bar{P}_p = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1938}{646} = 3$$

在问题 2.12 中用联立方程求解了该问题. 在问题 11.28 中又用矩阵求逆方法求出了相同解. 本题中则采用克莱姆法则求同一问题. 比较三种求解方法.

11.35 对下列线性方程组, 重做问题 11.34.

(a) $\begin{cases} 0.4Y + 150i = 209 \\ 0.1Y - 250i = 35 \end{cases}$

解 ☞
$$A=\begin{bmatrix}0.4 & 150\\ 0.1 & -250\end{bmatrix}$$

这里　$|A|=0.4(-250)-150(0.1)=-115.$

$$A_1=\begin{bmatrix}209 & 150\\ 35 & -250\end{bmatrix}$$

其中　$|A_1|=209(-250)-150(35)=-57\ 500.$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.4 & 209\\ 0.1 & 35\end{bmatrix}$$

其中　$|A_2|=0.4(35)-209(0.1)=-6.9.$

$$\bar{Y}=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-57\ 500}{-115}=500 \quad 及 \quad \bar{i}=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-6.9}{-115}=0.06$$

与问题2.24的方法进行比较.

(b) $\begin{cases}5x_1-2x_2+3x_3=16\\ 2x_1+3x_2-5x_3=2\\ 4x_1-5x_2+6x_3=7\end{cases}$

解 ☞ $|A|=\begin{vmatrix}5 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & -5 & 6\end{vmatrix}=5(18-25)+2(12+20)+3(-10-12)=-37$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}16 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 7 & -5 & 6\end{vmatrix}=16(18-25)+2(12+35)+3(-10-21)=-111$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}5 & 16 & 3\\ 2 & 2 & -5\\ 4 & 7 & 6\end{vmatrix}=5(12+35)-16(12+20)+3(14-8)=-259$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}5 & -2 & 16\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -5 & 7\end{vmatrix}=5(21+10)+2(14-8)+16(-10-12)=-185$$

$$\bar{x}_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-111}{-37}=3 \qquad \bar{x}_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-259}{-37}=7 \qquad \bar{x}_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-185}{-37}=5$$

(c) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3=52\\ -x_1+5x_2+3x_3=72\\ 3x_1-7x_2+2x_3=10\end{cases}$

解 ☞ $|A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & 5 & 3\\ 3 & -7 & 2\end{vmatrix}=2(31)-4(-11)-1(-8)=114$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}52 & 4 & -1\\ 72 & 5 & 3\\ 10 & -7 & 2\end{vmatrix}=52(31)-4(114)-1(-554)=1710$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}2 & 52 & -1\\ -1 & 72 & 3\\ 3 & 10 & 2\end{vmatrix}=2(114)-52(-11)-1(-226)=1026$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 52\\ -1 & 5 & 72\\ 3 & -7 & 10\end{vmatrix}=2(554)-4(-226)+52(-8)=1596$$

$$\bar{x}_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{1710}{114}=15 \qquad \bar{x}_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{1026}{114}=9 \qquad \bar{x}_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{1596}{114}=14$$

(d) $\begin{cases}11p_1-p_2-p_3=31\\ -p_1+6p_2-2p_3=26\\ -p_1-2p_2+7p_3=24\end{cases}$

解 ☞ $|A|=\begin{vmatrix}11 & -1 & -1\\ -1 & 6 & -2\\ -1 & -2 & 7\end{vmatrix}=11(38)+1(-9)-1(8)=401$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 31 & -1 & -1 \\ 26 & 6 & -2 \\ 24 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 31(38) + 1(230) - 1(-196) = 1604$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 11 & 31 & 1 \\ -1 & 26 & -2 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix} = 11(230) - 31(-9) - 1(2) = 2807$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 31 \\ -1 & 6 & 26 \\ -1 & -2 & 24 \end{vmatrix} = 11(196) + 1(2) + 31(8) = 2406$$

所以 $\bar{p}_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{1604}{401} = 4 \qquad \bar{p}_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{2807}{401} = 7 \qquad \bar{p}_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{2406}{401} = 6$

与问题 2.16 及 11.32 中的求解方法进行比较.

11.36 已知第 6 章例 7 的约束优化问题的一阶条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial TC}{\partial x} = 16x - y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial TC}{\partial y} = 24y - x - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial TC}{\partial \lambda} = 42 - x - y = 0 \end{cases}$$

利用克莱姆法则求解 x, y.

解 ☞ 整理方程

$$\begin{cases} 16x - y - \lambda = 0 \\ -x + 24y - \lambda = 0 \\ -x - y = -42 \end{cases}$$

以矩阵形式表达

$$\begin{bmatrix} 16 & -1 & -1 \\ -1 & 24 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42 \end{bmatrix}$$

沿第三列展开 $|A| = (-1)(1+24) - (-1)(-16-1) + 0 = -42$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 24 & -1 \\ -42 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

沿第一列展开 $|A_1| = -42(1+24) = -1050$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -42 & 0 \end{bmatrix}$$

沿着第二列展开 $|A_2| = -(-42)(-16-1) = -714$.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & -1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \\ -1 & -1 & -42 \end{bmatrix}$$

沿第三列展开 $|A_3| = -42(384-1) = -16\,086$.

所以

$$\bar{x} = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1050}{-42} = 25 \qquad \bar{y} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-714}{-42} = 17$$

$$\bar{\lambda} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-16\,086}{-42} = 383$$

11.37 已知问题 6.37 中的带约束的效用最大化一阶条件为: $Q_2 - 10\lambda = 0$, $Q_1 - 2\lambda = 0$, 及 $240 - 10Q_1 - 2Q_2 = 0$. 利用克莱姆法则求 Q_1 及 Q_2 的临界值.

解 ☞ 以矩形形式表达为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & -2 \\ -10 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -240 \end{bmatrix}$$

其中 $|\boldsymbol{A}| = -(1)(-20) + (-10)(-2) = 40$.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \\ -240 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -240(-2) = 480$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -2 \\ -10 & -240 & 0 \end{bmatrix} = -(-240)(10) = 2400$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -10 & -2 & -240 \end{bmatrix} = -240(-1) = 240$$

所以

$$\overline{Q}_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{480}{40} = 12 \qquad \overline{Q}_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{2400}{40} = 60$$

及

$$\bar{\lambda} = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{240}{40} = 6$$

11.38 已知

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = g & (11.9) \\ cx_1 + dx_2 = h & (11.10) \end{cases}$$

证明克莱母法则

$$\bar{x}_1 = \frac{\begin{vmatrix} g & b \\ h & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & g \\ c & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}$$

解 ☞ (11.9)除以 b,

$$\frac{a}{b}x_1 + x_2 = \frac{g}{b} \tag{11.11}$$

用 d 乘以(11.11)的两边,代入(11.10),

$$\begin{aligned} \frac{ad}{b}x_1 + dx_2 &= \frac{dg}{b} \\ -cx_1 - dx_2 &= -h \\ \hline \left(\frac{ad-cb}{b}\right)x_1 &= \frac{dg-hb}{b} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{dg-hb}{ad-cb} = \frac{\begin{vmatrix} g & b \\ h & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$$

类似地,(11.9)除以 a

$$x_1 + \frac{b}{a}x_2 = \frac{g}{a} \tag{11.12}$$

用 $-c$ 乘(11.12)并加上(11.10)

$$\begin{aligned} -cx_1 \quad -\frac{bc}{a}x_2 &= -\frac{cg}{a} \\ cx_1 \quad + dx_2 &= h \\ \hline \left(\frac{ad-bc}{a}\right)x_2 &= \frac{ah-cg}{a} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{ah-cg}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & g \\ c & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \text{Q.E.D.}$$

第十二章　特殊行列式和矩阵及其在经济学中的应用

12.1　雅可比行列式

在11.1节中介绍了如何利用简单的行列式简捷地检验线性相关性.而雅可比行列式不仅可以用来检测线性函数的相关性,而且可以检验非线性函数的相关性.雅可比矩阵$|\boldsymbol{J}|$是由方程组的所有一阶偏导数按着一定的顺序排列组成的.已知

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$|\boldsymbol{J}| = \left|\frac{\partial y_1, \partial y_2, \partial y_3}{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

注意到:雅可比行列式的第i行是由函数y_i关于每个独立变量x_1, x_2, x_3的偏导数组成的,第j列是由函数y_1, y_2, y_3关于第j个自变量x_j的偏导数组成.如果$|\boldsymbol{J}|=0$,方程是函数相关的;如果$|\boldsymbol{J}|\neq 0$,则方程为函数无关的.见例1及问题12.1~12.4.

例1　已知

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2 \end{cases}$$

利用雅可比行列式,判断其函数相关性.

解　☞ 首先,求一阶偏导数

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 5 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 3 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 50x_1 + 30x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 30x_1 + 18x_2$$

然后,构造雅可比行列式

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 50x_1 + 30x_2 & 30x_1 + 18x_2 \end{vmatrix}$$

求值

$$|\boldsymbol{J}| = 5(30x_1 + 18x_2) - 3(50x_1 + 30x_2) = 0$$

由于$|\boldsymbol{J}|=0$,则方程之间是函数相关的.仔细观察发现,$25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2 = (5x_1 + 3x_2)^2$.

12.2　海赛行列式

对于多元函数$z=f(x,y)$,已知一阶条件$z_x=z_y=0$满足,取得极值的充分条件为

(1)　$z_{xx}, z_{yy}>0$　　　极小值

(2)　$z_{xx}, z_{yy}<0$，$z_{xx}z_{yy}>(z_{xy})^2$　　　极大值

见5.4节.利用海赛行列式可以方便地检验上述二阶条件.海赛行列式$|\boldsymbol{H}|$是由所有的二阶偏导数构成的,其中二阶直接偏导数位于主对角线上,交叉偏导数位于非对角线的位置.所以

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

其中 $z_{xy}=z_{yx}$.如果位于主对角线上的第一个元素即第一主子式 $|\boldsymbol{H}_1|=z_{xx}$ 为正且第二主子式

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 > 0$$

则极小值的二阶条件成立.当 $|H_1|>0$, $|H_2|>0$ 时,海赛行列式 $|\boldsymbol{H}|$ 称为正定的.正定的海赛行列式完全能胜任极小值的二阶条件的角色.

如果第一主列式 $|H_1|=z_{xx}<0$ 及第二主子式

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

则极大值的二阶条件成立.当 $|H_1|<0$, $|H_2|>0$ 时,海赛行列式 $|\boldsymbol{H}|$ 称为负定的.一个负定的海赛行列式完全能胜任极大值的二阶条件的角色.见例 2 和问题 12.10～12.13.

例 2 在问题 5.10(a)中, $z=3x^2-xy+2y^2-4x-7y+12$ 被证明在 $x_0=1$ 及 $y_0=2$ 处达到最优.二阶偏导数为 $z_{xx}=6$, $z_{yy}=4$ 及 $z_{xy}=-1$.利用海赛行列式验证二阶条件,

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求主子式, $|H_1|=6>0$ 及

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4) - (-1)(-1) = 23 > 0$$

由于 $|H_1|>0$ 及 $|H_2|>0$,则海赛行列式 $|\boldsymbol{H}|$ 为正定的,从而 z 在临界值处取得最小值.

12.3 判别式

行列式可用来判断任何二次型的正定或负定.一个二次型的行列式称为判别式 $|\boldsymbol{D}|$.给定二次型

$$z = ax^2 + bxy + cy^2$$

判别式的主对角线由二次项系数组成,非对角线元素由非二次项系数的均分构成.所以

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix}$$

如同海赛行列式的检验一样,求主子式的值

$$|D_1| = a \qquad \text{及} \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}$$

如果 $|D_1|$, $|D_2|>0$, $|\boldsymbol{D}|$ 为正定的,且 z 对所有的非零的 x, y 为正的.如果 $|D_1|<0$ 及 $|D_2|>0$, z 为负定的且 z 对所有非零的 x 和 y 为负的.如果 $|D_2|\ngtr 0$, z 可能为正值也可能为负值见例 3 及问题 12.5～12.7.

例 3 已知二次型 $z=2x^2+5xy+8y^2$,判断其符号.

构造 12.3 节的判别式,

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 8 \end{vmatrix}$$

然后评估主子式,

$$|D_1| = 2 > 0 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 6.25 = 9.75 > 0$$

所以 z 为正定的,即对所有的非零 x 和 y, z 总是大于零.

12.4 高阶海赛行列式

已知 $y = f(x_1, x_2, x_3)$,三阶海赛行列式为

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

其元素为 y 的各个二阶偏导数:

$$y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \qquad y_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad y_{23} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 \partial x_2} \qquad \text{等等.}$$

极小或极大值的条件,分别取决于第一,第二和第三主子式的符号.如果 $|H_1| = y_{11} > 0$,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad |H_3| = |\boldsymbol{H}| > 0$$

其中 $|H_3|$ 为第三主子式,则 $|\boldsymbol{H}|$ 为正定的,且完全胜任极小值的二阶条件的角色.如果 $|H_1| = y_{11} < 0$,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad |H_3| = |\boldsymbol{H}| < 0$$

$|\boldsymbol{H}|$ 为负定的且完全胜任极大值的二阶条件的角色.更高阶海赛行列式有类似的结论.如果 $|\boldsymbol{H}|$ 的所有主子式为正的,则 $|\boldsymbol{H}|$ 为正定的,且极小值的二阶条件成立.如果 $|\boldsymbol{H}|$ 的所有主子式的符号在负与正之间交替出现,则 $|\boldsymbol{H}|$ 为负定的,且极大值的二阶条件满足.见例 4 和问题 12.8, 12.9 以及 12.4~12.18.

例 4　最优化函数 $y = -5x_1^2 + 10x_1 + x_1x_3 - 2x_2^2 + 4x_2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$,利用海赛行列式检验二阶条件.

解　☞ 一阶条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = y_1 = -10x_1 + 10 + x_3 = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = y_2 = -4x_2 + 2x_3 + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_3} = y_3 = x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

利用克莱姆法则(见 11.9 节)求行列式的值, $|\boldsymbol{A}| = -10(28) + 1(4) = -276 \neq 0$,因为 $|\boldsymbol{A}|$ 是雅可比行列式,且不等于零,则上述三个方程为函数无关的.

$$|\boldsymbol{A}_1| = -10(28) + 1(-8) = -288$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = -10(32) - (-10)(-2) + 1(4) = -336$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = -10(8) - 10(4) = -120$$

所以

$$\bar{x}_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-288}{-276} \cong 1.04 \qquad \bar{x}_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-336}{-276} \cong 1.22$$

$$\bar{x}_3 = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-120}{-276} \cong 0.43$$

由一阶条件求二阶偏导数

$$y_{11} = -10 \qquad y_{12} = 0 \qquad y_{13} = 1$$
$$y_{21} = 0 \qquad y_{22} = -4 \qquad y_{23} = 2$$
$$y_{31} = 1 \qquad y_{32} = 2 \qquad y_{33} = -8$$

所以

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

由于一阶条件为线性的，所以$|\boldsymbol{H}|$的元素与(12.1)的系数矩阵相同. 最后，分别检验其第一、第二及第三主子式

$$|H_1| = -10 < 0 \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$|H_3| = |\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{A}| = -276 < 0$$

由于主子式的符号交替地为负和正，则海赛行列式为负定的，从而该函数在 $\bar{x}_1 = 1.04$, $\bar{x}_2 = 1.22$ 及 $\bar{x}_3 = 0.43$ 处取得最大值.

12.5 约束优化的增广海赛行列式

在5.5 节中，为求解函数 $f(x, y)$ 满足约束 $g(x, y) = k$ 的极值问题，构造新函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[k - g(x, y)]$，它的一阶条件为 $F_x = F_y = F_\lambda = 0$.

二阶条件可以由增广海赛行列式$|\bar{\boldsymbol{H}}|$来表示，$|\bar{\boldsymbol{H}}|$有以下两种形式：

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & g_x \\ F_{yx} & F_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

它是由常义的海赛行列式

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

加入约束的一阶导数并以 0 为主对角元得到的. 增广主子式的阶取决于加边的主子式的阶. 所以，$|\bar{\boldsymbol{H}}|$代表第二个主子式$|\bar{\boldsymbol{H}}_2|$，因为加边的主子式为 2×2 的.

对于满足 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k$ 的 n 元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$|\bar{\boldsymbol{H}}| = |\bar{H}_n|$，因为$|\bar{\boldsymbol{H}}|$是由 $n\times n$ 主子式加边得到的.

如果所有的主子式为负，即$|\bar{H}_2|, |\bar{H}_3|, \cdots, |\bar{H}_n| < 0$，则增广海赛行列式为正定的，且有正定海赛行列式永远满足极小值的充分条件.

如果主子式由正到负交替出现，即$|\bar{H}_2| > 0$, $|\bar{H}_3| < 0$, $|H_4| > 0$，等等，则增广海赛行列式为负定的，且有负定海赛行列式总是满足极大值的充分条件. 如果上述准则下满足，则需进一步的检验，因为上述准则代表的是充分条件而不是必要条件. 该内容超出了本书范围. 见例 5，例 6 及问题 12.19～12.27. 对于 4×4 的增广海赛行列式，见问题 12.28.

例5 参见第 5 章的例 9. 用增广海赛行列式检验二阶条件，以判断 Z 是有极大值还是极小

值.

解　☞ 由(5.8)和(5.9),有 $Z_{xx}=8, Z_{yy}-12, Z_{xy}=Z_{yx}=3$. 由约束 $x+y=56$, 有 $g_x=1$ 及 $g_y=1$, 所以

$$|\overline{H}|=\begin{vmatrix}8 & 3 & 1\\ 3 & 12 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

由第二个主子式 $\overline{H}_2|$开始,有

$$|\overline{H}_2|=|\overline{H}|=8(-1)-3(-1)+1(3-12)=-14$$

由于$|\overline{H}_2|<0$, $|\overline{H}|$为正定的,从而 Z 达到极小值. 见问题 12.19~12.22.

例 6　参见第 6 章例 10,应用增广海赛行列式检验广义道格拉斯生产函数取得最大值的二阶条件.

解　☞ 见方程(6.15)及(6.16)得, $Q_{KK}=-0.24K^{-1.6}L^{0.5}$, $Q_{LL}=-0.25K^{0.4}L^{-1.5}$, $Q_{KL}=Q_{LK}=0.2K^{-0.6}L^{-0.5}$; 由约束 $3K+4L=108$, 有 g_K-3, $g_L=4$, 所以

$$|\overline{H}|=\begin{vmatrix}-0.24K^{-1.6}L^{0.5} & 0.2K^{-0.6}L^{-0.5} & 3\\ 0.2K^{-0.6}L^{-0.5} & -0.25K^{0.4}L^{-1.5} & 4\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}$$

由$|\overline{H}_2|$开始,沿第三行展开

$$\begin{aligned}|\overline{H}_2|&=3(0.8K^{-0.6}L^{-0.5}+0.75K^{0.4}L^{-1.5})-4(-0.96K^{-1.6}L^{0.5}-0.6K^{-0.6}L^{-0.5})\\&=2.25K^{0.4}L^{-1.5}+4.8K^{-0.6}L^{0.5}+3.84K^{-1.6}L^{0.5}\\&=\frac{2.25K^{0.4}}{L^{1.5}}+\frac{4.8}{K^{0.6}L^{0.5}}+\frac{3.84L^{0.5}}{K^{1.6}}>0\end{aligned}$$

由于$|\overline{H}_2|>0$, $|\overline{H}|$为负定的,从而又达到最大值. 见问题 12.23~12.28.

12.6　投入-产出分析

在现代经济中,一种商品的生产往往需要许多其它产品作为中间品投入其生产过程中(例如,钢需要煤、铁原矿、电等等),对产品 i 的总需求 x 是对其所有的中间需求与由消费者、投资者、政府及出口商作为最终使用者所引起的对其的最终需求 b 之和. 如果 a_{ij}代表生产价值一元钱的产品 j 所需投入 i 的价值量,对产品 i 的总需求则可表示为

$$x_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+b_i \qquad 对\ i=1,2,\cdots,n.$$

以矩阵形式表达为

$$X=AX+B \tag{12.2}$$

其中

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

A 称为技术系数矩阵, a_{ij}称为技术系数. 在技术系数矩阵 A 和最终需求列向量 B 已知的情况下,我们可以求出满足最终需求的总产出水平 X. 由(12.2),有

$$X-AX=B$$

$$(I-A)X=B$$

$$X=(I-A)^{-1}B \tag{12.3}$$

所以,对于一个三部门的经济来说,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 矩阵称为列昂惕夫矩阵.在一个完整的投入-产出模型中,劳动和资本也被包含在投入中.在这样的模型中,第 j 列元素之和将等于 1:生产 1 单位或 1 元钱价值的 j 产品的所有投入成本为 1,正如问题 12.39 所示.见例 7 及问题 12.29~12.39.

例 7　已知技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及最终需求列向量 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

求三个部门的总产出水平 $\boldsymbol{X}$.

解　☞ 由(12.3),$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.1 \\ -0.5 & 0.8 & -0.6 \\ -0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

求逆,

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{0.151}\begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

并代入(12.3)中,有

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{0.151}\begin{bmatrix} 0.54 & 0.39 & 0.32 \\ 0.51 & 0.62 & 0.47 \\ 0.23 & 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.151}\begin{bmatrix} 24.3 \\ 30.5 \\ 17.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160.93 \\ 201.99 \\ 118.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12.7　特征根与特征向量

到目前为止,我们能够利用主子式来检验海赛行列式和二次型的符号定性.符号定性也可以利用矩阵的特征根来检验.给定矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果能够找到一向量 $\boldsymbol{V}\neq 0$ 及标量 c,使得

$$\boldsymbol{AV} = c\boldsymbol{V} \tag{12.4}$$

则,标量 c 称为特征根,向量 $\boldsymbol{V}$ 称为特征向量.方程(12.4)也可表示为

$$\boldsymbol{AV} = c\boldsymbol{IV}$$

整理,得

$$\boldsymbol{AV} - c\boldsymbol{IV} = 0$$

$$(\boldsymbol{A} - c\boldsymbol{I})\boldsymbol{V} = 0 \tag{12.5}$$

其中 $\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵.由于假设 $\boldsymbol{V}\neq 0$,则特征矩阵 $\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}$ 必为奇异的(见问题 10.49),从而其行列式必为零.如果 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵,则

$$|\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} a_{11}-c & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-c \end{vmatrix} = 0$$

在(12.5)中,由于 $|\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}|=0$,则(12.5)有无穷个解 $\boldsymbol{V}$.可以通过标准化 $\boldsymbol{V}$ 的元素 v_i,即要求 v_i 满足 $\sum v_i^2=1$,以得到惟一解.见例 9.

如果

1)　所有特征根 c 为正的,则 $\boldsymbol{A}$ 为正定的.
2)　所有 c 为负的,则 $\boldsymbol{A}$ 为负定的.
3)　所有的 c 为非负的,且至少有一个 $c=0$,则 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的.

4）所有 c 为非正的，且至少有一个 $c=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 为半负定的.

5）有些 c 为正，而另一些则为负，则 $\boldsymbol{A}$ 为符号不定的.

见例 8，例 9 和问题 12.40～12.45 及 9.3 节.

例 8　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征根.

解　由于特征矩阵 $\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}$ 的行列式必为零，所以

$$|\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-6-c & 3\\ 3 & -6-c\end{vmatrix}=0 \tag{12.6}$$

$$(-6-c)(-6-c)-(3)(3)=0$$

$$c^2+12c+27=0 \qquad (c+9)(c+3)=0$$

$$c_1=-9 \qquad c_2=-3$$

由于二个特征根均为负，则 A 为负定的. 注意：(1)　c_1+c_2 必等于 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的元素之和，(2)　c_1c_2 一定等于行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值.

例 9　继续例 8，求第一个特征根 $c_1=-9$ 的特征向量：

解　将 $c=-9$ 代入(12.6)，

$$\begin{bmatrix}-6-(-9) & 3\\ 3 & -6-(-9)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0 \tag{12.7}$$

由于系数矩阵为线性相关的，则(12.7)有无穷多个解. 矩阵与向量相乘得到两个完全相同的方程，

$$3v_1+3v_2=0$$

以 v_1 求解 v_2 得

$$v_2=-v_1 \tag{12.8}$$

再标准化(12.8)的解，使得

$$v_1^2+v_2^2=1 \tag{12.9}$$

将 $v_2=-v_1$ 代入(12.9)，得到

$$v_1^2+(-v_1)^2=1$$

所以，$2v_1^2=1$，$v_1^2=\frac{1}{2}$. 取正平方根，$v_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}$. 由(12.8)，$v_2=-v_1$. 因此 $v_2=-\sqrt{0.5}$，则第一个特征向量为

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{0.5}\\ -\sqrt{0.5}\end{bmatrix}$$

求第二个特征根 $c_2=-3$ 的特征向量：

将 $c_2=-3$ 代入(12.6)，

$$\begin{bmatrix}-6-(-3) & 3\\ 3 & -6-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$

乘积为

$$-3v_1+3v_2=0$$

$$3v_1-3v_2=0$$

所以，$v_1=v_2$. 标准化

$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$
$$(v_2)^2 + v_2^2 = 1$$
$$2v_2^2 = 1$$
$$v_2 = \sqrt{0.5} \qquad v_1 = \sqrt{0.5}$$

所以
$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{0.5} \end{bmatrix}$$

习 题 解 答

雅可比行列式

12.1 用雅可比行列式检测下列方程之间的函数相关性：

$$y_1 = 6x_1 + 4x_2$$
$$y_2 = 7x_1 + 9x_2$$

求一阶偏导数，以建立雅可比行列式 $|\boldsymbol{J}|$，

解 ☞
$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 6 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 4 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 7 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 9$$

所以
$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6(9) - 7(4) = 26$$

由于 $|\boldsymbol{J}| \neq 0$，则方程是函数无关的. 注意到线性方程组的雅可比行列式 $|\boldsymbol{J}|$ 等于其系数矩阵的行列式 $|\mathbf{A}|$，且所有元素相等. 这样，11.1 节中的矩阵非奇异的行列式检测完全可以用线性方程的雅可比行列式检测来完成.

12.2 已知

$$y_1 = 3x_1 - 4x_2$$
$$y_2 = 9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2$$

重做 12.1 题.

解 ☞ 一阶偏导数为

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -4 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 18x_1 - 24x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -24x_1 + 32x_2$$

所以
$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 18x_1 - 24x_2 & -24x_1 + 32x_2 \end{vmatrix} = 3(-24x_1 + 32x_2) + 4(18x_1 - 24x_2) = 0$$

它们是函数相关的：

$$(3x_1 - 4x_2)^2 = 9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2$$

12.3 已知

$$y_1 = x_1^2 - 3x_2 + 5$$
$$y_2 = x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 9x_2^2$$

重做问题 12.1.

解 ☞
$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -3 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 12x_1x_2 \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -6x_1^2 + 18x_2$$

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} 2x_1 & -3 \\ 4x_1^3 - 12x_1x_2 & -6x_1^2 + 18x_2 \end{vmatrix} = 2x_1(-6x_1^2 + 18x_2) + 3(4x_1^3 - 12x_1x_2) = 0$$

它们是函数相关的：$y_2 = (y_1 - 5)^2$，其中

$$y_1 - 5 = x_1^2 - 3x_2 + 5 - 5 = x_1^2 - 3x_2 \quad 及 \quad (x_1^2 - 3x_2)^2 = x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 9x_2^2$$

12.4 用雅可比行列式检验下列方程间的函数相关性：

(a)　$y_1 = 4x_1 - x_2$

$y_2 = 16x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

解 ☞

$$|J| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 32x_1 + 8x_2 & 8x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = 4(8x_1 + 2x_2) + 1(32x_1 + 8x_2) = 64x_1 + 16x_2 \neq 0$$

方程是函数无关的.

(b)　$y_1 = 1.5x_1^2 + 12x_1x_2 + 24x_2^2$

$y_2 = 2x_1 + 8x_2$

解 ☞　$|J| = \begin{vmatrix} 3x_1 + 12x_2 & 12x_1 + 48x_2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8(3x_1 + 12x_2) - 2(12x_1 + 48x_2) = 0$

方程之间是函数相关的.

(c)　$y_1 = 4x_1^2 + 3x_2 + 9$

$y_2 = 16x_1^4 + 24x_1^2x_2 + 9x_2^2 + 12$

解 ☞

$$|J| = \begin{vmatrix} 8x_1 & 3 \\ 64x_1^3 + 48x_1x_2 & 24x_1^2 + 18x_2 \end{vmatrix} = 8x_1(24x_1^2 + 18x_2) - 3(64x_1^3 + 48x_1x_2) = 0$$

方程是函数相关的.

二次函数的判别式与符号定性

12.5　利用判别式判断下列二次函数是正定的还是负定的.

(a)　$y = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$

解 ☞ 将二次项的系数放在主对角线上,将非二次项系数均匀分配在 a_{12} 和 a_{21} 的位置上,所以,

$$|D| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

其中

$$|D_1| = -3 < 0 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-4) - (2)(2) = 8 > 0$$

由于 $|D_1| < 0$ 及 $|D_2| > 0$,所以 y 为负定的,从而对所有的非零值 x_1 和 x_2,y 为负值.

(b)　$y = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2$

解 ☞ 判别式为　$|D| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$

其中 $|D_1| = 5 > 0$ 及 $|D_2| = |D| = 5(7) - (-1)(-1) = 34 > 0$. 由于 $|D_1| > 0$ 及 $|D_2| > 0$,所以 y 为正定的,从而对所有的非零值 x_1 和 x_2 必有 $y > 0$.

12.6　对 $y = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 8x_3^2 - 3x_1x_3$,重做 12.5 题.

解 ☞ 对于三元的二次函数,将二次项系数放在主对角线上,而将 x_1x_3 的系数平均地分配到 a_{13} 和 a_{31} 的位置上,将 x_2x_3 的系数平均地分配到 a_{23} 和 a_{32} 的位置上,等等. 所以

$$|D| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1.5 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1.5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

其中

$$|D_1| = 5 > 0 \qquad |D_2| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

及 $|D_3| = |D| = 5(23) + 3(-25.5) - 1.5(7.5) = 27.25 > 0$. 所以 y 为正定的.

12.7　利用判别式判断下列函数的符号定性:

(a)　$y = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2 + 2x_1x_3$

解 ☞
$$|D|=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}$$
其中
$$|D_1|=-2<0 \qquad |D_2|=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=6>0$$
及$|D_3|=|\boldsymbol{D}|=-2(14)-2(-7)+1(7)=-7<0$.所以,$y$为负定的.

(b)　$y=-7x_1^2-2x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2-6x_1x_3$

解 ☞
$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}-7 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ -3 & 1 & -4\end{vmatrix}$$
其中
$$|D_1|=-7,\ |D_2|=\begin{vmatrix}-7 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=14$$
及$|D_3|=|\boldsymbol{D}|=-7(7)-3(-6)=-31$.则$y$为负定的.

最优化问题中的海赛行列式

12.8　利用(a)　克莱姆法则判断一阶条件及(b)　海赛行列式判断二阶条件,求下列函数的最优解.
$$y=3x_1^2-5x_1-x_1x_2+6x_2^2-4x_2+2x_2x_3+4x_3^2+2x_3-3x_1x_3$$

解 ☞ (a)　一阶条件为
$$\begin{aligned}y_1&=6x_1-5-x_2-3x_3=0\\ y_2&=-x_1+12x_2-4+2x_3=0\\ y_3&=2x_2+8x_3+2-3x_1=0\end{aligned}\tag{12.10}$$
其矩阵形式为
$$\begin{bmatrix}6 & -1 & -3\\ -1 & 12 & 2\\ -3 & 2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ -2\end{bmatrix}$$
利用克莱姆法则,$|\boldsymbol{A}|=6(92)+1(-2)-3(34)=448$.由于$|\boldsymbol{A}|$也等于$|\boldsymbol{J}|$,所以方程为函数无关的.
$$|\boldsymbol{A}_1|=5(92)+1(36)-3(32)=400$$
$$|\boldsymbol{A}_2|=6(36)-5(-2)-3(14)=184$$
$$|\boldsymbol{A}_3|=6(-32)+1(14)+5(34)=-8$$
所以
$$\bar{x}_1=\frac{400}{448}\approx0.89 \qquad \bar{x}_2=\frac{184}{448}\approx0.41 \qquad \bar{x}_3=\frac{-8}{448}\approx-0.02$$
(b)　求(12.10)的二阶偏导数以构造海赛矩阵,
$$\begin{aligned}&y_{11}=6 && y_{12}=-1 && y_{13}=-3\\ &y_{21}=-1 && y_{22}=12 && y_{23}=2\\ &y_{31}=-3 && y_{32}=2 && y_{33}=8\end{aligned}$$
所以
$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}6 & -1 & -3\\ -1 & 12 & 2\\ -3 & 2 & 8\end{vmatrix}$$
其中
$$|H_1|=6>0 \qquad |H_2|=\begin{vmatrix}6 & -1\\ -1 & 12\end{vmatrix}=71>0$$
及$|H_3|=|\boldsymbol{H}|=|A|=448>0$.所以 $\boldsymbol{H}|$为正定的.从而y在驻点处达到最小值.

12.9 已知 $y=-5x_1^2+10x_1+x_1x_3-2x_2^2+4x_2+2x_2x_3-4x_3^2$，重做 12.8 题.

(a)

$$\begin{aligned} y_1 &= -10x_1+10+x_3=0 \\ y_2 &= -4x_2+4+2x_3=0 \\ y_3 &= x_1+2x_2-8x_3=0 \end{aligned} \tag{12.11}$$

解 ☞ 矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用克莱姆法则

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= -10(28)+1(4)=-276 \\ |\boldsymbol{A}_1| &= -10(28)+1(-8)=-288 \\ |\boldsymbol{A}_2| &= -10(32)+10(-2)+1(4)=-336 \\ |\boldsymbol{A}_3| &= -10(8)-10(4)=-120 \end{aligned}$$

所以

$$\bar{x}_1=\frac{-288}{-276}\approx 1.04 \qquad \bar{x}_2=\frac{-336}{-276}\approx 1.22 \qquad \bar{x}_3=\frac{-120}{-276}\approx 0.43$$

(b) 求(12.11)的二阶偏导数，构造海赛行列式

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1|=-10<0$，$|H_2|=40>0$，及 $|H_3|=|A|=-276<0$. 所以，$|\boldsymbol{H}|$ 为负定的，从而 y 取得最大值.

12.10 完全竞争市场上的一个企业生产两种产品，总收益和总成本函数为

$$\mathrm{TR}=15Q_1+18Q_2 \qquad \mathrm{TC}=2Q_1^2+2Q_1Q_2+3Q_2^2$$

由于一种产品的边际成本依赖于另一种产品的产出水平(例，$\partial\mathrm{TC}/\partial Q_1=4Q_1+2Q_2$)，所以两种产品在生产中是技术相关的. 利用(a) 克莱姆法则判断一阶条件(b) 海赛行列式判断二阶条件，使企业利润最大化.

解 ☞ (a)

$$\Pi=\mathrm{TR}-\mathrm{TC}=15Q_1+18Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-3Q_2^2$$

一阶条件为

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= 15-4Q_1-2Q_2=0 \\ \Pi_2 &= 18-2Q_1-6Q_2=0 \end{aligned}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -15 \\ -18 \end{bmatrix}$$

由克莱姆法则

$$|\boldsymbol{A}|=24-4=20 \qquad |\boldsymbol{A}_1|=90-36=54 \qquad |\boldsymbol{A}_2|=72-30=42$$

所以

$$\bar{Q}_1=\frac{54}{20}=2.7 \qquad \bar{Q}_2=\frac{42}{20}=2.1$$

(b) 利用海赛行列式检验二阶条件，

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1|=-4$ 及 $|H_2|=20$. 由于 $|\boldsymbol{H}|$ 为负定的，从而 Π 取得最大值.

12.11 利用 12.10 题中的技术，求一个生产两种技术无关的产品的竞争企业利润最大的产出水平.

解 ☞ 该企业的总收益及总成本函数为

$$\mathrm{TR} = 7Q_1 + 9Q_2 \qquad \mathrm{TC} = Q_1^2 + 2Q_1 + 5Q_2 + 2Q_2^2$$

(a)

$$\Pi = 7Q_1 + 9Q_2 - Q_1^2 - 2Q_1 - 5Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 7 - 2Q_1 - 2 = 0 \qquad \overline{Q}_1 = 2.5$$

$$\Pi_2 = 9 - 5 - 4Q_2 = 0 \qquad \overline{Q}_2 = 1$$

(b)

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -2$ 及 $|H_2| = 8$，所以 $|\boldsymbol{H}|$ 为负定的，从而 Π 取得最大值.

12.12 已知一个完全垄断企业生产两种相关的产品，即

$$P_1 = f(Q_1, Q_2)$$

如果两种商品为互替的，产品需求函数及总成本函数为

$$P_1 = 80 - 5Q_1 - 2Q_2 \qquad P_2 = 50 - Q_1 - 3Q_2 \qquad \mathrm{TC} = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

利用(a) 克莱姆法则及(b) 海赛行列式，使企业利润最大化.

解 ☞ (a) $\Pi = \mathrm{TR} - \mathrm{TC}$，其中 $\mathrm{TR} = P_1Q_1 + P_2Q_2$

$$\Pi = (80 - 5Q_1 - 2Q_2)Q_1 + (50 - Q_1 - 3Q_2)Q_2 - (3Q_1^2 - Q_1Q_2 + 2Q_2^2)$$

$$= 80Q_1 + 50Q_2 - 4Q_1Q_2 - 8Q_1^2 - 5Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 80 - 4Q_2 - 16Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 50 - 4Q_1 - 10Q_2 = 0$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 160 - 16 = 144 \qquad |\boldsymbol{A}_1| = 800 - 200 = 600 \qquad |\boldsymbol{A}_2| = 800 - 320 = 480$$

及

$$\overline{Q}_1 = \frac{600}{144} \approx 4.17 \qquad \overline{Q}_2 = \frac{480}{144} \approx 3.33$$

(b)

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -10 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -16$ 及 $|H_2| = 144$. 所以 Π 为最大.

12.13 已知一个厂商生产两种替代商品，且

$$P_1 = 130 - 4Q_1 - Q_2 \quad P_2 = 160 - 2Q_1 - 5Q_2 \quad \mathrm{TC} = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2$$

利用(a) 克莱姆法则判断一阶条件及(b) 海赛行列式检验二阶条件，使利润最大化.

解 ☞ (a) $\Pi = (130 - 4Q_1 - Q_2)Q_1 + (160 - 2Q_1 - 5Q_2)Q_2 - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2)$

$$= 130Q_1 + 160Q_2 - 5Q_1Q_2 - 6Q_1^2 - 9Q_2^2$$

$$\Pi_1 = 130 - 5Q_2 - 12Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 160 - 5Q_1 - 18Q_2 = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ -5 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130 \\ -160 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 191$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = 1540 \qquad \overline{Q}_1 = \frac{1540}{191} \approx 8.06$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = 1270 \qquad \overline{Q}_2 = \frac{1270}{191} \approx 6.65$$

(b)

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -12 & -5 \\ -5 & -18 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -12$ 及 $|H_2| = 191$. 所以 Π 达到最大.

12.14 已知一个垄断企业生产三种相关产品，其需求函数及成本函数为

$$P_1 = 180 - 3Q_1 - Q_2 - 2Q_3 \quad P_2 = 200 - Q_1 - 4Q_2 \quad P_3 = 150 - Q_2 - 3Q_3$$

$$\text{TC} = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2$$

重做 12.13 题.

解 ☞ (a)

$$\Pi = (180 - 3Q_1 - Q_2 - 2Q_3)Q_1 + (200 - Q_1 - 4Q_2)Q_2 + (150 - Q_2 - 3Q_3)Q_3$$
$$- (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2)$$
$$= 180Q_1 + 200Q_2 + 150Q_3 - 3Q_1Q_2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3 - 4Q_1^2 - 5Q_2^2 - 4Q_3^2$$

$$\Pi_1 = 180 - 3Q_2 - 2Q_3 - 8Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 200 - 3Q_1 - 2Q_3 - 10Q_2 = 0$$

$$\Pi_3 = 150 - 2Q_2 - 2Q_1 - 8Q_3 = 0$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -8 & -3 & -2 \\ -3 & -10 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 \\ -200 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -8(76) + 3(20) - 2(-14) = -520$$
$$|\boldsymbol{A}_1| = -180(76) + 3(1300) - 2(-1100) = -7580$$
$$|\boldsymbol{A}_2| = -8(1300) - 180(20) - 2(50) = -6900$$
$$|\boldsymbol{A}_3| = -8(1100) - 3(50) - 180(-14) = -6130$$

所以

$$\bar{Q}_1 = \frac{-7580}{-520} \approx 14.58 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-6900}{-520} \approx 13.27 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-6130}{-520} \approx 11.79$$

(b)
$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -8 & -3 & -2 \\ -3 & -10 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -8$, $|H_2| = 71$, 及 $|H_3| = |\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{A}| = -520$. 所以 Π 最大.

12.15 重做 12.14 题, 已知

$$P_1 = 70 - 2Q_1 - Q_2 - Q_3 \qquad P_2 = 120 - Q_1 - 4Q_2 - 2Q_3$$

$$P_3 = 90 - Q_1 - Q_2 - 3Q_3$$

$$\text{TC} = Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 2Q_2Q_3 + Q_3^2 + Q_1Q_3$$

解 ☞ (a)

$$\Pi = 70Q_1 + 120Q_2 + 90Q_3 - 3Q_1Q_2 - 5Q_2Q_3 - 3Q_1Q_3 - 3Q_1^2 - 6Q_2^2 - 4Q_3^2$$

$$\Pi_1 = 70 - 3Q_2 - 3Q_3 - 6Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 120 - 3Q_1 - 5Q_3 - 12Q_2 = 0$$

$$\Pi_3 = 90 - 3Q_1 - 5Q_2 - 8Q_3 = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -3 & -12 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \\ -120 \\ -90 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -336$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = -2000 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-2000}{-336} \approx 5.95$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = -2160 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-2160}{-336} \approx 6.43$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = -1680 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-1680}{-336} = 5$$

(b)
$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -3 & -12 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix}$$

其中 $|H_1| = -6$, $|H_2| = 63$, 及 $|H_3| = |\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{A}| = -336$. 所以 Π 取得最大值.

12.16 已知需求函数和总成本函数为

$$Q_1 = 100 - 3P_1 + 2P_2 \qquad Q_2 = 75 + 0.5P_1 - P_2 \qquad TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$$

由于 P_1 与 P_2 在两个需求函数中有相反符号，则说明：这两种商品为相互替代品（商品 2 的价格 P_2 上涨会引起对商品 1 的需求量 Q_1 的增加，P_1 上升则会引起 Q_2 的增加）. 利用(a) 求 $P = f(Q)$的反函数，(b) 利用克莱姆法则检验一阶条件. (c) 利用海赛行列式检验二阶条件，使利润最大化.

解 ☞ (a) 由于二个商品是相互关联的，则反函数必须由二个需求函数联立求得. 整理需求函数得，

$$-3P_1 + 2P_2 = Q_1 - 100$$
$$0.5P_1 - P_2 = Q_2 - 75$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 100 \\ Q_2 - 75 \end{bmatrix}$$

利用克莱姆法则

$$|\boldsymbol{A}| = 2$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 100 & 2 \\ Q_2 - 75 & -1 \end{vmatrix} = -Q_1 + 100 - 2Q_2 + 150 = 250 - Q_1 - 2Q_2$$

$$P_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{250 - Q_1 - 2Q_2}{2} = 125 - 0.5Q_1 - Q_2$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} -3 & Q_1 - 100 \\ 0.5 & Q_2 - 75 \end{vmatrix} = -3Q_2 + 225 - 0.5Q_1 + 50 = 275 - 0.5Q_1 - 3Q_2$$

$$P_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{275 - 0.5Q_1 - 3Q_2}{2} = 137.5 - 0.25Q_1 - 1.5Q_2$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pi &= (125 - 0.5Q_1 - Q_2)Q_1 + (137.5 - 0.25Q_1 - 1.5Q_2)Q_2 - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2) \\ &= 125Q_1 + 137.5Q_2 - 3.25Q_1Q_2 - 1.5Q_1^2 - 2.5Q_2^2\end{aligned}$$

$$\Pi_1 = 125 - 3.25Q_2 - 3Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 137.5 - 3.25Q_1 - 5Q_2 = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} -3 & -3.25 \\ -3.25 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -125 \\ -137.5 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 4.4375$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = 178.125 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{178.125}{4.4375} \approx 40.14$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = 6.25 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{6.25}{4.4375} \approx 1.4$$

(c)

$$|\boldsymbol{H}| = \begin{vmatrix} -3 & -3.25 \\ -3.25 & -5 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -3$，$|H_2| = |\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{A}| = 4.4375$，所以 Π 取得最大值.

12.17 已知 $Q_1 = 90 - 6P_1 - 2P_2 \qquad Q_2 = 80 - 2P_1 - 4P_2 \qquad TC = 2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 2Q_2^2$

其中 Q_1 与 Q_2 为互补品，因为 P_1 与 P_2 在每个方程中具有相同的符号. 重做 12.16 题.

解 ☞ (a) 将需求函数变换为 Q 的函数

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 90 \\ Q_2 - 80 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 20$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} Q_1 - 90 & -2 \\ Q_2 - 80 & -4 \end{vmatrix} = -4Q_1 + 360 + 2Q_2 - 160 = 200 - 4Q_1 + 2Q_2$$

$$P_1 = \frac{200 - 4Q_1 + 2Q_2}{20} = 10 - 0.2Q_1 + 0.1Q_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -6 & Q_1 - 90 \\ -2 & Q_2 - 80 \end{vmatrix} = 6Q_2 + 480 + 2Q_1 - 180 = 300 - 6Q_2 + 2Q_1$$

$$P_2 = \frac{300 - 6Q_2 + 2Q_1}{20} = 15 - 0.3Q_2 + 0.1Q_1$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pi &= (10 - 0.2Q_1 + 0.1Q_2)Q_1 + (15 - 0.3Q_2 + 0.1Q_1)Q_2 - (2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 2Q_1^2) \\ &= 10Q_1 + 15Q_2 - 2.8Q_1Q_2 - 2.2Q_1^2 - 2.3Q_2^2\end{aligned}$$

$$\Pi_1 = 10 - 2.8Q_2 - 4.4Q_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 15 - 2.8Q_1 - 4.6Q_2 = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} -4.4 & -2.8 \\ -2.8 & -4.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 12.4$$

$$|A_1| = 4 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{4}{12.4} \approx 0.32$$

$$|A_2| = 38 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{38}{12.4} \approx 3.06$$

(c)

$$|H| = \begin{vmatrix} -4.4 & -2.8 \\ -2.8 & -4.6 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -4.4$, $|H_2| = |A| = 12.4$，所以 Π 取得最大值.

12.18 已知

$$Q_1 = 150 - 3P_1 + P_2 + P_3 \qquad Q_2 = 180 + P_1 - 4P_2 + 2P_3$$

$$Q_3 = 200 + 2P_1 + P_2 - 5P_3$$

$$TC = Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + Q_2Q_3 + Q_3^2 + Q_1Q_3$$

重做问题 12.16.

解 ☞ (a) 求需求函数的反函数

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - 150 \\ Q_2 - 180 \\ Q_3 - 200 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -36$$

$$\begin{aligned}|A_1| &= (Q_1 - 150)(20 - 2) - 1(-5Q_2 + 900 - 2Q_3 + 400) + 1(Q_2 - 180 + 4Q_3 - 800) \\ &= -4980 + 18Q_1 + 6Q_2 + 6Q_3\end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{-4980 + 18Q_1 + 6Q_2 + 6Q_3}{-36} = 138.33 - 0.5Q_1 - 0.17Q_2 - 0.17Q_3$$

$$\begin{aligned}|A_2| &= -3(-5Q_2 + 900 - 2Q_3 + 400) - (Q_1 - 150)(-5 - 4) + 1(Q_3 - 200 - 2Q_2 + 360) \\ &= -5090 + 9Q_1 + 13Q_2 + 7Q_3\end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{-5090 + 9Q_1 + 13Q_2 + 7Q_3}{-36} = 141.39 - 0.25Q_1 - 0.36Q_2 - 0.19Q_3$$

$$\begin{aligned}|A_3| &= -3(-4Q_3 + 800 - Q_2 + 180) - 1(Q_3 - 200 - 2Q_2 + 360) + (Q_1 - 150)(1 + 8) \\ &= -4450 + 9Q_1 + 5Q_2 + 11Q_3\end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{-4450 + 9Q_1 + 5Q_2 + 11Q_3}{-36} = 123.61 - 0.25Q_1 - 0.14Q_2 - 0.31Q_3$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pi &= P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - TC \\ &= 138.33Q_1 + 141.39Q_2 + 123.61Q_3 - 1.42Q_1Q_2 \\ &\quad - 1.33Q_2Q_3 - 1.42Q_1Q_3 - 1.5Q_1^2 - 2.36Q_2^2 - 1.31Q_3^2\end{aligned}$$

$$\Pi_1 = 138.33 - 1.42Q_2 - 1.42Q_3 - 3Q_1 = 0$$

$$\Pi_2 = 141.39 - 1.42Q_1 - 1.33Q_3 - 4.72Q_2 = 0$$

$$\Pi_3 = 123.61 - 1.33Q_2 - 1.42Q_1 - 2.62Q_3 = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} -3 & -1.42 & -1.42 \\ -1.42 & -4.72 & -1.33 \\ -1.42 & -1.33 & -2.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -138.33 \\ -141.39 \\ -123.61 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -22.37$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = -612.27 \qquad \bar{Q}_1 = \frac{-612.27}{-22.37} \approx 27.37$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = -329.14 \qquad \bar{Q}_2 = \frac{-329.14}{-22.37} \approx 14.71$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = -556.64 \qquad \bar{Q}_3 = \frac{-556.64}{-22.37} \approx 24.88$$

(c)

$$|H_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1.42 & -1.42 \\ -1.42 & -4.72 & -1.33 \\ -1.42 & -1.33 & -2.62 \end{vmatrix}$$

$|H_1| = -3$, $|H_2| = 12.14$ 及 $|H_3| = |\boldsymbol{A}| = -22.37$. 所以, Π 达到最大值.

约束最优化的增广海赛矩阵

12.19 已知效用函数 $u = 2xy$, 预算约束方程为 $3x + 4y = 90$. 通过(a) 求临界值 $\bar{x}, \bar{y}$ 及 $\bar{\lambda}$, (b) 利用增广海赛行列式 $|\bar{\boldsymbol{H}}|$ 验证二阶条件, 以求解满足预算约束的效用最大化问题.

解 ☞ (a) 拉格朗日函数为

$$U = 2xy + \lambda(90 - 3x - 4y)$$

一阶条件为

$$U_x = 2y - 3\lambda = 0 \qquad U_y = 2x - 4\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 90 - 3x - 4y = 0$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \end{bmatrix} \tag{12.12}$$

由克莱姆法则, $|\boldsymbol{A}| = 48$, $|A_1| = 720$, $|A_2| = 540$ 及 $|A_3| = 360$. 所以 $\bar{x} = 15$, $\bar{y} = 11.25$ 及 $\bar{\lambda} = 7.5$.

(b) 求 U 关于 x, y 的二阶偏导数及约束关于 x, y 的一阶偏导数,

$$U_{xx} = 0 \qquad U_{yy} = 0 \qquad U_{xy} = 2 = U_{yx} \qquad c_x = 3 \qquad c_y = 4$$

由 12.5 节, 构造增广海赛行列式

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad 或 \quad |\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\bar{H}_2| = |\bar{\boldsymbol{H}}| = -2(-12) + 3(8) = 48 > 0$$

$$|\bar{H}_2| = |\bar{\boldsymbol{H}}| = -3(-8) + 4(6) = 48 > 0$$

如上两种构造增广行列式的方式均不影响主子式的值. 由于 $|\bar{\boldsymbol{H}}| = |\boldsymbol{A}| > 0$, 由 12.5 节的法则, $|\bar{\boldsymbol{H}}|$ 为负定的, 从而 U 取得最大值.

12.20 利用 12.19 题中的技术, 求解效用 $u = xy + x$ 满足预算约束 $6x + 2y = 110$ 的最大化问题.

解 ☞ (a)

$$U = xy + x + \lambda(110 - 6x - 2y)$$

$$U_x = y + 1 - 6\lambda = 0 \qquad U_y = x - 2\lambda = 0 \qquad U_\lambda = 110 - 6x - 2y = 0$$

以矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -110 \end{bmatrix}$$

由克莱姆法则求解

$$\bar{x}=9\frac{1}{3},\quad \bar{y}=27 \quad 及 \quad \bar{\lambda}=4\frac{2}{3}.$$

(b)　由于 $U_{xx}=0$, $U_{yy}=0$, $U_{xy}=1=U_{yx}$, $C_x=6$ 及 $C_y=2$,

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 2\\ 6 & 2 & 0\end{vmatrix} \qquad |\bar{H}_2|=|\bar{H}|=24$$

因为 $|\bar{H}_2|>0$,则 $|\bar{H}|$ 为负定的,从而 U 取得最大值.

12.21　已知一企业的总成本 $C=45x^2+90xy+90y^2$,必须满足生产配额 $2x+3y=60$.通过(a)求临界值及(b)利用增广海赛行列式检验二阶条件以求解在满足配额情况下的成本最小化问题.

解 ☞ (a)
$$C=45x^2+90xy+90y^2+\lambda(60-2x-3y)$$

$$C_x=90x+90y-2\lambda=0 \qquad C_y=90x+180y-3\lambda=0$$
$$C_\lambda=60-2x-3y=0$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix}90 & 90 & -2\\ 90 & 180 & -3\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -60\end{bmatrix}$$

由克莱姆法则求解　$\bar{x}=12$,　$\bar{y}=12$　及　$\bar{\lambda}=1080$.

(b)　由于 $C_{xx}=90$, $C_{yy}=180$, $C_{xy}=90=C_{yx}$, $g_x=2$ 及 $g_y=3$

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}90 & 90 & 2\\ 90 & 180 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2|=-450$,由于 $|\bar{H}_2|<0$, $|\bar{H}|$ 为正定的,从而 C 取得最小值.

12.22　利用 12.21 题的技术求解一企业在满足生产配额 $5x+7y=732$ 的情况下成本 $C=3x^2+5xy+6y^2$ 的最小化问题.

解 ☞ (a)
$$C=3x^2+5xy+6y^2+\lambda(732-5x-7y)$$

$$C_x=6x+5y-5\lambda=0 \qquad C_y=5x+12y-7\lambda=0$$
$$C_\lambda=732-5x-7y=0$$

联立求解得

$$\bar{x}=75 \qquad \bar{y}=51 \qquad \bar{\lambda}=141$$

(b)　由于 $C_{xx}=6$, $C_{yy}=12$, $C_{xy}=5=C_{yx}$, $g_x=5$ 及 $g_y=7$,

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 5 & 12 & 7\\ 5 & 7 & 0\end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2|=5(35-60)-7(42-25)=-244$.所以 $|\bar{H}|$ 为正定,从而 C 达到最小.

12.23　利用 12.21 题的技术,求解在满足约束 $10x+3y=140$ 情况下效用 $u=x^{0.5}y^{0.3}$ 的最大化问题.

解 ☞ (a)
$$U=x^{0.5}y^{0.3}+\lambda(140-10x-3y)$$

$$U_x=0.5x^{-0.5}y^{0.3}-10\lambda=0 \qquad U_y=0.3x^{0.5}y^{-0.7}-3\lambda=0$$
$$U_\lambda=140-10x-3y=0$$

联立求解得

$$\bar{x}=8.75 \qquad \bar{y}=17.5 \quad 及 \quad \bar{\lambda}=0.04$$

(b)　由于 $U_{xx}=-0.25x^{-1.5}y^{0.3}$, $U_{yy}=-0.21x^{0.5}y^{-1.7}$, $U_{xy}=U_{yx}=0.15x^{-0.5}y^{-0.7}$, $g_x=10$ 及 $g_y=3$,

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}-0.25x^{-1.5}y^{0.3} & 0.15x^{-0.5}y^{-0.7} & 10\\ 0.15x^{-0.5}y^{-0.7} & -0.21x^{0.5}y^{-1.7} & 3\\ 10 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

沿第三列展开

$$|\overline{H}_2| = 10(0.45x^{-0.5}y^{-0.7} + 2.1x^{0.5}y^{-1.7}) - 3(-0.75x^{-1.5}y^{0.3} - 1.5x^{-0.5}y^{-0.7})$$
$$= 21x^{0.5}y^{-1.7} + 9x^{-0.5}y^{-0.7} + 2.25x^{-1.5}y^{0.3} > 0$$

由于 x 及 $y>0$，正数的负数次幂为正数，所以 $|H_2|>0$，从而 $|\overline{\boldsymbol{H}}|$ 为负定的，U 取得最大值.

12.24　同 12.23 题，求解满足预算约束 $2x+8y=104$ 的效用 $u=x^{0.25}y^{0.4}$ 的最大化问题.

解 ☞ (a)

$$U = x^{0.25}y^{0.4} + \lambda(104 - 2x - 8y)$$

$$U_x = 0.25x^{-0.75}y^{0.4} - 2\lambda = 0 \qquad U_y = 0.4x^{0.25}y^{-0.6} - 8\lambda = 0$$

$$U_\lambda = 104 - 2x - 8y = 0$$

联立求解，得

$$\bar{x} = 20, \bar{y} = 8 \text{ 及 } \bar{\lambda} = 0.03.$$

(b)

$$|\overline{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} -0.1875x^{-1.75}y^{0.4} & 0.1x^{-0.75}y^{-0.6} & 2 \\ 0.1x^{-0.75}y^{-0.6} & -0.24x^{0.25}y^{-1.6} & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

沿第三行展开

$$|\overline{H}_2| = 2(0.8x^{-0.75}y^{-0.6} + 0.48x^{0.25}y^{-1.6}) - 8(-1.5x^{-1.75}y^{0.4} - 0.2x^{-0.75}y^{-0.6})$$
$$= 0.96x^{0.25}y^{-1.6} + 3.2x^{-0.75}y^{-0.6} + 12x^{-1.75}y^{0.4} > 0$$

所以 $|\overline{\boldsymbol{H}}|$ 为负定的，从而 U 达到最大化.

12.25　利用问题 12.21(a)，(b)和(c)的技术求解满足约束 $2xy=337.5$ 的成本 $C=3x+4y$ 的最小化问题. 讨论该解与问题 12.19 的解之间的关系.

解 ☞ (a)

$$C = 3x + 4y + \lambda(337.5 - 2xy)$$

$$C_x = 3 - 2\lambda y = 0 \qquad \lambda = \frac{1.5}{y} \tag{12.13}$$

$$C_y = 4 - 2\lambda x = 0 \qquad \lambda = \frac{2}{x} \tag{12.14}$$

$$C_\lambda = 337.5 - 2xy = 0 \tag{12.15}$$

由(12.13)与(12.14)得

$$\frac{1.5}{y} = \frac{2}{x} \qquad y = 0.75x$$

代入(12.15)

$$337.5 = 2x(0.75x) = 1.5x^2$$
$$x^2 = 225 \qquad \bar{x} = 15$$

所以 $\bar{y}=11.25$ 及 $\bar{\lambda}=0.133$.

(b)　由 $C_{xx}=0$，$C_{yy}=0$ 及 $C_{xy}=C_{yx}=-2\lambda$ 及由约束 $2xy=337.5$ 所得到的 $g_x=2y$，$g_y=2x$，有

$$|\overline{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} 0 & -2\lambda & 2y \\ -2\lambda & 0 & 2x \\ 2y & 2x & 0 \end{vmatrix}$$

$|\overline{H}_2| = -(-2\lambda)(-4xy) + 2y(-4x\lambda) = -16\lambda xy$. 由于 $\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y}>0$，$|\overline{H}_2|<0$，所以 $|\overline{\boldsymbol{H}}|$ 为正定的，从而 C 取得最小值.

(c)　除目标函数与约束颠倒之外，该问题与 12.19 题完全相同. 在 12.19 中，目标函数 $u=2xy$ 在满足约束 $3x+4y=90$ 的情况下最大化，本题是目标函数 $C=3x+4y$ 在满足约束 $2xy=337.5$ 情况下最小化. 所以，我们可以在满足预算约束情况使效用最大化或在一给定效用水平下，使成本最小化.

12.26　已知 $Q=10K^{0.7}L^{0.1}$ 及 $P_K=28$，$P_L=10$，$Q=434$，通过(a)求临界值，(b)利用增广海赛行列式求解成本最小化问题.(c)用问题 6.41(b)的答案来检验本题答案.

解 ☞ (a)　目标函数 $c=28K+10L$，约束为 $10K^{0.7}L^{0.1}=434$. 所以

$$C = 28K + 10L + \lambda(434 - 10K^{0.7}L^{0.1})$$

$$C_K = 28 - 7\lambda K^{-0.3}L^{0.1} = 0 \tag{12.16}$$

$$C_L = 10 - \lambda K^{0.7}L^{-0.9} = 0 \tag{12.17}$$

$$C_\lambda = 434 - 10K^{0.7}L^{0.1} = 0 \tag{12.18}$$

整理,并由(12.17)去除(12.16)消去 λ

$$\frac{28}{10} = \frac{7\lambda K^{-0.3}L^{0.1}}{\lambda K^{0.7}L^{-0.9}}$$

$$2.8 = \frac{7L}{K} \qquad K = 2.5L$$

代入(12.18)并使用计算器

$$434 = 10(2.5)^{0.7}L^{0.7}L^{0.1} \qquad 434 = 19L^{0.8}$$

$$\bar{L} = (22.8)^{1/0.8} = (22.8)^{1.25} \approx 50$$

所以 $\bar{K} = 125$ 及 $\bar{\lambda} = 11.5$.

(b) 由 $C_{KK} = 2.1\lambda K^{-1.3}L^{0.1}$, $C_{LL} = 0.9\lambda K^{0.7}L^{-1.9}$和 $C_{KL} = -0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9} = C_{LK}$以及由约束得到的 $g_K = 7K^{-0.3}L^{0.1}$, $g_L = K^{0.7}L^{-0.9}$,有

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 2.1\lambda K^{-1.3}L^{0.1} & -0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9} & 7K^{-0.3}L^{0.1} \\ -0.7\lambda K^{-0.3}L^{-0.9} & 0.9\lambda K^{0.7}L^{-1.9} & K^{0.7}L^{-0.9} \\ 7K^{-0.3}L^{0.1} & K^{0.7}L^{-0.9} & 0 \end{vmatrix}$$

沿第三行展开

$$\begin{aligned}|\bar{H}_2| &= 7K^{-0.3}L^{0.1}(-0.7\lambda K^{0.4}L^{-1.8} - 6.3\lambda K^{0.4}L^{-1.8}) \\ &\quad - K^{0.7}L^{-0.9}(2.1\lambda K^{-0.6}L^{-0.8} + 4.9\lambda K^{-0.6}L^{-0.8}) \\ &= -49\lambda K^{0.1}L^{-1.7} - 7\lambda K^{0.1}L^{-1.7} = -56\lambda K^{0.1}L^{-1.7}\end{aligned}$$

由于 $K, L, \lambda > 0$, $|\bar{H}_2| < 0$; $|\bar{H}|$ 为正定的,所以 C 取得最小值.

(c) 答案与问题 6.41(b)的完全相同,但是注意到当目标函数为线性的,而约束为非线性的时所采用的不同方法.见问题 12.27(c)中所计算的问题 6.41(b)的增广海赛行列式.

12.27 利用增广海赛行列式检验(a) 第 6 章例 7,(b) 问题 6.41(a),(c) 问题 6.41(b)的二阶条件.

解 (a)

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 1 \\ -1 & 24 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|\bar{H}_2| = 1(-1-24) - 1(16+1) = -42$. 由于$|\bar{H}_2| < 0$, $|\bar{H}|$为正定的,则 C 取得最小值.

(b)

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -0.21K^{-1.7}L^{0.5} & 0.15K^{-0.7}L^{-0.5} & 6 \\ 0.15K^{-0.7}L^{-0.5} & -0.25K^{0.3}L^{-1.5} & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\bar{H}_2| &= 6(0.30K^{-0.7}L^{-0.5} + 1.5K^{0.3}L^{-1.5}) - 2(-0.42K^{-1.7}L^{0.5} - 0.9K^{-0.7}L^{-0.5}) \\ &= 9K^{0.3}L^{-1.5} + 3.6K^{-0.7}L^{-0.5} + 0.84K^{-1.7}L^{0.5} > 0\end{aligned}$$

由于$|\bar{H}_2| > 0$, $|\bar{H}|$为正定的,则 Q 取得最大值.

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -2.1K^{-1.3}L^{0.1} & 0.7K^{-0.3}L^{-0.9} & 28 \\ 0.7K^{-0.3}L^{-0.9} & -0.9K^{0.7}L^{-1.9} & 10 \\ 28 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}|\bar{H}_2| &= 28(7K^{-0.3}L^{-0.9} + 25.2K^{0.7}L^{-1.9}) - 10(-21K^{-1.3}L^{0.1} - 19.6K^{-0.3}L^{-0.9}) \\ &= 705.6K^{0.7}L^{-1.9} + 392K^{-0.3}L^{-0.9} + 210K^{-1.3}L^{0.1} > 0\end{aligned}$$

由于$|\bar{H}_2| > 0$, $|\bar{H}|$为负定的,从而 Q 取得最大值.

12.28 利用增广海赛行列式检验问题 5.12(c)的二阶条件,其中求满足约束 $x + y + z = 56$ 的 $4xyz^2$ 的最优值.一阶条件为 $F_x = 4yz^2 - \lambda = 0$, $F_y = 4xz^2 - \lambda = 0$ 及 $F_z = 8xyz - \lambda = 0$;临界值为 $\bar{x} = 14$, $\bar{y} = 14$及 $\bar{z} = 28$.

解 求 F 的二阶偏导数及约束的一阶偏导数,建立增广海赛行列式如下:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ g_z & F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4z^2 & 8yz \\ 1 & 4z^2 & 0 & 8xz \\ 1 & 8yz & 8xz & 8xy \end{vmatrix}$$

从$|\bar{H}_2|$开始,左上角的 3×3 子矩阵

$$|\bar{H}_2| = 0 - 1(-4z^2) + 1(4z^2) = 8z^2 > 0$$

再求$|\bar{H}_3|$的值,这里$|\bar{H}_3| = |\bar{H}|$.沿第一行展开

$$|\bar{H}_3| = 0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 4z^2 & 8yz \\ 1 & 0 & 8xz \\ 1 & 8xz & 8xy \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8yz \\ 1 & 4z^2 & 8xz \\ 1 & 8yz & 8xy \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4z^2 \\ 1 & 4z^2 & 0 \\ 1 & 8yz & 8xz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\bar{H}_3| = & -1[1(0 - 8xz \cdot 8xz) - 4z^2(8xy - 8xz) + 8yz(8yz - 0)] \\ & + 1[1(4z^2 \cdot 8xy - 8yz \cdot 8xz) - 0 + 8yz(8yz - 4z^2)] \\ & - 1[1(4z^2 \cdot 8xz - 0) - 0 + 4z^2(8yz - 4z^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{H}_3| = & -1(-64x^2z^2 - 32xyz^2 + 32xz^3 + 64xyz^2) + 1(32xyz^2 - 64xyz^2 + 64y^2z^2 - 32yz^3) \\ & - 1(32xz^3 + 32yz^3 - 16z^4) \end{aligned}$$

$$|\bar{H}_3| = 16z^4 - 64xz^3 - 64yz^3 - 64xyz^2 + 64x^2z^2 + 64y^2z^2$$

求在 $\bar{x} = 14, \bar{y} = 14, \bar{z} = 28$ 处的值,

$$|\bar{H}_3| = -19\ 668\ 992 < 0$$

由于$|\bar{H}_2| > 0$及$|\bar{H}_3| < 0$,$|\bar{H}|$为负定的,从而函数取得最大值.

投入-产出分析

12.29 已知技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及最终需求向量 $\boldsymbol{B}$ 如下:

$$\begin{array}{c} \text{产出部门} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \ \text{投入部门} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix}$$

求对 1,2 和 3 部门的总需求.

解 ☞ 由(12.3),总需求向量为 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 \\ -0.3 & -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的逆

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.60 \end{bmatrix}$$

代入 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 210.2 \\ 244.7 \\ 294.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 879.50 \\ 1023.85 \\ 1232.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12.30 如果对部门 1,2 和 3 的产品最终需求分别增加 40,20 和 25,求问题 12.29 的总需求水平 $\boldsymbol{X}_2$.

解 ☞

$$\Delta\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\Delta\boldsymbol{B}$$

$$\Delta\boldsymbol{X} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 0.57 & 0.34 & 0.27 \\ 0.41 & 0.58 & 0.32 \\ 0.47 & 0.49 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.239}\begin{bmatrix} 36.35 \\ 36.00 \\ 43.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.09 \\ 150.63 \\ 182.43 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \Delta\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 879.50 \\ 1023.85 \\ 1232.22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 152.09 \\ 150.63 \\ 182.43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1031.59 \\ 1174.48 \\ 1414.65 \end{bmatrix}$$

12.31 已知技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及最终需求向量 $\boldsymbol{B}$ 如下:

$$
\begin{array}{c} \text{产出部门} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \ \text{投入部门} \qquad B = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix}
$$

求对 1,2 和 3 部门的总需求 $\boldsymbol{X}$.

解 ☞

$$X = (I - A)^{-1}B$$

其中

$$
I - A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.3 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}
$$

求逆

$$
(I - A)^{-1} = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}
$$

所以,
$$
X = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 743.24 \\ 756.76 \\ 789.19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

12.32 如果对部门 1,2 和 3 产品的最终需求分别增加了 30,下降了 15 和 35.求问题 12.31 新的总需求 $\boldsymbol{X}_2$.

解 ☞

$$\Delta X = (I - A)^{-1}\Delta B$$

$$
\Delta X = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 0.52 & 0.28 & 0.17 \\ 0.22 & 0.46 & 0.20 \\ 0.24 & 0.30 & 0.42 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ -15 \\ -35 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.222}\begin{bmatrix} 5.45 \\ -7.30 \\ -12.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.55 \\ -32.88 \\ -54.05 \end{bmatrix}
$$

$$
X_2 = X_1 + \Delta X = \begin{bmatrix} 743.24 \\ 756.76 \\ 789.19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24.55 \\ -32.88 \\ -54.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 767.79 \\ 723.88 \\ 735.14 \end{bmatrix}
$$

12.33 下面给出的是部门之间相互关联需求表,单位为百万元.求技术系数矩阵.

原部门	目标部门				最终需求	总需求
	钢	煤	铁	汽车		
钢	80	20	110	230	160	600
煤	200	50	90	120	140	600
铁	220	110	30	40	0	400
汽车	60	140	160	240	400	1000
增值	40	280	10	370		
总产值	600	600	400	1000		

解 ☞ 技术系数 a_{ij}表示生产一单位或一元钱的产品 j 所需投入 i 的单位数或钱数.所以 a_{11}表示一元的钢中钢投入的百分比,a_{21}表示一元的钢中煤投入的百分比,a_{31}表示一元的钢中铁投入的百分比,a_{41}表示一元的钢中汽车的百分比.所以用上表每列底的总产量去除该列中的每个元素,便可得到技术系数矩阵,忽略增加值不计.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{80}{600} & \frac{20}{600} & \frac{110}{400} & \frac{230}{1000}\\ \frac{200}{600} & \frac{50}{600} & \frac{90}{400} & \frac{120}{1000}\\ \frac{220}{600} & \frac{110}{600} & \frac{30}{400} & \frac{40}{1000}\\ \frac{60}{600} & \frac{140}{600} & \frac{160}{400} & \frac{240}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.133 & 0.033 & 0.275 & 0.23\\ 0.333 & 0.083 & 0.225 & 0.12\\ 0.367 & 0.183 & 0.075 & 0.04\\ 0.10 & 0.233 & 0.40 & 0.24\end{bmatrix}$$

12.34 检查问题 12.33 中的技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 ☞ 为检验 $\boldsymbol{A}$,用总需求列向量 $\boldsymbol{X}$ 乘以 $\boldsymbol{A}$,其乘积应该等于中间需求,即总需求 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}$.误差忽略不计.

$$\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}0.133 & 0.033 & 0.275 & 0.23\\ 0.333 & 0.083 & 0.225 & 0.12\\ 0.367 & 0.183 & 0.075 & 0.04\\ 0.10 & 0.233 & 0.40 & 0.24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}600\\600\\400\\1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}439.6\\459.6\\400\\099.4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}600\\600\\400\\1000\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}160\\140\\0\\400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}440\\460\\400\\604\end{bmatrix}$$

12.35 下表为部门之间关联需求表,(a) 求技术系数矩阵.(b) 检验你的答案.

原部门	目标部门			最终需求	总需求
	1	2	3		
1	20	60	10	50	140
2	50	10	80	10	150
3	40	30	20	40	130
增值	30	50	20		
总产值	140	150	130		

解 ☞ (a)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{20}{140} & \frac{60}{150} & \frac{10}{130}\\ \frac{50}{140} & \frac{10}{150} & \frac{80}{130}\\ \frac{40}{140} & \frac{30}{150} & \frac{20}{130}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.143 & 0.4 & 0.077\\ 0.357 & 0.067 & 0.615\\ 0.286 & 0.2 & 0.154\end{bmatrix}$$

(b)

$$\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}0.143 & 0.4 & 0.077\\ 0.357 & 0.067 & 0.615\\ 0.286 & 0.2 & 0.154\end{bmatrix}\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\140\\90\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}50\\10\\00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90\\140\\90\end{bmatrix}$$

12.36 如果每年对部门 1,2 和 3 产品的最终需求分别为 70,25 和 50,求问题 12.35 的新需求总水平.

解 ☞

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.857 & -0.4 & -0.077\\ -0.357 & 0.933 & -0.615\\ -0.286 & -0.2 & 0.846\end{bmatrix}$$

及

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\ 0.478 & 0.703 & 0.555\\ 0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}$$

所以,

$$X=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\0.478 & 0.703 & 0.555\\0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\25\\50\end{bmatrix}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}71.37\\78.79\\63.66\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}201.61\\222.57\\179.83\end{bmatrix}$$

12.37 利用已求得的$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$验证问题 12.35 的系数矩阵,即验证$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$.

解 ☞ $$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}0.666 & 0.354 & 0.318\\0.478 & 0.703 & 0.555\\0.338 & 0.286 & 0.657\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\10\\40\end{bmatrix}=\frac{1}{0.354}\begin{bmatrix}49.56\\53.13\\46.04\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}$$

12.38 假设问题 12.35 中的增值完全由初级投入劳动所构成,在(a) 问题 12.34 及(b) 问题 12.36 中,为获得最终需求,需要多少劳动? (c) 如果经济中劳动可供量为 100,则产出水平可行吗?

解 ☞ (a) 为得到题 12.35 的劳动的技术系数 a_{L_j},用每列的总产值去除增值.所以,$a_{L1}=\frac{30}{140}=0.214$,$a_{L2}=\frac{50}{150}=0.333$ 及 $a_{L3}=\frac{20}{130}=0.154$.由于生产中间产品也必须需要劳动的投入,所以用于满足最终需求的劳动量必须等于技术系数的行乘以总需求的列向量.所以,

$$L_1=[0.214\quad 0.333\quad 0.154]\begin{bmatrix}140\\150\\130\end{bmatrix}=99.93$$

(b)
$$L_2=[0.214\quad 0.333\quad 0.154]\begin{bmatrix}201.61\\222.57\\179.83\end{bmatrix}=144.95$$

(c) 问题 12.35 的最终需求是可行的,因为 99.93<100.而问题 12.36 的最终需求是不可行的,因为社会没有足够的劳动力去生产它.

12.39 检验问题 12.38 的技术系数的准确性.

解 ☞ 在 12.35 题中,由于假设增值完全归功于劳动投入,所以技术系数的验证是很容易的.由于每元的产出完全来自于投入,所以每列的技术系数之和必等于 1.

	1	2	3
1	0.143	0.4	0.077
2	0.357	0.067	0.615
3	0.286	0.2	0.154
增加的价值(劳动)	0.214	0.333	0.154
	1.000	1.000	1.000

特征根,特征向量

12.40 利用特征根来确定矩阵 A 的符号定性:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$$

解 ☞ 为求 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,特征矩阵 $\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}$ 的行列式必等于零,所以,

$$|\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}10-c & 3\\3 & 4-c\end{vmatrix}=0$$

$$40+c^2-14c-9=0\qquad c^2-14c+31=0$$

利用二次公式

$$c=\frac{14\pm\sqrt{196-4(31)}}{2}=\frac{14\pm 8.485}{2}$$

$$c_1=11.2425\qquad c_2=2.7575$$

由于两个特征根均为正,则 $\boldsymbol{A}$ 为正定的.

12.41　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & -6\end{bmatrix}$，重做问题 12.40.

解 ☞

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & -6\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}-4-c & -2\\ -2 & -6-c\end{vmatrix}=0$$

$$24+c^2+10c-4=0 \qquad c^2+10c+20=0$$

$$c=\frac{-10\pm\sqrt{100-4(20)}}{2}=\frac{-10\pm 4.4721}{2}$$

$$c_1=\frac{-5.5279}{2}=-2.764 \qquad c_2=\frac{-14.4721}{2}=-7.236$$

由于两个特征根均为负，则 **A** 为负定的.

12.42　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$重做问题 12.40.

解 ☞

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}6-c & 2\\ 2 & 2-c\end{vmatrix}=0$$

$$12+c^2-8c-4=0 \qquad c^2-8c+8=0$$

$$c=\frac{8\pm\sqrt{64-4(8)}}{2}=\frac{8\pm 5.66}{2}$$

$$c_1=1.17 \qquad c_2=6.83$$

A 为正定的.

12.43　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$重做问题 12.40.

解 ☞

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}4-c & 6 & 3\\ 0 & 2-c & 5\\ 0 & 1 & 3-c\end{vmatrix}=0$$

沿第一列展开，

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=(4-c)[(2-c)(3-c)-5]=0 \tag{12.19}$$

$$-c^3+9c^2-21c+4=0 \tag{12.20}$$

由(12.19)有

$$4-c=0 \quad 或 \quad (2-c)(3-c)-5=0$$

所以，特征根为

$$4-c=0 \qquad (2-c)(3-c)-5=0$$

$$c_1=4 \qquad c^2-5c+1=0$$

$$c=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{5\pm 4.58}{2}$$

$$c_2=4.79 \qquad c_3=0.21$$

由于三个特征根都为正，则 **A** 为正定的.

12.44　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 1 & 0\\ 13 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 9\end{bmatrix}$重做问题 12.40.

解 ☞

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}6-c & 1 & 0\\ 13 & 4-c & 0\\ 5 & 1 & 9-c\end{vmatrix}=0$$

沿第三列展开，

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=(9-c)[(6-c)(4-c)-13]=0 \tag{12.21}$$

$$-c^3+19c^2-101c+99=0 \tag{12.22}$$

由(12.21)

$$9-c=0 \quad 或 \quad (6-c)(4-c)-13=0$$
$$c_1=9 \qquad c^2-10c+11=0$$
$$c=\frac{10\pm\sqrt{100-4(11)}}{2}=\frac{10\pm7.48}{2}$$
$$c_2=8.74 \qquad c_3=1.26$$

由于所有的特征根为正，则 **A** 为正定的．

12.45　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$ 重做问题 12.40.

解 ☞

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}-5-c & 1 & 2\\ 0 & -2-c & 0\\ 4 & 2 & -3-c\end{vmatrix}=0$$

沿第二行展开，

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=(-2-c)[(-5-c)(-3-c)-8]=0$$

所以，

$$-2-c=0 \quad 或 \quad (-5-c)(-3-c)-8=0$$
$$c_1=-2 \qquad c^2+8c+7=0$$
$$(c+7)(c+1)=0$$
$$c_2=-7 \qquad c_3=-1$$

由于所有的特征根为负，则 **A** 为负定的．

12.46　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & -3\end{bmatrix}$ 求(a) 特征根及(b) 特征向量.

解 ☞ (a)

$$|\mathbf{A}-c\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}6-c & 6\\ 6 & -3-c\end{vmatrix}=0$$
$$-18+c^2-3c-36=0$$
$$c^2-3c-54=0$$
$$(c-9)(c+6)=0$$
$$c_1=9 \qquad c_2=-6$$

由于一个特征根为正，另一个为负，则 **A** 为符号不定的．

(b)　利用 $c_1=9$ 求第一个特征向量 $\mathbf{V}_1$，

$$\begin{bmatrix}6-9 & 6\\ 6 & -3-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 6 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$
$$v_1=2v_2$$

标准化

$$(2v_2)^2+v_2^2=1$$
$$5v_2^2=1$$
$$v_2=\sqrt{0.2} \qquad v_1=2v_2=2\sqrt{0.2}$$

所以

$$\mathbf{V}_1=\begin{bmatrix}2\sqrt{0.2}\\ \sqrt{0.2}\end{bmatrix}$$

利用 $c_2=-6$ 求第二个特征向量，

$$\begin{bmatrix}6-(-6) & 6\\ 6 & -3-(-6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0$$
$$v_2=-2v_1$$

规范化

$$v_1^2+(-2v_1)^2=1$$
$$5v_1^2=1$$

$$v_1 = \sqrt{0.2} \qquad v_2 = -2v_1 = -2\sqrt{0.2}$$

所以

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} \\ -2\sqrt{0.2} \end{bmatrix}$$

12.47　已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，重做问题 12.46.

解 ☞ (a)

$$|\boldsymbol{A} - c\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 6-c & 3 \\ 3 & -2-c \end{vmatrix} = 0$$

$$c^2 - 4c - 21 = 0$$

$$c_1 = 7 \qquad c_2 = -3$$

由于 $c_1 > 0$ 及 $c_2 < 0$，$\boldsymbol{A}$ 为符号不定的.

(b)　利用 $c_1 = 7$ 求第一个特征向量，

$$\begin{bmatrix} 6-7 & 3 \\ 3 & -2-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_1 = 3v_2$$

规范化

$$(3v_2)^2 + v_2^2 = 1$$

$$9v_2^2 + v_2^2 = 1$$

$$10v_2^2 = 1$$

$$v_2 = \sqrt{0.1} \quad 及 \quad v_1 = 3v_2 = 3\sqrt{0.1}$$

所以

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{0.1} \\ \sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

利用 $c_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} 6-(-3) & 3 \\ 3 & -2-(-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_2 = -3v_1$$

规范化

$$v_1^2 + (-3v_1)^2 = 1$$

$$10v_1^2 = 1$$

$$v_1 = \sqrt{0.1} \quad 及 \quad v_2 = -3v_1 = -3\sqrt{0.1}$$

所以

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} \\ -3\sqrt{0.1} \end{bmatrix}$$

第十三章 比较静态和凹规划

13.1 比较静态介绍

比较静态分析,即人们熟悉的比较静态,是对模型的内生变量由于外生变量或参数的变化所引起的不同均衡值进行比较.经济学家可以利用比较静态进行估计,例如,可以估计消费者需求对拟定的消费税、关税或补助金的反映程度,投资、政府支出或利率的变化对国民收入的影响,以及在已知气候条件、投入的价格或运输的便利发生变化的情形下,商品的价格如何变化.正如在6.2节中我们已经见到的一样,比较静态分析的主要内容是求解合适的导数.

13.2 含有一个内生变量的比较静态

特殊函数和一般函数均可用于比较静态分析.对于例1具体函数的情形,所要求的导数既可以用显函数也可以用隐函数形式来求.而对于例2一般函数的情形,只能用隐函数一种形式求导数.当独立变量不只一个时(见问题13.2),用类似的方式求偏导数(见问题13.3).

例1 假设一种商品的需求 Q_D 和供给 Q_S 由确定函数给出,用参数表示为

$$Q_D = m - nP + kY \quad m, n, k > 0$$

$$Q_S = a + bP \qquad a, b > 0$$

这里 P = 价格, Y = 消费者收入.均衡条件为

$$Q_D = Q_S$$

代入上面的式子,求解均衡价格水平 P^*,我们可以得到

$$m - nP + kY = a + bP \tag{13.1}$$

$$m - a + kY = (b + n)P$$

$$P^* = \frac{m - a + kY}{b + n} \tag{13.2}$$

现在利用比较静态分析我们可以决定内生变量 P^* 的均衡水平因单个生外变量(Y)或五个参数(a, b, m, n, k)中任何几个的变化而如何变化,比较静态分析只需要求出所要求的导数并判断它的符号.为了衡量均衡价格对收入变化的反应程度,我们从显函数得出(13.2),

$$\frac{dP^*}{dY} = \frac{k}{b + n} > 0 \tag{13.3}$$

这意味着在这个模型中消费者收入的增加将导致商品的均衡价格的增加.如果同问题13.1一样,参数的值是已知的,那么价格变化的具体尺度也可以估计出.

比较静态同样可以很好地应用于隐函数.把13.1的全部移到左边,则 $Q_D - Q_S = 0$,或超额需求等于零,我们可以得到均衡条件的隐函数 F:

$$F = m - nP + kY - a - bP = 0 \tag{13.4}$$

接着,利用隐函数法则(5.10节)求比较静态导数.假设 $F_P \neq 0$,

$$\frac{dP^*}{dY} = -\frac{F_Y}{F_P}$$

从(13.4)可知, $F_Y = k$ 和 $F_P = -(n + b)$.代入并简化,有

$$\frac{dP^*}{dY} = -\frac{k}{-(n + b)} = \frac{k}{b + n} > 0$$

比较静态也可以用来估计任何参数(m, n, k, a, b)的变化对 P^* 的影响,但是由于它们仅描述需求和供给曲线的截距和斜率,因此,它们通常没有什么实际的经济意义.

但是在其他例子中，如收入决定模型(问题 13.3)，参数通常有经济意义，而且存在它们本身的比较静态导数.

例 2 现假定一个一般模型，商品的供求只由一般函数给出：

$$需求 = D(P, Y) \quad D_P < 0, D_Y > 0,$$

$$供给 = S(P) \quad S_P > 0$$

均衡价格水平 P^* 可由需求等于供给时得到：

$$D(P, Y) = S(P)$$

或者等价地，超额需求等于零，

$$D(P, Y) - S(P) = 0 \tag{13.5}$$

这时只能利用隐函数法则求比较静态导数. 假定 $F_P \neq 0$，

$$\frac{dP^*}{dY} = -\frac{F_Y}{F_P}$$

由(13.5)，$F_Y = D_Y$ 和 $F_P = D_P - S_P$. 代入，

$$\frac{dP^*}{dY} = -\frac{D_Y}{D_P - S_P}$$

根据供给定律，我们总是期望 $S_P > 0$. 如果商品是正常商品，那么 $D_Y > 0$ 且 $D_P < 0$. 代入上式，在正常商品情况下有

$$\frac{dP^*}{dY} = -\frac{(+)}{(-)-(+)} > 0$$

如果商品是劣质品但不是吉芬商品，那么 $D_Y \leqslant 0$ 且 $D_P < 0$，因此 $dP^*/dY \leqslant 0$；如果商品是吉芬商品，那么 $D_Y < 0$ 和 $D_P > 0$，导数的符号不定，取决于分母的符号. 见问题 13.1～13.7.

13.3 含有多于一个内生变量的比较静态

在含有多个内生变量的模型中，比较静态要求每一个内生变量都有惟一的均衡条件成立. 有 n 个内生变量的系统一定有 n 个均衡条件. 要想度量某个外生变量对任何或所有内生变量的影响，首先求出每个均衡条件关于该外生变量的全导数，再联立求出所要求的偏导数. 如果函数有连续导数，且由所有函数的关于外生变量的偏导数组成的雅可比行列式不为零，则由隐函数定理：内生变量的最优值可以表示为外生变量的函数，见问题 13.8，而且比较静态导数可由克莱姆法则求得，见下面的例 3. 在例 4 中，以典型的经济问题为例对该方法进行了说明.

例 3 为了表示的简化，假定模型只有两个内生变量和两个外生变量，且为隐式广义函数，在函数中先列内生变量，再列外生变量，用分号把前者和后者分开. 模型可以很容易扩展到任意多个局内变量(n)和任何多个局外变量(m)，这里 n 不必等于 m.

$$F^1(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0$$

$$F^2(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0$$

为求得系统关于独立变量 x_1 的比较静态偏导数，我们必须首先求出两个函数关于 x_1 的全导数.

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F^1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F^2}{\partial x_1} = 0$$

用短横表示均衡值，代入、整理并用矩阵记号表示为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y_2} \\[2ex] \dfrac{\partial F^2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{y}_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial x_1} \\[2ex] -\dfrac{\partial F^2}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

$$JX = B$$

假设所有函数有连续一阶和二阶导数，而且所有函数(F^i)的关于所有内生变量(y_i)的由全部一阶偏微分构成的雅可比行列式$|J|$不等于零，

$$|J| = \frac{\partial F^1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^1}{\partial y_2} \neq 0,$$

利用克莱姆法则求解比较静态关于 x 的.特别地，假定$|J|\neq 0$，

$$\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_1} = \frac{|J_i|}{|J|} \tag{13.6}$$

因此，为了求解一阶微分，$\partial \bar{y}_1/\partial x_1$，我们用向量 B 替换J 的第一列，构造一个新矩阵J_1，然后代入上式(13.6)

$$\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_1} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F^1}{\partial y_2}\right)}{\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^1}{\partial y_2}}$$

同样地，

$$\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial x_1} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^2}{\partial x_1} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\right)}{\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F^1}{\partial y_2}}$$

用类似方法，可以得到关于 x_2 的偏导数. 见问题 13.9.

例 4　假设商品服务市场(IS 曲线)和货币市场(LM 曲线)的均衡分别由下面式子给出

$$F^1(Y,i;C_0,M_0,P) = Y - C_0 - C(Y,i) = 0 \qquad 0 < C_Y < 1, C_i < 0 \tag{13.7}$$

$$F^2(Y,i;C_0,M_0,P) = L(Y,i) - M_0/P = 0 \qquad L_Y > 0, L_i < 0 \tag{13.8}$$

这里，$L(Y,i)$ = 货币需求，M_0 = 货币供给，C_0 = 自控消费，P = 价格水平，它使 M_0/P 成为货币实际供给而不是名义供给. 为了简化，让 P 保持不变. C_0 的变化对 Y 和 i 的均衡水平的影响用比较静态说明如下：

(a)　求出均衡条件(13.7)、(13.8)关于所需的外生变量的导数，这里的外生变量是 C_0

$$\frac{\partial Y}{\partial C_0} - 1 - \left(C_Y\cdot\frac{\partial Y}{\partial C_0}\right) - \left(C_i\cdot\frac{\partial i}{\partial C_0}\right) = 0$$

$$\left(L_Y\cdot\frac{\partial Y}{\partial C_0}\right) + \left(L_i\cdot\frac{\partial i}{\partial C_0}\right) = 0$$

(b)　整理并用矩阵的形式表示

$$\begin{bmatrix} 1 - C_Y & -C_i \\ L_Y & L_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial C_0} \\ \frac{\partial \bar{i}}{\partial C_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$JX = B$$

(c)　接着，检验以确定雅可比行列式$|J|\neq 0$，使隐函数定理成立.

$$|J| = (1 - C_Y)L_i + C_iL_Y$$

应用符号，$$|\boldsymbol{J}| = (+)(-)+(-)(+) = (-) < 0$$
因此，$|\boldsymbol{J}| \neq 0$.

(d) 通过用向量 $\boldsymbol{B}$ 替换矩阵$\boldsymbol{J}$ 的第 1 列来构造一个新的矩阵$|\boldsymbol{J}_1|$，并代入(13.6)来求解一阶偏微分，$\partial \overline{Y}/\partial C_0$.

$$|\boldsymbol{J}_1| = \begin{vmatrix} 1 & -C_i \\ 0 & L_i \end{vmatrix} = L_i$$

因此，

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial C_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{L_i}{(1-C_Y)L_i + C_i L_Y} = \frac{(-)}{(-)} > 0$$

自控消费 C_0 的增加将导致收入的均衡水平的增加.

(e) 通过用向量 $\boldsymbol{B}$ 替代$\boldsymbol{J}$ 的第二列构造$|\boldsymbol{J}_2|$，并代入(13.6)，求解第二个偏微分 $\partial \bar{i}/\partial C_0$.

$$|\boldsymbol{J}_2| = \begin{vmatrix} 1-C_Y & 1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix} = -L_Y$$

和

$$\frac{\partial \bar{i}}{\partial C_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{-L_Y}{(1-C_Y)L_i + C_i L_Y} = \frac{-(+)}{(-)} > 0$$

C_0 的增加也将导致利率的均衡水平的增加. M_0 的改变对 $\overline{Y}$ 和 $\bar{i}$ 影响在问题 13.10 中已得到解决，也可见问题 13.8～13.18.

13.4 优化问题的比较静态

经济学家除了关注模型的外生变量对均值的影响外，还经常对外生变量对优化问题的最优值的影响感兴趣。由于初始最优值是由一阶条件得到的，所以只要将比较静态技术应用到一阶条件上就能办到。而一阶条件是由一阶导数构成，可见优化问题的比较静态与二阶导数和海赛行列式有密切关系。该方法将在下面的例 5 中论及。

例 5 一个价格接受的公司有严格凹的生产函数 $Q(K,L)$. 给定 P = 产品价格，r = 资本的租用率，w = 工资，它的利润函数是

$$\pi = PQ(K,L) - rK - wL$$

为了得到一阶优化条件，如果我们求导数$\partial\pi/\partial K$ 和$\partial\pi/\partial L$，并把它们表示为隐函数，有

$$F^1(K,L;r,w,P) = PQ_K(\overline{K},\overline{L}) - r = 0$$
$$F^2(K,L;r,w,P) = PQ_L(\overline{K},\overline{L}) - w = 0$$

这里，把一阶导数 Q_K 和 Q_L 赋值为利润函数的最优值. 通过这些一阶条件，我们可以利用如下的比较静态决定外生变量(r,w)的变化对内生变量$(\overline{K},\overline{L})$的最优值的影响：

(a) 求出全微分一阶条件的关于任意一个外生变量的并写成大家所熟悉的矩阵形式首先研究资本的租用率 r 对内生变量的影响并注意到一阶导数 Q_K 和 Q_L 都是K 和 L 的函数，有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial K} & \dfrac{\partial F^1}{\partial L} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial K} & \dfrac{\partial F^2}{\partial L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overline{K}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \overline{L}}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial r} \end{bmatrix}$$

或特殊地，

$$\begin{bmatrix} PQ_{KK} & PQ_{KL} \\ PQ_{LK} & PQ_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overline{K}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \overline{L}}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$JX = B$$
$$|J| = P^2(Q_{KK}Q_{LL} - Q_{LK}Q_{KL})$$

设二阶充分条件满足，即 $Q_{KK}Q_{LL} - Q_{LK}Q_{KL} > 0$，那么 $|J| > 0$. 这里我们注意到当从一阶优化条件的一阶微分求比较静态导数时，有 $|J| = |H|$，为了优化一个(2×2)系统，我们也要求 $|H| > 0$.

(b) 因为 $|J| = |H| \neq 0$，且假定一阶和二阶微分连续，则隐函数原理条件成立，且我们可以利用克莱姆法则来求得所有的导数.

$$\frac{\partial\overline{K}}{\partial r} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & PQ_{KL} \\ 0 & PQ_{LL} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{PQ_{LL}}{P^2(Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}Q_{LK})} < 0$$

这里，$\partial\overline{K}/\partial r < 0$，因为我们假定生产函数是严格凹的，意味着在整个定义域都有 $Q_{LL} < 0$，$Q_{KK} < 0$ 和 $Q_{KK}Q_{LL} > Q_{KL}Q_{LK}$，我们也从微观原理知道追求利润最大化的公司仅在成本的边际投入生产率下降处进行生产. 因此在生产的最优水平点，$Q_{LL} < 0$ 和 $Q_{KK} < 0$. 同样地，我们会发现

$$\frac{\partial\overline{L}}{\partial r} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} PQ_{KK} & 1 \\ PQ_{LK} & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-PQ_{LK}}{P^2(Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}Q_{LK})}$$

为了确定这个静态微分的符号，需要知道交叉偏微分 Q_{LK} 的符号，它表示资本变化对劳动力 Q_L 的边际生产率的影响. 如果假定它是正的，则分子的符号是负的. 所以，利率的增加将导致劳动力使用的下降，至于工资 w 变化对 $\overline{K}, \overline{L}$ 的影响，见问题 13.19，也可见问题 13.20～13.24.

13.5 比较静态在约束最优化中的应用

比较静态分析也可应用于约束最优化问题. 在约束最优化中，拉格朗日乘子是一个内生变量，而且在比较静态分析中，它被赋值为它的最优值($\bar{\lambda}$). 如果二阶充分条件满足，加边海赛行列式 $|\overline{H}|$ 可以是正的或负的，它取决于优化的类型，但是，它不会等于零. 因为 $|J| = |\overline{H}|$，如果 $|\overline{H}| \neq 0$，则雅可比矩阵不等于零，见例 6. 当 $|J| \neq 0$，并假定一阶和二阶导数连续，我们从隐函数定理可知内生变量的最优值可表示为外生变量的隐函数，而且所要求的比较静态导数可通过克莱姆法则得到. 例 6 提供了例证.

例 6 假设一个公司处于完全竞争的要素市场和产品市场，追求产出 $q(K, L)$ 最大化. 产出满足给定的预算约束条件

$$rK + wL = B$$

的拉格朗日函数是

$$Q = q(K, L) + \lambda(B - rK - wL)$$

且代表一阶条件的三个一阶微分($\partial Q/\partial K$, $\partial Q/\partial L$, $\partial Q/\partial\lambda$)可表示为如下隐函数：

$$F^1(\overline{K}, \overline{L}, \bar{\lambda}; r, w, B) = Q_K(\overline{K}, \overline{L}) - r\bar{\lambda} = 0$$
$$F^2(\overline{K}, \overline{L}, \bar{\lambda}; r, w, B) = Q_L(\overline{K}, \overline{L}) - w\bar{\lambda} = 0$$
$$F^3(\overline{K}, \overline{L}, \bar{\lambda}; r, w, B) = B - r\overline{K} - w\overline{L} = 0$$

并假定微分连续且满足二阶充分条件，从这些约束最优化的一阶条件中，我们可以用比较静态确定任何外生变量(r, w, B)的变化对三个内生变量($\overline{K}, L, \bar{\lambda}$)最优值的影响.

为了找到预算 B 对内生变量的最优值的影响，我们需求出三个函数关于 B 的导数.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial \bar{K}} & \frac{\partial F^1}{\partial \bar{L}} & \frac{\partial F^1}{\partial \bar{\lambda}} \\ \frac{\partial F^2}{\partial \bar{K}} & \frac{\partial F^2}{\partial \bar{L}} & \frac{\partial F^2}{\partial \bar{\lambda}} \\ \frac{\partial F^3}{\partial \bar{K}} & \frac{\partial F^3}{\partial \bar{L}} & \frac{\partial F^3}{\partial \bar{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{K}}{\partial B} \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial B} \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial B} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial B} \\ -\frac{\partial F^3}{\partial B} \end{bmatrix}$$

或特殊地,

$$\begin{bmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} & -r \\ Q_{LK} & Q_{LL} & -w \\ -r & -w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{K}}{\partial B} \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial B} \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{J}| = Q_{KK}(-w^2) - Q_{KL}(-rw) - r(rQ_{LL} - wQ_{LK})$$

$$|\boldsymbol{J}| = -w^2 Q_{KK} + rwQ_{KL} - r^2 Q_{LL} + rwQ_{LK} > 0$$

因为$|\boldsymbol{J}| = |\bar{\boldsymbol{H}}|$(第12.5节),如果满足二阶充分条件,那么对约束最优化来说,$|\bar{\boldsymbol{H}}|>0$.因为处于完全竞争环境中,利润最大化公司仅在投入的边际生产率下降($Q_{KK}, Q_{LL}<0$)的范围进行生产.所以,只要K和L是互补的($Q_{KL}, Q_{LK}>0$),则二阶条件满足,如果K和L是替代的($Q_{KL}, Q_{LK}<0$),则二阶条件是否满足,取决于直接偏微分和交叉偏微分的相对强度.

由于$|\boldsymbol{J}| = |\bar{\boldsymbol{H}}| \neq 0$,并假设一阶和二阶微分连续,则我们可以使用克莱姆法则来求所要求的导数,

1. $$\frac{\partial \bar{K}}{\partial B} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Q_{KL} & -r \\ 0 & Q_{LL} & -w \\ -1 & -w & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{wQ_{KL} - rQ_{LL}}{|\boldsymbol{J}|}$$

当K和L互补时$\partial \bar{K}/\partial B>0$,当$K$和$L$可替代时,它的符号不确定.

2. $$\frac{\partial \bar{L}}{\partial B} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} Q_{KK} & 0 & -r \\ Q_{LK} & 0 & -w \\ -r & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{rQ_{LK} - wQ_{KK}}{|\boldsymbol{J}|}$$

当K和L互补时,$\partial \bar{L}/\partial B>0$,当$K$和$L$可替代时,它的符号不确定.

3. $$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial B} = \frac{|\boldsymbol{J}_3|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} & 0 \\ Q_{LK} & Q_{LL} & 0 \\ -r & -w & -1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{-1(Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}Q_{LK})}{|\boldsymbol{J}|}$$

$\partial \bar{\lambda}/\partial B$不确定.也可见问题13.25~13.29.

13.6　包络定理

利用包络定理我们可以仅通过求出拉格朗日函数关于所要研究的外生变量的导数并在最优解处赋值,就可以度量任何该外生变量的变化对目标函数的最优值的影响.它的合理性在例7中阐明,并在例8中给出证明."拉格朗日乘子近似等于约束常数微小的变化对目标函数最优值的边际效应"(5.6节),包络定理也为这个前面已提到过的描述提供了合理的解释。包络定理对凹规划的后继工作的一个重要启示为:如果在函数最优点处,$\bar{\lambda}=0$,则约束一定是松弛的;反之,如果约束是松弛的,则有$\bar{\lambda}=0$.

例7

$$\max z(x, y; a, b)$$

满足

$$f(x, y; a, b)$$

拉格朗日函数是

$$Z(x, y, \lambda; a, b) = z(x, y; a, b) + \lambda f(x, y; a, b)$$

一阶条件是

$$Z_x = z_x(\bar{x}, \bar{y}; a, b) + \bar{\lambda} f_x(\bar{x}, \bar{y}; a, b) = 0$$
$$Z_y = z_y(\bar{x}, \bar{y}; a, b) + \bar{\lambda} f_y(\bar{x}, \bar{y}; a, b) = 0$$
$$Z_\lambda = f(\bar{x}, \bar{y}; a, b) = 0$$

如果我们假定所有的函数一阶和二阶导数连续并假设

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} z_{xx} + \bar{\lambda} f_{xx} & z_{xy} + \bar{\lambda} f_{xy} & f_x \\ z_{yx} + \bar{\lambda} f_{yx} & z_{yy} + \bar{\lambda} f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

我们从隐函数定理知道可以把内生变量的最优值表示为外生变量的函数.

$$Z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}; a, b) = z[\bar{x}(a, b), \bar{y}(a, b); a, b] + \bar{\lambda}(a, b) f[\bar{x}(a, b), \bar{y}(a, b); a, b]$$

当目标函数被赋值为最优值时称为**间接目标函数**.

$$\bar{z}(a, b) \equiv z[\bar{x}(a, b), \bar{y}(a, b); a, b] \equiv z(a, b)$$

包络定理:间接目标函数关于任何外生变量,记为 b,的偏导数等于拉格朗日函数关于同一外生变量的偏导数.即

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial b} = \frac{\partial Z}{\partial b}$$

为了证明包络定理,只须上式成立.

使用链法则求出间接目标函数的导数,并在最优解处赋值,有

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial b} = z_x \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} + z_y \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} + z_b$$

接着,代入由前两个一阶条件得到的 $z_x = -\bar{\lambda} f_x$, $z_y = -\bar{\lambda} f_y$,

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial b} = -\bar{\lambda}\left(f_x \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} + f_y \frac{\partial \bar{y}}{\partial b}\right) + z_b \tag{13.9}$$

又由第三个一阶条件,我们有

$$f[\bar{x}(a, b), \bar{y}(a, b), a, b] \equiv 0$$

求出关于 b 的导数并整理,

$$f_x \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} + f_y \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} = -f_b$$

然后把 $-f_b$ 代入(13.9)并整理,

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial b} = (z_b + \bar{\lambda} f_b) = \frac{\partial Z}{\partial b} \qquad \text{Q.E.D.}$$

拉格朗日函数关于某个外生变量的导数在最优解处的值就是该外生变量对目标函数最优值的影响程度的可靠度量.

例 8　假设一满足预算约束的有效的最大化问题:

$$\max u(x, y) \quad \text{满足} \quad p_x x + p_y y = B$$

如果一阶和二阶导数连续,由一阶条件的内生变量的导数构成的雅可比行列式不等于零(或不渐近于零),那么拉格朗日函数可以写为

$$U(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}; p_x, p_y, B) = u(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda}(B - p_x \bar{x} - p_y \bar{y})$$

间接目标函数是

$$V(\bar{x}, \bar{y}; p_x, p_y, B) = u[\bar{x}(p_x, p_y, B), \bar{y}(p_x, p_y, B)]$$

于是利用包络定理估计三个外生变量的任何一个的变化对目标函数的最优值的影响,

有

(a)
$$\frac{\partial V}{\partial p_x}=\frac{\partial U}{\partial p_x}=-\bar{\lambda}\bar{x}$$

(b)
$$\frac{\partial V}{\partial p_y}=\frac{\partial U}{\partial p_y}=-\bar{\lambda}\bar{y}$$

(c)
$$\frac{\partial V}{\partial B}=\frac{\partial U}{\partial B}=\bar{\lambda}$$

在(c)中,$\bar{\lambda}$ 可以称为**货币的边际效用**,即消费者由他或她的预算或收入的微小变化得到的额外效用.注意到预算约束(B)仅在约束中出现,该导数很容易从拉格朗日函数中得到,在(a)和(b)中,假设从(c)得来的收入的边际效用是正的,当效用最大时商品价格的变化对效用有负影响,且影响程度以该种商品的消费量为权数,由于价格只出现在约束中,导数也很容易从拉格朗日函数中得到.见问题 13.30~13.32.

13.7　凹规划和不等式约束

到目前为止我们所见的约束优化的经典模型中,约束总是严格等式.但是,在形如个人想在花费**不超过** x 时效用最大化,或商人在生产**不低于** x 单位产品时花费最小的经济问题中,总是要求弱的不等式约束.之所以称这类非线性规划为凹规划,是因为其目标函数和约束函数均为凹的,但是凸函数决不排除在外,因为凸函数的负面就是凹函数.凹规划的最大化问题为标准形式,最小化问题,可以通过最大化负的函数来转化.

给定一个满足不同凹目标函数和约束函数的不等式约束的最优化问题,

$$\max f(x_1,x_2)\quad 满足\quad g(x_1,x_2)\geqslant 0\qquad x_1,x_2\geqslant 0$$

而且,相应的拉格朗日函数是

$$F(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$$

最优化的一阶充分和必要条件,称为库恩-塔克条件,是

1. (a) $\frac{\partial F}{\partial x_i}=f_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\bar{\lambda}g_i(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\leqslant 0$

   (b) $x_i\geqslant 0$

   (c) $x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2$

2. (a) $\frac{\partial F}{\partial \lambda}=g(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\geqslant 0$

   (b) $\bar{\lambda}\geqslant 0$

   (c) $\bar{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$

这里,(c)中的条件称为**补充松散条件**,表示 $\bar{\lambda}$ 和 $f'(\bar{x})$ 不能同时非零.因为一个线性函数是凹的也是凸的,尽管不是严格凹的或严格凸的,满足库恩-塔克条件的线性函数组成的凹规划问题将永远满足最大化的必要充分条件.

注　(1) 当条件 2(a)要求拉格朗日函数关于 λ **最小化**时,条件 1(a)则要求拉格朗日函数关于 x_1 和 x_2 **最大化**.这意味着凹规划旨在寻找拉格朗日函数的一个鞍点,来优化满足不等式约束的目标函数.

(2) 凹规划中的约束永远表示为大于或等于零.当等式成立时,变量减常数(一般在等式左边)或常数减变量没什么不同,但在凹规划中,减法顺序是甚为重要的.见问题(13.33).

三个一组条件(a)~(c)的合理性可在例 9 中见到,例 10 提供了一个基本的最大化方法的演示.对于最小化,见问题 13.34.对于多约束,见问题 13.39.对于其他应用,见问题 13.33~13.42.

例 9　考虑一个单变量函数,我们寻求它在第一象限的一个局部最大值,这里 $x\geqslant 0$.可能有三种情形,每一种有稍微不同的条件,见图 13-1.

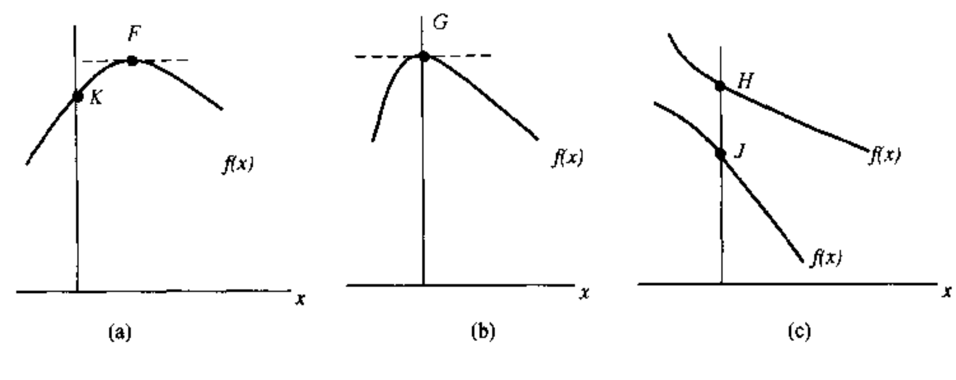


图 13-1

(a)　求 F 点的最大值,得到一个内部解

$$f'(x)=0 \qquad 且 \qquad x>0$$

(b)　求 G 点的最大值,得到一个边界解

$$f'(x)=0 \qquad 且 \qquad x=0$$

(c)　求 H 或 J 的最大值,均得到边界解

$$f'(x)<0 \qquad 且 \qquad x=0$$

然而,在第一象限求最大值的所有情况,可以用更简洁地形式加以总结,即

$$f'(x)\leqslant 0 \qquad x\geqslant 0 \qquad 且 \qquad xf'(x)=0$$

这是我们熟知的库恩-塔克条件.注意到,该条件自动排除掉了不是最大值的点,如(a)中的 K 点,因为 $f'(K)>0$.

例 10　一个消费者想在**不超过**预期预算的前提下使效用达到最大,他面临下面的凹规划问题,

$$\max u(x,y) \quad 满足 \quad B-p_x x-p_y y\geqslant 0 \qquad x,y\geqslant 0$$

拉格朗日函数为

$$U=u(x,y)+\lambda(B-p_x x-p_y y)$$

利用库恩-塔克条件,使拉格朗日函数首先关于选择变量 x 和 y 最大化,检验相关条件.

1. (a)　$\dfrac{\partial U}{\partial x}=u_x-\bar{\lambda}p_x\leqslant 0 \qquad \dfrac{\partial U}{\partial y}=u_y-\bar{\lambda}p_y\leqslant 0$

　(b)　$\bar{x}\geqslant 0 \qquad \bar{y}\geqslant 0$

　(c)　$\bar{x}(u_x-\bar{\lambda}p_x)=0 \qquad \bar{y}(u_y-\bar{\lambda}p_y)=0$

　接着对拉格朗日函数关于约束变量 λ **最小化**,并检验相关条件.

2. (a)　$\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}=B-p_x\bar{x}-p_y\bar{y}\geqslant 0$

　(b)　$\bar{\lambda}\geqslant 0$

　(c)　$\bar{\lambda}(B-p_x\bar{x}-p_y\bar{y})=0$

　这样可得到三个非平凡解:(a)　$\bar{x},\bar{y}>0$,(b)　$\bar{x}=0,\bar{y}>0$ 和(c)　$\bar{x}>0,\bar{y}=0$.下面处理前两种,第三种作为个人练习.

(a)　第一种情形.如果 $\bar{x},\bar{y}>0$,那么从 1(c),

$$u_x-\bar{\lambda}p_x=0 \qquad u_y-\bar{\lambda}p_y=0$$

因此,

$$\bar{\lambda}=\frac{u_x}{p_x} \qquad \bar{\lambda}=\frac{u_y}{p_y} \tag{13.10}$$

又因为 $p_x,p_y>0$,并假设消费者永不满足,即 $u_x,u_y>0$,

$$\bar{\lambda}>0$$

如果 $\bar{\lambda}$，那么由 2(c)，

$$B - p_x\bar{x} - p_y\bar{y} = 0$$

预算约束为严格等式，而不是弱不等式.这意味着最优点，$\bar{x}$，$\bar{y}$ 将位于预算线上方而不是它的下方.

通过重新构造(13.10)，可成为

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

当 $\bar{x}$，$\bar{y}>0$ 成立时 u_x/u_y = 无差异曲线的斜率，p_x/p_y = 预算线的斜率，则无差异曲线将在最优点与预算线相切，而且将得到一个内部解.当预算约束函数是严格等式时，即第一种情形，此时 $\bar{x}$，$\bar{y}>0$，实际上等价于古典约束最优化问题，见图13-2(a).

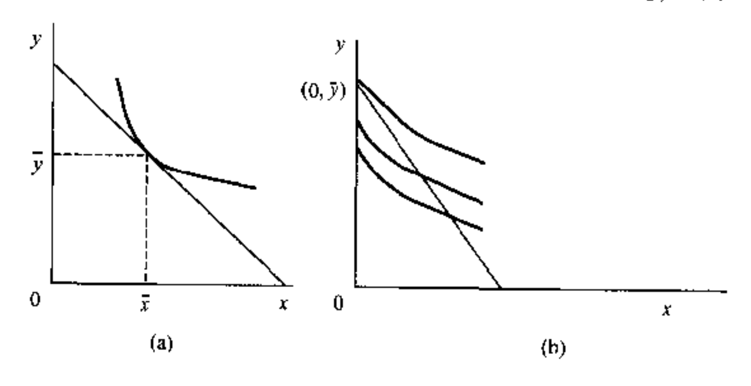


图 13-2

(b) 第二种情形.如果 $\bar{x}=0$，$\bar{y}>0$，那么从 1(c)，

$$u_x - \bar{\lambda}p_x \leqslant 0 \qquad u_y - \bar{\lambda}p_y = 0$$

和

$$\frac{u_x}{p_x} \leqslant \bar{\lambda} \qquad \bar{\lambda} = \frac{u_y}{p_y} \tag{13.11}$$

假定 $p_x, p_y, u_x, u_y>0$，那么 $\bar{\lambda}$.因此从 2(c)知，预算约束是严格等式，而不是弱不等式，即使只有一个变量大于零，而其他等式等于零.这意味着最优点 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 再次位于预算线上方，而不是位于它的下方.

用(13.11)左边不等式中 $\bar{\lambda}$ 替代(13.11)式右边等式的 $\bar{\lambda}=u_y/p_y$，有

$$\frac{u_x}{p_x} \leqslant \frac{u_y}{p_y} \quad 或 \quad \frac{u_x}{u_y} \leqslant \frac{p_x}{p_y}$$

这意味着沿着预算线，无差异曲线处处比预算线平坦，导致在左上方有一个隅角解，见图13-2(b).在隅角解处，与预算线刚好相触的最高无差异曲线较预算线平坦或者一样.

习 题 解 答

只含一个外生变量的比较静态

13.1 例 1 给出模型如下

$$Q_D = m - nP + kY \qquad (m, n, k > 0)$$

$$Q_S = a + bP \qquad (a, b > 0)$$

且假设我们收入的实际值和参数是

$$Y = 100, m = 60, n = 2, k = 0.1, a = 10, \quad 且 \quad b = 0.5$$

(a) 求均衡价格和均衡量，(b) 利用比较静态估计 $1 的收入改变对均衡价格的影响，(c) 通过估计均衡价格以验证比较静态分析的结论.

解 ☞ (a)

$$Q_D = Q_S$$
$$60 - 2P + 0.1(100) = 10 + 0.5P$$
$$-2.5P = -60$$
$$P^* = 24 \qquad Q^* = 22$$

(b) 从(13.3)

$$\frac{dP^*}{dY} = \frac{k}{b+n} > 0$$

代入 $k=0.1, b=0.5, n=2$,

$$\frac{dP^*}{dY} = \frac{0.1}{0.5+2} = 0.04$$

增加\$1的收入会引起商品均衡价格增加4¢.

(c) 重新估计 $Y=101$ 时的均衡价格,

$$60 - 2P + 0.1(101) = 10 + 0.5P$$
$$-2.5P = -60.1$$
$$P^* = 24.04 \qquad \text{Q.E.D.}$$

13.2 假设

$$Q_D = m - nP - cP_c + sP_s \quad (m, n, c, s > 0)$$
$$Q_S = a + bP - iP_i \qquad (a, b, i > 0)$$

这里 P=商品价格,P_c=互补品价格,P_s=替代品价格,P_i=投入要素价格.(a) 找到均衡价格 P^*.(b) 求由 P_c 和 P_i 的变化引起的比较静态导数.(c) 找到关于均衡条件的隐函数和(d) 从它导出关于 P_s 变化的比较静态导数.

解 ☞ (a) 均衡条件是

$$m - nP - cP_c + sP_s = a + bP - iP_i \tag{13.12}$$
$$m - a - cP_c + sP_s + iP_i = (b+n)P$$
$$P^* = \frac{m - a - cP_c + sP_s + iP_i}{b+n}$$

(b) 只要当独立变量不只一个时,我们必须依据保证其他独立变量不变的偏导数进行研究.

$$\frac{\partial P^*}{\partial P_c} = \frac{-c}{b-n} \qquad \frac{\partial P^*}{\partial P_i} = \frac{i}{b+n}$$

(c) 从(13.12)得

$$m - nP - cP_c + sP_s - a - bP + iP_i = 0$$

(d)
$$\frac{\partial P^*}{\partial P_s} = -\frac{F_{P_s}}{F_P} = \frac{s}{b+n}$$

13.3 假设一个两部门收入决定模型,这里,消费依赖于收入,投资是自控的,因此

$$C = bY, I = I_0, 0 < b < 1$$

当 $Y=C+I$ 时,产生均衡.(a) 求出收入水平 Y^* 的显示表达式.(b) 利用比较静态估计自控投资 I_0 的改变对 Y^* 的影响.(c) 从隐函数找到同样的比较静态导数.(d) 显示地评估边际消费倾向 b 的变化对 Y^* 的影响.(e) 隐式地评估边际消费倾向 b 的变化对 Y^* 的影响.

解 ☞ (a)
$$Y = C + I$$

代入

$$Y = bY + I_0 \tag{13.13}$$
$$Y - bY = I_0$$
$$Y^* = \frac{I_0}{1-b} \tag{13.14}$$

(b) 自控投资 I_0 的变化对 Y^* 的影响是

$$\frac{dY^*}{dI_0} = \frac{1}{1-b} > 0$$

因为 $0<b<1$

(c) 把(13.13)式都移到左边，我们得到隐函数

$$Y - bY - I_0 = 0 \tag{13.15}$$

在通常假定下根据隐函数法则

$$\frac{dY^*}{dI_0} = -\frac{F_{I_0}}{F_Y}$$

这是 $F_{I_0} = -1$ 和 $F_Y = 1-b$. 因此，

$$\frac{dY^*}{dI_0} = -\frac{-1}{1-b} = \frac{1}{1-b} > 0$$

(d) 如果把对边际消费的倾向 b 看成是一个外生变量，而不是一个参数，我们有一个个独立变量的函数，而且必须求出偏导数保证 I_0 为常数. 首先，应用商的法则于(13.14)式的显函数.

$$\frac{\partial Y^*}{\partial b} = \frac{I_0}{(1-b)^2}$$

把(13.14)代入，这里 $Y^* = I_0/(1-b)$，有

$$\frac{\partial Y^*}{\partial b} = \frac{Y^*}{(1-b)}$$

(e) 进一步，把隐函数法则用于(13.15)式，当在 Y^* 点处赋值时，

$$\frac{\partial Y^*}{\partial b} = -\frac{F_b}{F_Y} = \frac{Y^*}{1-b}$$

隐函数方法尽管开始时好像很困难，但从长远角度来说，隐函数方法通常使用起来快而易. 见问题 13.5 和 13.6.

13.4 一完全垄断者的总收入和总成本函数如下：

$$\mathrm{TR} = mQ - nQ^2, \mathrm{TC} = kQ \qquad (m, n, k > 0)$$

分别从(a)显函数，(b)隐函数出发考察单位税 t 对其利润最大产出水平的影响

解 ☞ (a) 单个物品的利润 π 是

$$\pi = mQ - nQ^2 - kQ - tQ$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = m - 2nQ - k - t = 0 \tag{13.16}$$

$$Q^* = \frac{m-k-t}{2n} \qquad \text{利润最大化的产出水平}$$

于是，从上面的显函数，比较静态微分估计每单位税 t 的变化对 Q^* 的影响是

$$\frac{dQ^*}{dt} = -\frac{1}{2n} < 0$$

(b) 从(13.16)，最优条件的隐函数是

$$m - 2nQ^* - k - t = 0$$

通过隐函数法则

$$\frac{dQ^*}{dt} = -\frac{F_t}{F_{Q^*}} = -\frac{1}{2n} < 0$$

13.5 假定一个两部门收入决定模型，用一般函数表示为

$$C = C(Y), I = I_0$$

当 $Y = C + I$ 时达到均衡. (a) 决定收入 Y^* 的均衡水平 Y^* 的隐函数. (b) 估计自控投资 I_0 的变化对 Y^* 的影响.

解 ☞ (a)

$$Y - C(Y^*) - I_0 = 0$$

(b)

$$\frac{dY^*}{dI_0} = -\frac{F_{I_0}}{F_{Y^*}} = \frac{1}{1-C_{Y^*}}$$

13.6 在问题 6.4 的模型中，由模型得到的均衡条件和收入均衡水平 $\bar{Y}$ 的显函数分别是

$$Y = C_0 + bY - bT_0 - btY + I_0 + G_0 \tag{13.17}$$

和

$$\bar{Y} = \frac{1}{1 - b + bt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0)$$

我们也发现，相当简化以后，对于税率 t 的变化对收入均衡水平 $\bar{Y}$ 的影响的比较静态导数是

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = \frac{-b\bar{Y}}{1 - b + bt}$$

(a) 找到(13.17)中均衡条件的隐函数，(b) 为了使自己相信用隐函数进行研究的方便，从它导出相同的偏导数 $\partial \bar{Y}/\partial t$.

解 ☞ (a) 从(13.17)知，均衡条件的隐函数是

$$\bar{Y} - C_0 - b\bar{Y} + bT_0 + bt\bar{Y} - I_0 - G_0 = 0$$

(b) 从隐函数法则，

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = -\frac{F_t}{F_{\bar{Y}}} = \frac{-b\bar{Y}}{1 - b + bt}$$

13.7 在问题 6.7 和 6.8 中，由模型导出的均衡条件和收入的均衡水平的显函数分别是

$$Y = C_0 + b(Y - T_0 - tY) + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 - z(Y - T_0 - tY) \quad (13.18)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{1 - b + bt + z - zt}(C_0 - bT_0 + I_0 + G_0 + X_0 - Z_0 + zT_0)$$

我们也发现，相当简化以后，边际进口倾向 z 的改变对 $\bar{Y}$ 的影响的比较静态导数是

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial z} = \frac{-\bar{Y}_d}{1 - b + bt + z - zt}$$

(a) 寻求(13.18)式的均衡条件的隐函数.(b) 从它导出同样的导数 $\partial \bar{Y}/\partial z$ 使你再次相信使用隐函数研究的便利.

解 ☞ (a) 从(13.18)式知，均衡条件的隐函数是

$$\bar{Y} - C_0 - b(\bar{Y} - T_0 - t\bar{Y}) - I_0 - G_0 - X_0 + Z_0 + z(\bar{Y} - T_0 - t\bar{Y})$$

(b) 从隐函数法则，

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_{\bar{Y}}} = -\frac{\bar{Y} - T_0 - t\bar{Y}}{1 - b + bt + z - zt} = \frac{-\bar{Y}_d}{1 - b + bt + z - zt}$$

含有多个内生变量的比较静态

13.8 阐述隐函数定理。

解 ☞ 给定方程组

$$f^1(y_1, y_2, \cdots, y_n; x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0$$
$$f^2(y_1, y_2, \cdots, y_n; x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0$$
$$\vdots$$
$$f^n(y_1, y_2, \cdots, y_n; x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0$$

如果上面所有函数关于 x 和 y 的偏微分连续，而且如果在一点 $(y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0}; x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ 由所有函数 f_i 关于所有独立变量 y_i 的偏微分组成的雅可比矩阵非零，如下面表示

$$|J| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y_1} & \frac{\partial f^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y_1} & \frac{\partial f^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial y_1} & \frac{\partial f^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么存在一个 m 维领域 N，在这个领域中变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的隐函数，形式如下

$$y_{10} = f^1(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$$
$$y_{20} = f^2(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$$
$$\vdots$$
$$y_{n0} = f^n(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$$

隐函数 $f^1, f^2, \cdots, f^n$ 关于所有独立变量是连续的且有连续的偏导数. 比较静态导数的求法已在例 3 中给出.

13.9　研究例 3 中的模型, 其中

$$F^1(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0$$
$$F^2(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0$$

求系统关于 x_2 的比较静态偏导数.

解　☞ 求出两个函数关于 x_2 的全导数,

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F^1}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F^2}{\partial x_2} = 0$$

把函数关于 x_2 的偏导数移到右边, 有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{JX} = \boldsymbol{B}$$

这里

$$|\boldsymbol{J}| = \frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \neq 0$$

为求解一阶导数, $\partial y_1/\partial x_2$, 用向量 $\boldsymbol{B}$ 的列替代 $\boldsymbol{J}$ 的第 1 列构造一个新的矩阵 $|\boldsymbol{J}_1|$ 并代入(13.6).

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_2} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_2} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F^1}{\partial y_2}\right)}{\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^1}{\partial y_2}}$$

同样地

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial x_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^1}{\partial x_2}\right)}{\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F^1}{\partial y_2}}$$

13.10　假定例 4 中模型

$$Y - C_0 - C(Y, i) = 0 \quad 0 < C_Y < 1, C_i < 0$$
$$L(Y, i) - M_0/P = 0 \quad L_Y > 0, L_i < 0$$

利用比较静态分析货币供应 M_0 的变化对 Y 和 i 的均衡水平的影响, 要求 P 是常量.

解　☞ 求出关于 M_0 的全微分,

$$\frac{\partial Y}{\partial M_0} - \left(C_Y \cdot \frac{\partial Y}{\partial M_0}\right) - \left(C_i \cdot \frac{\partial i}{\partial M_0}\right) = 0$$

$$\left(L_Y \cdot \frac{\partial Y}{\partial M_0}\right) + \left(L_i \cdot \frac{\partial i}{\partial M_0}\right) - \frac{1}{P} = 0$$

把它们设置为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 - C_Y & -C_i \\ L_Y & L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial M_0} \\ \dfrac{\partial \bar{i}}{\partial M_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/P \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

这里

$$|\boldsymbol{J}| = (1 - C_Y)L_i + C_i L_Y$$

$$|J| = (+)(-) + (-)(+) = (-) < 0$$

接着，我们构造一个新矩阵$|\boldsymbol{J}_1|$求解一阶微分$\partial \bar{Y}/\partial M_0$.

$$|\boldsymbol{J}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -C_i \\ 1/P & L_i \end{vmatrix} = \frac{C_i}{P}$$

和

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial M_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{C_i}{P[(1 - C_Y)L_i + C_i L_Y]} = \frac{(-)}{(-)} > 0$$

货币供应 M_0 的增加会导致收入的均衡水平的增加.对于$\partial \bar{i}/\partial M_0$,

$$|\boldsymbol{J}_2| = \begin{vmatrix} 1 - C_Y & 0 \\ L_Y & 1/P \end{vmatrix} = \frac{1 - C_Y}{P}$$

和

$$\frac{\partial \bar{i}}{\partial M_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{1 - C_Y}{P[(1 - C_Y)L_i + C_i L_Y]} = \frac{(+)}{(-)} < 0$$

M_0 的增加将导致均衡利率的下降.

13.11　研究与问题6.4相似的由三个联立方程组成的系统,

$$Y = C + I_0 + G_0 \qquad C = C_0 + b(Y - T) \qquad T = T_0 + tY$$

(a)　把方程系统表示为一般和具体隐函数.(b)　求出一般函数和具体函数的雅可比矩阵.(c)　用矩阵形式表示一般和具体函数关于 G_0 的全微分.接着求出下列偏导数并标明其符号(d)　$\partial \bar{Y}/\partial G_0$,(e)　$\partial \bar{C}/\partial G_0$ 和(f)　$\partial \bar{T}/\partial G_0$.

解　☞ (a)

$$F^1(Y, C, T; C_0, I_0, G_0, T_0, b, t) = Y - C - I_0 - G_0 = 0$$

$$F^2(Y, C, T; C_0, I_0, G_0, T_0, b, t) = C - C_0 - b(Y - T) = 0$$

$$F^3(Y, C, T; C_0, I_0, G_0, T_0, b, t) = T - T_0 - tY = 0$$

(b)　由所有方程关于所有局内变量或独立变量的偏微分构成雅可比矩阵.

$$|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

沿第一行展开

$$|\boldsymbol{J}| = 1(1) - (-1)(-b + bt) = 1 - b + bt \neq 0$$

(c)　求出一般函数关于 G_0 的全微分,设置为现在人们熟悉的矩阵形式,并用内生变量上面加一"横"表示他们在模型的均衡处赋值,有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} \\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial G_0} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial G_0} \\ -\dfrac{\partial F^3}{\partial G_0} \end{bmatrix}$$

有关具体函数的相同微分是

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} \\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.19}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的符号随着矩阵移到等号的右边而改变.

(d) 为了求解$\partial \bar{Y}/\partial G_0$,即(13.19)式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的元素 a_{11},我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替$\boldsymbol{J}$ 的第一列建立新矩阵 $|\boldsymbol{J}_1|$ 并使用(13.6).

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{1}{1-b+bt} > 0$$

(e) 为了求解$\partial \bar{C}/\partial G_0$,即(13.19)式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的元素 a_{21},我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替$\boldsymbol{J}$ 的第二列建立新矩阵 $|\boldsymbol{J}_2|$ 并使用(13.6).

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -b & 0 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{b(1-t)}{1-b+bt} > 0$$

(f) 为了求解$\partial \bar{T}/\partial G_0$,即(13.19)式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的元素 a_{31},我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替$\boldsymbol{J}$ 的第一列建立新矩阵 $|\boldsymbol{J}_3|$ 并使用(13.6).

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial G_0} = \frac{|\boldsymbol{J}|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{bmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{1}{1-b+bt} > 0$$

13.12 使用前面问题 13.11 中模型,这里初始雅可比矩阵$|\boldsymbol{J}|$保持不变,(a) 用矩阵表示关于 T_0 的一般和具体函数的全微分.然后求下列偏导数并注明其符号(b) $\partial \bar{Y}/\partial T_0$,(c) $\partial \bar{C}/\partial T_0$ 和(d) $\partial \bar{T}/\partial T_0$.

解 (a) 用矩阵形式,一般函数关于 T_0 的全微分是

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial T} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial T_0} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial T_0} \\ -\dfrac{\partial F^3}{\partial T_0} \end{bmatrix}$$

具体函数的关于 T_0 微分是

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial T_0} \\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) 为了求解$\partial \bar{Y}/\partial T_0$,即(13.19)式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的元素 a_{11},我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替$\boldsymbol{J}$ 的第一列建立新矩阵 $|\boldsymbol{J}_1|$ 并使用(13.6).

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{-b}{1-b+bt} < 0$$

(c) 为了求解$\partial \bar{C}/\partial T_0$,即(13.19)式矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的元素 a_{21},我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替$\boldsymbol{J}$ 的第二列建立新矩阵 $|\boldsymbol{J}_2|$ 并使用(13.6).

$$\frac{\partial\bar{C}}{\partial T_0}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -b & 0 & b\\ -t & 1 & 1\end{bmatrix}}{|J|}=\frac{-b}{1-b+bt}<0$$

(d)　为了求解$\partial\bar{T}/\partial T_0$，我们用 $\boldsymbol{B}$ 代替 $\boldsymbol{J}$ 的第一列并使用(13.6).

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial T_0}=\frac{|J_3|}{|J|}=\frac{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -b & 1 & 0\\ -t & 0 & 1\end{bmatrix}}{|J|}=\frac{1-b}{1-b+bt}>0$$

13.13　对于问题 13.11 相同的模型，(a)　用矩阵表示一般和具体函数关于税率 t 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号(b)　$\partial\bar{Y}/\partial t$，(c)　$\partial\bar{C}/\partial t$ 和(d)　$\partial\bar{T}/\partial t$.

解　☞ (a)　关于 t 的一般函数的全微分是

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial T}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial T}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial t}\\ \frac{\partial\bar{C}}{\partial t}\\ \frac{\partial\bar{T}}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\partial F^1}{\partial t}\\ -\frac{\partial F^2}{\partial t}\\ -\frac{\partial F^3}{\partial t}\end{bmatrix}$$

具体函数关于 t 的微分是

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -b & 1 & b\\ -t & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial t}\\ \frac{\partial\bar{C}}{\partial t}\\ \frac{\partial\bar{T}}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \bar{Y}\end{bmatrix}$$

(b)　对于$\partial\bar{Y}/\partial t$，

$$\frac{\partial\bar{Y}}{\partial t}=\frac{|J_1|}{|J|}=\frac{\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & b\\ \bar{Y} & 0 & 1\end{bmatrix}}{|J|}=\frac{-b\bar{Y}}{1-b+bt}<0$$

(c)对于$\partial\bar{C}/\partial t$，

$$\frac{\partial\bar{C}}{\partial t}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -b & 0 & b\\ -t & \bar{Y} & 1\end{bmatrix}}{|J|}=\frac{-b\bar{Y}}{1-b+bt}<0$$

(d)　对于$\partial\bar{T}/\partial t$，

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}=\frac{|J_3|}{|J|}=\frac{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -b & 1 & 0\\ -t & 0 & \bar{Y}\end{bmatrix}}{|J|}=\frac{(1-b)\bar{Y}}{1-b+bt}>0$$

13.14　给定收入决定模型

$$Y=C+I_0+G_0+X_0-Z\qquad C=C_0+bY\qquad Z=Z_0+zY$$

这里 X＝进口，Z＝出口，零下标表示固定的外生变量，(a)　把方程系统表示为一般和具体隐函数.(b)　用矩阵表示一般和具体函数关于出口 X_0 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号(c)　$\partial\bar{Y}/\partial X_0$，(d)　$\partial\bar{C}/\partial X_0$ 和(e)　$\partial\bar{Z}/\partial X_0$.

解　☞ (a)

$$F^1(Y,C,Z;C_0,I_0,G_0,X_0,Z_0,b,z)=Y-C-I_0-G_0-X_0+Z=0$$

$$F^2(Y,C,Z;C_0,I_0,G_0,X_0,Z_0,b,z)=C-C_0-bY=0$$

$$F^3(Y,C,Z;C_0,I_0,G_0,X_0,Z_0,b,z)=Z-Z_0-zY=0$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial X_0} \\ \dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial X_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial X_0} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial X_0} \\ -\dfrac{\partial F^3}{\partial X_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -Z & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial X_0} \\ \dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial X_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{J}| = 1 - b + z > 0$$

(c) 对于$\partial \bar{Y}/\partial X_0$,

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial X_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{1}{1 - b + z} > 0$$

(d) 对于$\partial \bar{C}/\partial X_0$,

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial X_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b & 0 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{b}{1 - b + z} > 0$$

(e) 对于$\partial \bar{Z}/\partial X_0$,

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial X_0} = \frac{|\boldsymbol{J}_3|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -z & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{z}{1 - b + z} > 0$$

13.15 使用问题 13.14 中的模型,(a) 用矩阵形式表示具体函数关于对的边际消费倾向 b 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号(b) $\partial \bar{Y}/\partial b$,(c) $\partial \bar{C}/\partial b$ 和(d) $\partial \bar{Z}/\partial b$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial b} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial b} \\ \dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{Y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial b} = \frac{|\boldsymbol{J}_1|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \bar{Y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\bar{Y}}{1 - b + z} > 0$$

(c)

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial b} = \frac{|\boldsymbol{J}_2|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & \bar{Y} & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{(1 + z)\bar{Y}}{1 - b + z} > 0$$

(d)

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial b} = \frac{|\boldsymbol{J}_3|}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & \bar{Y} \\ -z & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{J}|} = \frac{z\bar{Y}}{1 - b + z} > 0$$

13.16 继续利用问题 13.14 中的模型,(a) 用矩阵形式表示具体函数关于对边际进口倾向 z 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号(b) $\partial \bar{Y}/\partial z$,(c) $\partial \bar{C}/\partial z$ 和(d) $\partial \bar{Z}/\partial z$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \bar{C}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \bar{Z}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{Y} \end{bmatrix}$$

(b) $\partial \bar{Y}/\partial z$,

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial z} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{Y} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-\bar{Y}}{1-b+z} < 0$$

(c) $\partial \bar{C}/\partial z$,

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & 0 & 0 \\ -z & \bar{Y} & 1 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-b\bar{Y}}{1-b+z} < 0$$

(d) $\partial \bar{Z}/\partial z$,

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial z} = \frac{|J_3|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ -z & 0 & \bar{Y} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{(1-b)\bar{Y}}{1-b+z} > 0$$

13.17 把对外贸易市场引入国内收入模型的商品市场,把它们与货币市场结合起来.假定

商品市场:　$I = I(i)$　$(I_i < 0)$

　　$S = S(Y, i)$　$(0 < S_Y < 1; S_i > 0)$

对外贸易市场:　$Z = Z(Y, i)$　$0 < Z_Y < 1; Z_i < 0$

　　$X = X_0$

货币市场:　$M_D = L(Y, i)$　$L_Y > 0, L_i < 0$

　　$M_S = M_0$

这里 Z = 进口, S = 储蓄, X_0 = 自控出口, M_D = 货币需求, M_S = 货币供应,其他符号为我们所熟知.(a) 表示结合商品市场和货币市场的均衡条件.(b) 把均衡条件表示为一般和具体函数.(c) 用矩阵形式表示所有函数关于 M_0 的全微分.然后求解并注明符号(d) 雅可比矩阵,(e) $\partial \bar{Y}/\partial M_0$ 和(f) $\partial \bar{i}/\partial M_0$.

解 ☞ (a) 当流入等于流出时,结合的商品市场均衡:

$$I(i) + X_0 = S(Y, i) + Z(Y, i)$$

当货币需求等于货币供给时,货币市场均衡:

$$L(Y, i) = M_0$$

(b)

$$F^1(Y, i; M_0, X_0) = I(i) + X_0 - S(Y, i) - Z(Y, i)$$

$$F^2(Y, i; M_0, X_0) = L(Y, i) - M_0$$

(c)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial i} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial M_0} \\ \dfrac{\partial \bar{i}}{\partial M_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial M_0} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial M_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -S_Y - Z_Y & I_i - S_i - Z_i \\ L_Y & L_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{Y}}{\partial M_0} \\ \dfrac{\partial \bar{i}}{\partial M_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$JX = B$$

(d)

$$|J| = L_i(-S_Y - Z_Y) - L_Y(I_i - S_i - Z_i) > 0$$

(e) 为求$\partial\bar{Y}/\partial M_0$,使用克莱姆法则,

$$\frac{\partial\bar{Y}}{\partial M_0}=\frac{|J_1|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}0 & I_i-S_i-Z_i\\1 & L_i\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-(I_i-S_i-Z_i)}{L_i(-S_Y-Z_Y)-L_Y(I_i-S_i-Z_i)}>0$$

(f) 对于$\partial\bar{i}/\partial M_0$,

$$\frac{\partial\bar{i}}{\partial M_0}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}-S_Y-Z_Y & 0\\L_Y & 1\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-(S_Y+Z_Y)}{L_i(-S_Y-Z_Y)-L_Y(I_i-S_i-Z_i)}<0$$

13.18 使用问题 13.17 中的模型,(a) 用矩阵形式表示具体函数关于进口 X_0 的全微分.然后求解并注明符号(b) $\partial\bar{Y}/\partial X_0$ 和(c) $\partial\bar{i}/\partial X_0$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix}-S_Y-Z_Y & I_i-S_i-Z_i\\L_Y & L_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial X_0}\\\frac{\partial\bar{i}}{\partial X_0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

(b) 对于$\partial\bar{Y}/\partial X_0$,

$$\frac{\partial\bar{Y}}{\partial X_0}=\frac{|J_1|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & I_i-S_i-Z_i\\0 & L_i\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-L_i}{L_i(-S_Y-Z_Y)-L_Y(I_i-S_i-Z_i)}>0$$

(c) 对于$\partial\bar{i}/\partial X_0$.

$$\frac{\partial\bar{i}}{\partial X_0}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}-S_Y-Z_Y & -1\\L_Y & 0\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{L_Y}{L_i(-S_Y-Z_Y)-L_Y(I_i-S_i-Z_i)}>0$$

优化问题中比较静态分析

13.19 返回到例 5 的模型,这里一阶条件是

$$F^1(K,L,r,w,P)=PQ_K(\bar{K},\bar{L})-r=0$$
$$F^2(K,L;r,w,P)=PQ_L(\bar{K},\bar{L})-w=0$$

(a) 用矩阵形式表示函数关于工资 w 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号(b) $\partial\bar{K}/\partial w$ 和(c) $\partial\bar{L}/\partial w$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix}PQ_{KK} & PQ_{KL}\\PQ_{LK} & PQ_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{K}}{\partial w}\\\frac{\partial\bar{L}}{\partial w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$|J|=P^2(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{LK}Q_{KL})>0$$

(b) 对于$\partial\bar{K}/\partial w$,

$$\frac{\partial\bar{K}}{\partial w}=\frac{|J_1|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}0 & PQ_{KL}\\1 & PQ_{LL}\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-PQ_{KL}}{P^2(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})}$$

$\frac{\partial\bar{K}}{\partial w}$的符号取决于 Q_{KL} 的符号.假定资本的边际生产率因劳动力的增加而增加,$Q_{KL}>0$,则$\partial\bar{K}/\partial w<0$,意味着资本的最优水平可能随着工资的增长而下降.

(c) 对于$\partial\bar{L}/\partial w$,

$$\frac{\partial\bar{L}}{\partial w}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}PQ_{KK} & 0\\PQ_{LK} & 1\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{PQ_{KK}}{P^2(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})}<0$$

因为 $Q_{KK}<0$,随着工资的增长劳动力的最优水平将下降.

13.20 仍研究例 5 中的模型,这里一阶条件是

$$F^1(K,L;r,w,P)=PQ_K(\bar{K},\bar{L})-r=0$$

$$F^2(K,L;r,w,P) = PQ_L(\bar{K},\bar{L}) - w = 0$$

(a)用矩阵形式表示函数关于商品价格 P 的全微分.然后求出下列偏导数并注明其符号,(b) $\partial\bar{K}/\partial P$ 和(c) $\partial\bar{L}/\partial P$.

解 (a)

$$\begin{bmatrix} PQ_{KK} & PQ_{KL} \\ PQ_{LK} & PQ_{LL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{K}}{\partial P} \\ \dfrac{\partial\bar{L}}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_K \\ -Q_L \end{bmatrix}$$

(b) 对于$\partial\bar{K}/\partial P$,

$$\frac{\partial\bar{K}}{\partial P} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -Q_K & PQ_{KL} \\ -Q_L & PQ_{LL} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{P(-Q_KQ_{LL}+Q_LQ_{KL})}{P^2(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})} = \frac{(Q_LQ_{KL}-Q_KQ_{LL})}{P(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})}$$

因为,$Q_K = MP_K > 0$, $Q_L = MP_L > 0$, $Q_{LL} < 0$(在最优水平),且$|J|>0$,所以其符号完全取决于交叉偏微分 Q_{KL}.如果 K 和 L 是互补的,一种投入的使用增加将导致另一种投入的 MP 的增加,那么 $Q_{KL}>0$ 且比较静态微分$\partial\bar{K}/\partial P>0$.如果 $Q_{KL}<0$, $\partial\bar{K}/\partial P$ 的符号不确定.

(c) 对于$\partial\bar{L}/\partial P$,

$$\frac{\partial\bar{L}}{\partial P} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} PQ_{KK} & -Q_K \\ PQ_{LK} & -Q_L \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{P(-Q_LQ_{KK}+Q_KQ_{LK})}{P^2(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})} = \frac{(Q_KQ_{LK}-Q_LQ_{KK})}{P(Q_{KK}Q_{LL}-Q_{KL}Q_{LK})}$$

其符号取决于交叉偏微分 Q_{LK},同(b).

13.21 现假定一个公司追求利润函数的折现值的最优,

$$\pi = P_0Q(X,Y)e^{-rt} - P_xX - P_yY$$

当用隐函数表示时一阶条件的一阶微分为$\partial\pi/\partial X$ 和$\partial\pi/\partial Y$ 为,

$$F^1(X,Y;P_0,P_x,P_y,r,t) = P_0Q_x(\bar{X},\bar{Y})e^{-rt} - P_x = 0$$

$$F^2(X,Y;P_0,P_x,P_y,r,t) = P_0Q_Y(\bar{X},\bar{Y})e^{-rt} - P_y = 0$$

(a) 用矩阵形式表示函数关于 P_0 的全微分,要求 r 和 t 不变.然后求解并注明其符号(b) 雅可比矩阵,(c) $\partial\bar{X}/\partial P_0$ 和(d) $\partial\bar{Y}/\partial P_0$.

解 (a)

$$\begin{bmatrix} P_0Q_{xx}e^{-rt} & P_0Q_{xy}e^{-rt} \\ P_0Q_{yx}e^{-rt} & P_0Q_{yy}e^{-rt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{X}}{\partial P_0} \\ \dfrac{\partial\bar{Y}}{\partial P_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_xe^{-rt} \\ -Q_ye^{-rt} \end{bmatrix}$$

(b)

$$|J| = P_0^2e^{-2rt}(Q_{xx}Q_{yy}-Q_{yx}Q_{xy}) > 0$$

从二阶充分条件有 $P_0^2e^{-2rt}>0$ 和$(Q_{xx}Q_{yy} - Q_{yx}Q_{xy})>0$,所以$|J|>0$.

(c) 对于$\partial\bar{X}/\partial P_0$,

$$\frac{\partial\bar{X}}{\partial P_0} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -Q_xe^{-rt} & P_0Q_{xy}e^{-rt} \\ -Q_ye^{-rt} & P_0Q_{yy}e^{-rt} \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{P_0e^{-2rt}(Q_yQ_{xy}-Q_xQ_{yy})}{P_0^2e^{-2rt}(Q_{xx}Q_{yy}-Q_{yx}Q_{xy})} = \frac{(Q_yQ_{xy}-Q_xQ_{yy})}{P_0(Q_{xx}Q_{yy}-Q_{yx}Q_{xy})}$$

正如问题 13.20(b),符号取决于交叉偏微分 Q_{xy}.

(d) 对于$\partial\bar{Y}/\partial P_0$,

$$\frac{\partial\bar{Y}}{\partial P_0} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} P_0Q_{xx}e^{-rt} & -Q_xe^{-rt} \\ P_0Q_{yx}e^{-rt} & -Q_ye^{-rt} \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{P_0e^{-2rt}(Q_xQ_{yx}-Q_yQ_{xx})}{P_0^2e^{-2rt}(Q_{xx}Q_{yy}-Q_{yx}Q_{xy})} = \frac{(Q_xQ_{yx}-Q_yQ_{xx})}{P_0(Q_{xx}Q_{yy}-Q_{yx}Q_{xy})}$$

13.22 使用问题 13.21 中相同的模型,(a) 用矩阵形式表示函数关于时间 t 的全微分.然后求解并注明其符号(b) $\partial\bar{X}/\partial t$ 和(c) $\partial\bar{Y}/\partial t$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} P_0Q_{xx}e^{-rt} & P_0Q_{xy}e^{-rt} \\ P_0Q_{yx}e^{-rt} & P_0Q_{yy}e^{-rt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rP_0Q_xe^{-rt} \\ rP_0Q_ye^{-rt}\end{bmatrix}$$

(b)

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial t} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} rP_0Q_xe^{-rt} & P_0Q_{xy}e^{-rt} \\ rP_0Q_ye^{-rt} & P_0Q_{yy}e^{-rt}\end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{rP_0^2e^{-2rt}(Q_xQ_{yy} - Q_yQ_{xy})}{P_0^2e^{-2rt}(Q_{xx}Q_{yy} - Q_{yx}Q_{xy})} = \frac{r(Q_xQ_{yy} - Q_yQ_{xy})}{(Q_{xx}Q_{yy} - Q_{yx}Q_{xy})}$$

(c)

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} P_0Q_{xx}e^{-rt} & rP_0Q_xe^{-rt} \\ P_0Q_{yx}e^{-rt} & rP_0Q_ye^{-rt}\end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{rP_0^2e^{-2rt}(Q_yQ_{xx} - Q_xQ_{yx})}{P_0^2e^{-2rt}(Q_{xx}Q_{yy} - Q_{yx}Q_{xy})} = \frac{r(Q_yQ_{xx} - Q_xQ_{yx})}{(Q_{xx}Q_{yy} - Q_{yx}Q_{xy})}$$

在以上两种情况下，如果交叉偏微分是正的，比较静态微分将是负的，而如果交叉偏微分是负的，比较静态微分将不确定.

13.23　假定例 5 中生产函数是规模报酬递减的柯布-道格拉斯函数，那么互补的公司的利润函数是

$$\pi = PAK^{\alpha}L^{\beta} - rK - wL$$

由于一阶条件，一阶微分$\partial\pi/\partial K$ 和$\partial\pi/\partial L$ 是

$$F^1(K, L; r, w, P, A, \alpha, \beta) = \alpha PAK^{\alpha-1}L^{\beta} - r = 0$$

$$F^2(K, L; r, w, P, A, \alpha, \beta) = \beta PAK^{\alpha}L^{\beta-1} - w = 0$$

(a)　用矩阵形式表示函数关于工资 w 的的全微分. 然后求解并注明其符号(b)　雅可比矩阵，(c)　$\partial\overline{K}/\partial w$ 和(d)　$\partial\overline{L}/\partial w$

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta} & \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} & \beta(\beta-1)PAK^{\alpha}L^{\beta-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \overline{K}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \overline{L}}{\partial w}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix}$$

(b)

$$|J| = \alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta}\cdot\beta(\beta-1)PAK^{\alpha}L^{\beta-2} - (\alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1})^2$$

$$|J| = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)P^2A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2} > 0$$

因为在无约束优化问题中，$|J| = |H|$ 和 $|H| = |H_2| > 0$. 这个条件意味着，因为 $|J| > 0$ 要求 $(\alpha+\beta) < 1$，所以处于完全竞争环境中追求利润最大化的公司将在规模报酬递减情况下运行.

(c)　对于$\partial\overline{K}/\partial w$，

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial w} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ 1 & \beta(\beta-1)PAK^{\alpha}L^{\beta-2}\end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-\alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1}}{|J|} < 0$$

因为分子毫无疑问是负的而分母是正的，所以比较静态微分$\partial\overline{K}/\partial w$ 毫无疑问是负的. 工资的增加将增加资本的需求. 如果需要，经进一步简化后可见

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial w} = \frac{-\alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1}}{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)P^2A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}} = \frac{-KL}{(1-\alpha-\beta)\mathrm{TR}} < 0$$

(d)　对于$\partial\overline{L}/\partial w$，

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial w} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta} & 0 \\ \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} & 1\end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta}}{|J|} < 0$$

因为 $\alpha < 1$，故$(\alpha-1) < 0$. 工资的增加将导致使用劳动力最优水平的减少. 经进一步化简后，有

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial w} = \frac{\alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta}}{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)P^2A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}} = \frac{-(1-\alpha)L^2}{(1-\alpha-\beta)\mathrm{TR}} < 0$$

13.24　研究问题 13.21 中相同的模型，(a)　用矩阵形式表示函数关于产品价格 P 的全微分. 然后求解并注明其符号(b)　$\partial\overline{K}/\partial P$ 和(c)　$\partial\overline{L}/\partial P$.

解 ☞ (a) $\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-2}L^{\beta} & \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} & \beta(\beta-1)PAK^{\alpha}L^{\beta-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{K}}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} \\ -\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} \end{bmatrix}$

(b) 对于$\partial\bar{K}/\partial P$,

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial P} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} & \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ -\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} & \beta(\beta-1)PAK^{\alpha}L^{\beta-2} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\alpha\beta PA^2K^{2\alpha-1}L^{2\beta-2}}{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)P^2A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}}$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial P} = \frac{K}{(1-\alpha-\beta)P} > 0$$

(c) 对于$\partial\bar{L}/\partial P$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial P} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)PAK^{\alpha-1}L^{\beta} & -\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} \\ \alpha\beta PAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} & -\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\alpha\beta PA^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-1}}{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)P^2A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}}$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial P} = \frac{L}{(1-\alpha-\beta)P} > 0$$

约束优化中的比较静态

13.25 一个消费者想在满足约束 $p_a a + p_b b = Y$ 情况下,使效用 $u(a,b)$的最大化, Y 是一个常数.给出拉格朗日函数

$$U = u(a,b) + \lambda(Y - p_a a - p_b b)$$

并假定二阶充分条件满足,使$|\bar{H}| = |J| \neq 0$,那么一阶条件中的内生变量能表示为外生变量的隐函数,如下

$$\begin{aligned} F^1(a,b,\lambda;p_a,p_b,Y) &= U_a - \lambda p_a = 0 \\ F^2(a,b,\lambda;p_a,p_b,Y) &= U_b - \lambda p_b = 0 \\ F^3(a,b,\lambda;p_a,p_b,Y) &= Y - p_a a - p_b b = 0 \end{aligned} \tag{13.20}$$

(a) 用矩阵形式表示函数关于 p_a 的全微分.(b) 求$\partial\bar{a}/\partial p_a$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} & -p_a \\ U_{ba} & U_{bb} & -p_b \\ -p_a & -p_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial p_a} \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial p_a} \\ \dfrac{\partial \bar{\lambda}}{\partial p_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ \bar{a} \end{bmatrix}$$

$$|J| = -p_a^2 U_{bb} + p_a p_b U_{ab} + p_a p_b U_{ba} - p_b^2 U_{aa} > 0$$

因为由约束优化的二阶充分条件有$|J| = |\bar{H}| > 0$.但是单独的二阶偏导数的符号无法从理论中确知

(b) 对于$\partial\bar{a}/\partial p_a$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial p_a} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{\lambda} & U_{ab} & -p_a \\ 0 & U_{bb} & -p_b \\ \bar{a} & -p_b & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{\bar{a}(p_a U_{bb} - p_b U_{ab}) - \bar{\lambda} p_b^2}{|J|} \tag{13.21}$$

因为二阶偏微分的符号未知,故其符号不确定.

13.26 研究与问题 13.25 相同的模型,(a) 用矩阵形式表示函数关于 p_b 的全微分.然后(b) 求$\partial\bar{b}/\partial p_b$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} & -p_a \\ U_{ba} & U_{bb} & -p_b \\ -p_a & -p_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial p_b} \\ \dfrac{\partial \bar{b}}{\partial p_b} \\ \dfrac{\partial \bar{\lambda}}{\partial p_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\lambda} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

(b) 对于$\partial\bar{b}/\partial p_b$

$$\frac{\partial\bar{b}}{\partial p_b}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}U_{aa}&0&-p_a\\U_{ba}&\bar{\lambda}&-p_b\\-p_a&\bar{b}&0\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{\bar{b}(p_bU_{aa}-p_aU_{ba})-\bar{\lambda}p_a^2}{|J|}\tag{13.22}$$

其符号也不确定.

13.27 继续使用问题13.25中同样的模型,(a) 用矩阵形式表示函数关于Y的全微分,然后求(b) $\partial\bar{a}/\partial Y$和(c) $\partial\bar{b}/\partial Y$.

解 ☞ (a)

$$\begin{bmatrix}U_{aa}&U_{ab}&-p_a\\U_{ba}&U_{bb}&-p_b\\-p_a&p_b&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\bar{a}}{\partial Y}\\\frac{\partial\bar{b}}{\partial Y}\\\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

(b) 对于$\partial\bar{a}/\partial Y$,

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial Y}=\frac{|J_1|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}0&U_{ab}&-p_a\\0&U_{bb}&-p_b\\-1&-&0\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-(p_aU_{bb}-p_bU_{ab})}{|J|}\tag{13.23}$$

它不能从数学角度来确定符号但可以从经济学角度来确定符号.如果a是一个正常商品,那么$\partial\bar{a}/\partial Y>0$;如果$a$是一种弱劣质品,那么$\partial\bar{a}/\partial Y=0$;而如果$a$严格劣质品,那么$\partial\bar{a}/\partial Y<0$.

(c) 对于$\partial\bar{b}/\partial Y$,

$$\frac{\partial\bar{b}}{\partial Y}=\frac{|J_2|}{|J|}=\frac{\begin{vmatrix}U_{aa}&0&-p_a\\U_{ba}&0&-p_b\\-p_a&-1&0\end{vmatrix}}{|J|}=\frac{-(p_bU_{aa}-p_aU_{ba})}{|J|}\tag{13.24}$$

它可根据商品的属性确定符号,正如上面(b)中.

13.28 利用问题13.25~13.27的信息导出价格p_a变化对最优需求量$\bar{a}$的影响的Slutsky方程,并确定比较静态微分$\partial\bar{a}/\partial p_a$的符号.

解 ☞ 从(13.21),经简单重新排列

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial p_a}=-\frac{\bar{\lambda}p_b^2}{|J|}+\frac{\bar{a}(p_aU_{bb}-p_bU_{ab})}{|J|}\tag{13.25}$$

但是从(13.23),

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial Y}=\frac{-(p_aU_{bb}-P_bU_{ab})}{|J|}$$

将$-\partial\bar{a}/\partial Y$代入到(13.25)中,我们得到关于$\bar{a}$的Slutsky等式,这里右边的第一项是**替代效应**,而第二项是**收入效应**.

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial p_a}=\underbrace{-\frac{\bar{\lambda}p_b^2}{|J|}}_{\text{替代效应}}-\underbrace{\bar{a}\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial Y}\right)}_{\text{收入效应}}$$

因为对于约束最大化$|J|=|\bar{H}|>0$且从(13.20),

$$\bar{\lambda}=\frac{U_a}{p_a}=\frac{MU_a}{p_a}>0$$

第一项中的替代效应毫无疑问是负的.第二项收入效应将取决于商品的属性.对于正常商品,$\partial\bar{a}/\partial Y>0$上面的收入效应是负的,使$\partial\bar{a}/\partial p_a<0$.对于弱劣质产品,$\partial\bar{a}/\partial Y=0$,则$\partial\bar{a}/\partial p_a<0$.对于严格劣质产品,$\partial\bar{a}/\partial Y<0$和$\partial\bar{a}/\partial p_a$的符号将取决于不同效应的相对大小.如果收入效应超过替代效应,如在吉芬商品的例子中,$\partial\bar{a}/\partial p_a>0$需求曲线将向上倾斜.

13.29 导出p_b的变化对商品的最优需求量$\bar{b}$的影响的Slutsky等式,并决定比较静态微分$\partial\bar{b}/\partial p_b$的符号.

解 ☞ 从(13.22),

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial p_b} = -\frac{\bar{\lambda} p_a^2}{|\boldsymbol{J}|} + \frac{\bar{b}(p_b U_{aa} - p_a U_{ba})}{|\boldsymbol{J}|}$$

但从(13.24)，

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial Y} = \frac{-(p_b U_{aa} - p_a U_{ba})}{|\boldsymbol{J}|}$$

代入上式，

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial p_b} = -\frac{\bar{\lambda} p_a^2}{|\boldsymbol{J}|} - \bar{b}\left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial Y}\right)$$

这里右边第一项中的替代效应毫无疑问是负的.第二项的收入效应将取决于商品的属性.见问题13.28.

包络定理

13.30 一个处于完全竞争环境中,生产函数为 $Q = f(K, L)$ 和产品限制为 Q_0 的公司追求利润最大化

$$\pi = PQ - rK - wL$$

假定隐函数原理条件满足,拉格朗日函数和间接目标函数可以分别写为

$$\Pi(K, L, Q, \lambda; r, w, P, Q_0) = PQ(r, w, P, Q_0) - rK(r, w, P, Q_0) - wL(r, w, P, Q_0) + \lambda[Q_0 - f(K, L)]$$

$$\bar{\pi}(\bar{K}, \bar{L}, \bar{Q}; r, w, P, Q_0) = P\bar{Q}(r, w, P, Q_0) - r\bar{K}(r, w, P, Q_0) - w\bar{L}(r, w, P, Q_0)$$

利用包络定理来求并评论表示为(a) $\partial\bar{\pi}/\partial r$,(b) $\partial\bar{\pi}/\partial P$ 和(c) $\partial\bar{\pi}/\partial Q_0$ 的间接目标函数的改变.

解 ☞ (a)

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial r} = \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\bar{K}(r, w, P, Q_0)$$

(b)

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial w} = \frac{\partial \Pi}{\partial w} = -\bar{L}(r, w, P, Q_0)$$

利润函数关于投入的价格的导数给出了公司投入需求.这里注意到投入价格 (r, w) 出现在目标函数中而不是在约束函数中,所期望的微分可以从任一个函数中很容易得到.

(c)

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial P} = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \bar{Q}(r, w, P, Q_0)$$

利润函数关于产品的价格的微分给出了公司的供应函数.因为产品价格 (P) 仅出现在目标函数中,微分可以立即从任一个函数中很容易得到.

(d)

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial Q_0} = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_0} = \bar{\lambda}$$

利润函数关于产出的约束的微分给出了公司松弛约束的边际价值,即公司如果增加一个单位产出所得到的额外利润.这里注意到产品限制 (Q_0) 仅出现在约束函数中,所以可以非常快捷地从拉格朗日函数中得到所求的导数.

13.31 一个消费者希望使获得一定水平效用的成本最小化:

$$c = p_x x + p_y y \qquad 满足 \qquad u(x, y) = U_0$$

如果隐函数定理条件满足,拉格朗日函数和间接目标函数是

$$C(x, y, \lambda; p_x, p_y, U_0) = p_x x(p_x, p_y, U_0) + p_y y(p_x, p_y, U_0) + \lambda[U_0 - u(x, y)]$$

$$\bar{c}(\bar{x}, \bar{y}; p_x, p_y, U_0) = p_x \bar{x}(p_x, p_y, U_0) + p_y \bar{y}(p_x, p_y, U_0)$$

利用包络定理来求解并解释为(a) $\partial\bar{c}/\partial p_x$,(b) $\partial\bar{c}/\partial p_y$ 和(c) $\partial\bar{c}/\partial U_0$ 的.

解 ☞ (a)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial p_x} = \frac{\partial C}{\partial p_x} = \bar{x}(p_x, p_y, U_0)$$

(b)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial p_y} = \frac{\partial C}{\partial p_y} = \bar{y}(p_x, p_y, U_0)$$

在以上两种情况中商品价格的改变对成本具有正效应,它刚好等于该商品的消费量.因为价格仅出现在目标函数中而不是在约束函数中,所期望的微分可以从任一个函数中很容易得到.

(c)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial U_0} = \frac{\partial C}{\partial U_0} = \bar{\lambda}$$

这里 $\bar{\lambda}$ 度量改变给定的效用水平的边际成本.因为效用限度 U_0 仅出现在约束中,微分很容易从拉格朗日函数中得到.

13.32 假定例 7 中的模型是仅含一个外生变量 a 的函数.证明在最优解处,拉格朗日函数对于 a 的全微分等于相同的拉格朗日函数对于 a 的偏微分.

解 ☞ 新的拉格朗日函数和一阶条件是

$$Z(x,y,\lambda;a)=z[x(a),y(a);a]+\lambda(a)f[x(a),y(a);a]$$
$$Z_x=z_x(\bar{x},\bar{y};a)+\bar{\lambda}f_x(\bar{x},\bar{y};a)=0$$
$$Z_y=z_y(\bar{x},\bar{y};a)+\bar{\lambda}f_y(\bar{x},\bar{y};a)=0$$
$$Z_\lambda=f(\bar{x},\bar{y};a)=0$$

求出初始拉格朗日函数关于 a 的全微分,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}a}=(z_x+\bar{\lambda}f_x)\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}+(z_y+\bar{\lambda}f_y)\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}a}+f\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}a}+(z_a+\bar{\lambda}f_a)$$

但由一阶条件,

$$z_x+\bar{\lambda}f_x=0,\qquad z_y+\bar{\lambda}f_y=0\qquad 及\qquad f=0$$

因此最前面三项取消为零,则函数关于外生变量 a 的全微分最后等于函数关于外生变量 a 的偏微分:

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}a}=(z_a+\bar{\lambda}f_a)=\frac{\partial Z}{\partial a}$$

这表示我们可以仅通过求出拉格朗日函数关于外生变量的偏微分来得到这个外生变量的改变对拉格朗日函数的最优值的全部影响.

凹规划

13.33 下面给出一般函数的约束优化的典型格式,

(a) 最大化 $f(x,y)$ 满足 $g(x,y)\leqslant B$

(b) 最小化 $f(x,y)$ 满足 $g(x,y)\geqslant B$

用适合于凹规划的适当形式表示它们,并写出拉格朗日函数.

解 ☞ (a) 在最大化问题中对于小于或等于约束,用约束中常量减去约束中变量.

最大化 $f(x,y)$　满足　$B-g(x,y)\geqslant 0$　　$\bar{x},\bar{y}\geqslant 0$

$$\mathrm{Max}F=f(x,y)+\lambda[B-g(x,y)]$$

(b) 对于最小化,用 -1 乘目标函数使它成为负的,然后最大化初始函数的负数.在最小化问题中对于相应的大于或等于约束,用约束变量减去约束常量.

最大化 $-f(x,y)$　满足　$g(x,y)-B\geqslant 0$　　$\bar{x},\bar{y}\geqslant 0$

$$\mathrm{Max}F=-f(x,y)+\lambda[g(x,y)-B]$$

13.34 假定一个公司有生产函数 $Q(K,L)$,且在完全竞争要素市场中经营,希望在生产不低于一具体产出数量时最小化成本,由以下给出

最小化 $c=rK+wL$　满足　$Q(K,L)\geqslant Q_0$

(a) 用凹规划格式表达问题,(b) 写出拉格朗日函数和(c) 求解问题.

解 ☞ (a) 用 -1 乘以目标函数使它成为负的,并使它最大化.

最小化 $c=-rK-wL$　满足　$Q(K,L)-Q_0\geqslant 0$　　$K,L\geqslant 0$

(b)
$$最大化\ C=-rK-wL+\lambda[Q(K,L)-Q_0]$$

(c) 应用库恩-塔克条件,我们首先最大化关于选择变量 K 和 L 的拉格朗日函数,并检查相关条件.

1. (a) $\dfrac{\partial C}{\partial K}=-r+\bar{\lambda}Q_K\leqslant 0$　　$\dfrac{\partial C}{\partial L}=-w+\bar{\lambda}Q_L\leqslant 0$

   (b) $\bar{K}\geqslant 0$　　$\bar{L}\geqslant 0$

   (c) $\bar{K}(-r+\bar{\lambda}Q_K)=0$　　$\bar{L}(-w+\bar{\lambda}Q_L)=0$

接着最小化关于约束变量 λ 的拉格朗日函数并检查相关条件.

2. (a) $\frac{\partial C}{\partial \lambda}=Q(\bar{K},\bar{L})-Q_0\geqslant 0$

(b) $\bar{\lambda}\geqslant 0$

(c) $\bar{\lambda}[Q(\bar{K},\bar{L})-Q_0]=0$

假定生产依赖于两种投入，$\bar{K},\bar{L}>0$，1(c)中两种表达必定相等.

$$-r+\bar{\lambda}Q_K=0 \qquad -w+\bar{\lambda}Q_L=0$$

整理，有

$$\bar{\lambda}=\frac{r}{Q_K}=\frac{w}{Q_L}>0 \tag{13.26}$$

因为投入价格 $r,w>0$ 和边际生产率 $Q_K,Q_L>0$. 由于 $\bar{\lambda}>0$，从 2(c)，预算约束固定为等式，有

$$Q(\bar{K},\bar{L})=Q_0$$

整理(13.26)我们得到一个内部解，该解位于等产量线与等成本线切点处.

$$\frac{Q_L}{Q_K}=\frac{w}{r}$$

13.35 最大化利润

$$\pi=64x-2x^2+96y-4y^2-13$$

满足生产约束

$$x+y\leqslant 20$$

我们首先建立拉格朗日函数

$$\Pi=64x-2x^2+96y-4y^2-13+\lambda(20-x-y)$$

并写出库恩-塔克条件.

1. (a) $\Pi_x=64-4\bar{x}-\bar{\lambda}\leqslant 0$　　$\Pi_y=96-8\bar{y}-\bar{\lambda}\leqslant 0$

(b) $\bar{x}\geqslant 0$　　$\bar{y}\geqslant 0$

(c) $\bar{x}(64-4\bar{x}-\bar{\lambda})=0$　　$\bar{y}(96-8\bar{y}-\bar{\lambda})=0$

2. (a) $\Pi_\lambda=20-\bar{x}-\bar{y}\geqslant 0$

(b) $\bar{\lambda}\geqslant 0$

(c) $\bar{\lambda}(20-\bar{x}-\bar{y})=0$

然后系统地检验库恩-塔克条件.

解 ☞ 1. 检验 $\bar{\lambda}=0$ 或 $\bar{\lambda}>0$.

如果 $\bar{\lambda}=0$，那么从 1(a)，

$$64-4\bar{x}\leqslant 0 \qquad 96-8\bar{y}\leqslant 0$$

因此，

$$4\bar{x}\geqslant 64 \quad 8\bar{y}\geqslant 96$$
$$\bar{x}\geqslant 16 \quad \bar{y}\geqslant 12$$

但是这违背了最初的约束，因为 $\bar{x}+\bar{y}=28>20$. 因此 $\bar{\lambda}\neq 0$，再从 2(b)，我们得到 $\bar{\lambda}>0$.

2. 如果 $\bar{\lambda}>0$，从 2(c)，约束保持为一个等式，有

$$20-\bar{x}-\bar{y}=0$$

3. 接着，检验是否选择变量 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 中有一个等于零.

(a) 如果 $\bar{x}=0,\bar{y}=20$，那么违反 1(c)中第二个条件.

$$20[96-8(20)-(\bar{\lambda}>0)]\neq 0$$

(b) 如果 $\bar{y}=0,\bar{x}=20$，那么违反 1(c)中第一个条件.

$$20[64-4(20)-(\bar{\lambda}>0)]\neq 0$$

因此没有一个选择变量等于零，并从 1(b)，

$$\text{如果 } \bar{x}\neq 0,\text{有 } \bar{x}>0 \quad \text{且如果} \quad \bar{y}\neq 0,\text{有 } \bar{y}>0$$

4. 如果 $\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}>0$，那么从 1(c)和 2(c)，下列等式成立，

$$64-4\bar{x}-\bar{\lambda}=0$$
$$96-8\bar{y}-\bar{\lambda}=0$$
$$20-\bar{x}-\bar{y}=0$$

把它们写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ -96 \\ -20 \end{bmatrix}$$

并用克莱姆法则来求解，这里$|\mathbf{A}| = 12, |\mathbf{A}_1| = 128, |\mathbf{A}_2| = 112$ 和 $|\mathbf{A}_3| = 256$，我们得到解

$$\bar{x} = 10.67, \bar{y} = 9.33 \quad 和 \quad \bar{\lambda} = 21.33$$

该解是最优解，因为所有库恩-塔克条件都满足. 因 $\bar{\lambda} = 21.33$，生产约束的常量每增加一单位将导致利润增加 21.33.

13.36 最大化问题 13.35 中利润函数

$$\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$$

满足新的生产约束

$$x + y \leqslant 36$$

拉格朗日函数和库恩-塔克条件是

$$\Pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13 + \lambda(36 - x - y)$$

1. (a) $\Pi_x = 64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda} \leqslant 0 \qquad \Pi_y = 96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda} \leqslant 0$
   (b) $\bar{x} \geqslant 0 \qquad \bar{y} \geqslant 0$
   (c) $\bar{x}(64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda}) = 0 \qquad \bar{y}(96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda}) = 0$
2. (a) $\Pi_\lambda = 36 - \bar{x} - \bar{y} \geqslant 0$
   (b) $\bar{\lambda} \geqslant 0$
   (c) $\bar{\lambda}(36 - \bar{x} - \bar{y}) = 0$

接着我们系统地检验库恩-塔克条件.

解 ☞ 1. 验证 $\bar{\lambda} = 0$ 或 $\bar{\lambda} > 0$.

如果 $\bar{\lambda} = 0$，那么从 1(a)，

$$64 - 4\bar{x} \leqslant 0 \qquad 96 - 8\bar{y} \leqslant 0$$

因此，

$$\bar{x} \geqslant 16 \qquad \bar{y} \geqslant 12$$

因为 $\bar{x} + \bar{y} = 28 < 36$，没有违反条件，因此，有可能 $\bar{\lambda} = 0$ 或 $\bar{\lambda} > 0$.

2. 现在检验看是否选择变量 $\bar{x}$ 或 $\bar{y}$ 有一个能等于零.

(a) 如果 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 36$，那么违反 1(c)中第二个条件.

$$36[96 - 8(36) - (\bar{\lambda} \geqslant 0)] \neq 0$$

(b) 如果 $\bar{y} = 0, \bar{x} = 36$，那么违反 1(c)中第一个条件.

$$36[64 - 4(36) - (\bar{\lambda} \geqslant 0)] \neq 0$$

因此，没有一个选择变量能等于零，并从 1(b)，

$$\bar{x} > 0 \quad 及 \quad \bar{y} > 0$$

3. 当(a) $\bar{\lambda} > 0$ 和(b) $\bar{\lambda} = 0$ 时检验解.

(a) 如果 $\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{y} > 0$，那么从(c)所列库恩-塔克条件，

$$64 - 4\bar{x} - \bar{\lambda} = 0$$
$$96 - 8\bar{y} - \bar{\lambda} = 0$$
$$36 - x - \bar{y} = 0$$

用矩阵形式

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ -96 \\ -36 \end{bmatrix}$$

使用克莱姆规则，这里 $|\mathbf{A}| = 12, |\mathbf{A}_1| = 256$ 和 $|\mathbf{A}_3| = -256$，我们得到

$$\bar{x} = 21.33, \quad \bar{y} = 14.67, \quad \bar{\lambda} = -21.33$$

这不是最优解，因为 $\bar{\lambda} < 0$ 违反 2(b)中库恩-塔克条件. 因从 2(c)有 $\bar{\lambda} < 0$，约束是严格等式且减少产量水平将增加利润水平.

(b) 如果 $\bar{\lambda} = 0$ 和 $x, y > 0$，那么从 1(c)，

$$64 - 4\bar{x} = 0, \quad \bar{x} = 16$$
$$96 - 8\bar{y} = 0, \quad \bar{y} = 12$$

得到最优解，$\bar{x}=16, \bar{y}=12$ 和 $\bar{\lambda}=0$，我们知这是最优解，因为它没有违反任何库恩-塔克条件．由于 $\bar{\lambda}<0$，约束是松弛的，如从最优解 $\bar{x}+\bar{y}=28<36$．

13.37 最小化成本

$$c = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$$

满足

$$x + y \geqslant 30$$

用 -1 乘以目标函数并建立拉格朗日函数，有

$$\text{Max}C = -5x^2 + 80x - y^2 + 32y + \lambda(x + y - 30)$$

库恩-塔克条件是

1. (a) $C_x = -10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda} \leqslant 0$　　$C_y = -2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda} \leqslant 0$
   (b) $\bar{x} \geqslant 0$　　$\bar{y} \geqslant 0$
   (c) $\bar{x}(-10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda}) = 0$　　$\bar{y}(-2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda}) = 0$
2. (a) $C_\lambda = \bar{x} + \bar{y} - 30 \geqslant 0$
   (b) $\bar{\lambda} \geqslant 0$
   (c) $\bar{\lambda}(\bar{x} + \bar{y} - 30) = 0$

解 ☞ 1. 检验 $\bar{\lambda}=0$ 的可能性．

如果 $\bar{\lambda}=0$，那么从 1(a)，

$$-10\bar{x} + 80 \leqslant 0 \qquad -2\bar{y} + 32 \leqslant 0$$

因此，

$$\bar{x} \geqslant 8 \qquad \bar{y} \geqslant 16$$

但由于 $\bar{x}+\bar{y} \geqslant 24$ 没有满足最初的约束 $\bar{x}+\bar{y} \geqslant 30$．因此 $\bar{\lambda}>0$．

2. 检验看 $\bar{x}$ 或 $\bar{y}$ 是否能等于零．

从 1(a)，如果 $\bar{x}=0$，则 $\bar{\lambda} \leqslant -80$，如果 $\bar{y}=0$，则 $\bar{\lambda} \leqslant -32$，它们都违反了变量的非负约束．因此 $\bar{x}$，$\bar{y}>0$．

3. 现在检查当 $\bar{x}, \bar{y}>0$ 和 $\bar{\lambda}>0$ 时的库恩-塔克条件．如果 $\bar{\lambda}>0$ 和 $\bar{x}, \bar{y}>0$，所有一阶偏导数都是严格等式且有

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -32 \\ 30 \end{bmatrix}$$

这里 $|\mathbf{A}|=12$，$|\mathbf{A}_1|=109$，$|\mathbf{A}_2|=252$ 和 $|\mathbf{A}_3|=4540$，给出了最优解，没有违反任何库恩-塔克条件

$$\bar{x} = 9, \quad \bar{y} = 21, \quad \bar{\lambda} = 36.67$$

13.38 最小化上面相同的函数

$$5x^2 - 80x + y^2 - 32y$$

满足新的约束

$$x + y \geqslant 20$$

拉格朗日函数和库恩-塔克条件是

$$\text{Max}C = -5x^2 + 80x - y^2 + 32y + \lambda(x + y - 20)$$

1. (a) $C_x = -10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda} \leqslant 0$　　$C_y = -2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda} \leqslant 0$
   (b) $\bar{x} \geqslant 0$　　$\bar{y} \geqslant 0$
   (c) $\bar{x}(-10\bar{x} + 80 + \bar{\lambda}) = 0$　　$\bar{y}(-2\bar{y} + 32 + \bar{\lambda}) = 0$
2. (a) $C_\lambda = \bar{x} + \bar{y} - 20 \geqslant 0$
   (b) $\bar{\lambda} \geqslant 0$
   (c) $\bar{\lambda}(\bar{x} + \bar{y} - 20) = 0$

解 ☞ 1. 检验 $\bar{\lambda}=0$ 的可能性．

如果 $\bar{\lambda}=0$，那么从 1(a)，

$$-10\bar{x}+80\leqslant 0 \qquad -2\bar{y}+32\leqslant 0$$

因此，

$$\bar{x}\geqslant 8 \qquad \bar{y}\geqslant 16$$

这没有违返约束，因为 $\bar{x}+\bar{y}\geqslant 24$ 满足 $\bar{x}+y\geqslant 20$. 因此 $\bar{\lambda}=0$ 或 $\bar{\lambda}>0$.

2. 由于与上面第二步相同的原因，我们可表明 $\bar{x},\bar{y}>0$.

3. 因此留下两种可能性，这取决于 $\bar{\lambda}=0$ 还是 $\bar{\lambda}>0$.

(a)　如果 $\bar{\lambda}=0$ 和 $\bar{x},\bar{y}>0$，所有导数都是严格等式且有

$$\begin{bmatrix}-10 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-80\\ -32\\ 20\end{bmatrix}$$

由于 $|\mathbf{A}|=12$，$|\mathbf{A}_1|=88$，$|\mathbf{A}_2|=152$ 和 $|\mathbf{A}_3|=\ \ 80$，解是

$$\bar{x}=7.33,\quad \bar{y}=12.67,\quad \bar{\lambda}=-6.67$$

因为 $\bar{\lambda}$ 是负的，违反条件 2(b)且解是非最优的. 解提示我们可以通过增加产出来降低成本.

(b)　如果 $\bar{\lambda}=0$ 和 $\bar{x},\bar{y}>0$，从 1(c)，

$$-10\bar{x}+80=0 \quad -2\bar{y}-32=0$$

$$\bar{x}=8 \qquad \bar{y}=16$$

这满足新约束 $x+y\geqslant 20$ 且不违反任何库恩-塔克条件，因此最优解是

$$\bar{x}=8,\quad \bar{y}=16,\quad \bar{\lambda}=0$$

由于 $\bar{\lambda}=0$，约束是松弛的. 公司可以通过超额生产，以降低成本.

13.39　最大化效用函数

$$u=xy$$

满足下面的预算和饮食约束

$$3x+4y\leqslant 144 \qquad \text{预算约束}$$

$$5x+2y\leqslant 120 \qquad \text{饮食约束}$$

拉格朗日函数和库恩-塔克条件是

$$\text{Max}U=xy+\lambda_1(144-3x-4y)+\lambda_2(120-5x-2y)$$

解 ☞ 1. (a)　$U_x=\bar{y}-3\bar{\lambda}_1-5\bar{\lambda}_2\leqslant 0$　　$U_y=\bar{x}-4\bar{\lambda}_1-2\bar{\lambda}_2\leqslant 0$

(b)　$\bar{x}\geqslant 0$　　$\bar{y}\geqslant 0$

(c)　$\bar{x}(\bar{y}-3\bar{\lambda}_1-5\bar{\lambda}_2)=0$　　$\bar{y}(\bar{x}-4\bar{\lambda}_1-2\bar{\lambda}_2)=0$

2. (a)　$U_{\lambda_1}=144-3\bar{x}-4\bar{y}\geqslant 0$　　$U_{\lambda_2}=120-5\bar{x}-2\bar{y}\geqslant 0$

(b)　$\bar{\lambda}_1\geqslant 0$　　$\bar{\lambda}_2\geqslant 0$

(c)　$\bar{\lambda}_1(144-3\bar{x}-4\bar{y})=0$　　$\lambda_2(120-5\bar{x}-2\bar{y})=0$

3. 给定目标函数的性质，我们假定选择变量 $\bar{x},\bar{y}$ 都不能等于零. 否则效用函数 $u=xy=0$. 如果 $\bar{x}$，$\bar{y}>0$，从 1(c)

$$\bar{y}-3\lambda_1-5\lambda_2=0$$

$$\bar{x}-4\lambda_1-2\lambda_2=0$$

注意到 $MU_x=u_x=\bar{y}$，$MU_y=u_y=\bar{x}$，并假定 $MU's>0$，两个 $\lambda's$ 不能等于零，因此至少有一个约束是紧的. 这留给我们三种可能性：(a)　$\bar{\lambda}_1>0,\bar{\lambda}_2=0$，(b)　$\bar{\lambda}_1=0,\bar{\lambda}_2>0$ 和(c)　$\bar{\lambda}_1>0,\bar{\lambda}_2>0$. 我们依次检验每一种可能性.

(a)　$\bar{\lambda}_1>0,\bar{\lambda}_2=0,\bar{x},\bar{y}>0$. 从 1(c)和 2(c)中条件，我们得到四个等式，其中三个要求求解.

$$\bar{y}-3\bar{\lambda}_1-5\bar{\lambda}_2=0$$

$$\bar{x}-4\bar{\lambda}_1-2\lambda_2=0$$

$$144-3\bar{x}-4\bar{y}=0$$

$$\bar{\lambda}_2=0$$

把这三个为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 4\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -144\end{bmatrix}$$

并用克莱姆法则求解，这里$|A|=24$，$|A_1|=576$，$|A_2|=432$和$|A_3|=144$，我们有

$$x=24,\quad y=18,\quad \lambda_1=6$$

但是检验内部一致性问题时发现

$$U_{\lambda_2}=120-5(24)-2(18)=-36<0$$

这显然违反要求$\partial U/\partial \lambda_i \geqslant 0$的库恩-塔克条件，因此解不是最优的.

(b) $\bar{\lambda}_1=0, \bar{\lambda}_2>0, \bar{x}, \bar{y}>0$. 从1(c)和2(c)中条件，我们得到有四个等式，其中三个要求求解

$$\bar{y}-3\bar{\lambda}_1-5\bar{\lambda}_2=0$$
$$\bar{x}-4\bar{\lambda}_1-2\bar{\lambda}_2=0$$
$$\bar{\lambda}_1=0$$
$$120-5\bar{x}-2\bar{y}=0$$

把这三个置为矩阵形式，并用克莱姆法则求解

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \end{bmatrix}$$

我们有$|A|=20$，$|A_1|=240$，$|A_2|=600$和$|A_3|=120$，及

$$\bar{x}=12,\quad \bar{y}=30,\quad \bar{\lambda}_2=6$$

但是再次检验内部一致性问题时，发现

$$U_{\lambda_1}=144-3(12)-4(30)=-12<0$$

这违反库恩-塔克条件，因此解不是最优.

(c) $\bar{\lambda}_1>0, \bar{\lambda}_2>0, \bar{x}, \bar{y}>0$. 从1(c)和2(c)，四个导数都是严格等式，我们把它们写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -144 \\ -120 \end{bmatrix}$$

从克莱姆法则，这里$|A|=196$，$|A_1|=2688$，$|A_2|=5040$，$|A_3|=240$和$|A_4|=864$，我们找到最优解，它没有违反任何条件：

$$\bar{x}=13.71,\quad \bar{y}=25.71,\quad \bar{\lambda}_1=1.22,\quad \bar{\lambda}_2=4.41$$

13.40 用(a)图形证实问题13.39的结论并(b)解释图说明了什么.

解 (a) 见图13-3.

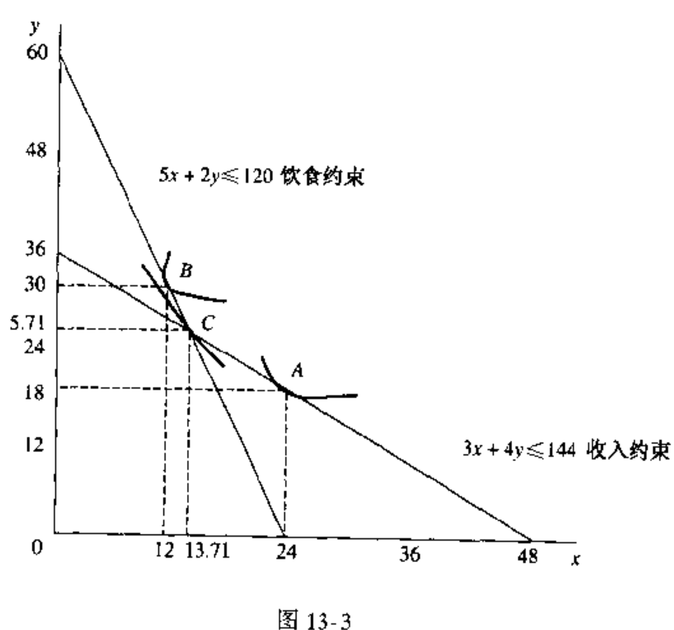


图13-3

(b) 在点A，$\bar{x}=24, \bar{y}=18$，收入约束刚好满足，但违反饮食约束. 因此A不能是最优. 在点B，$\bar{x}$

$=12, y=30$，饮食约束刚好满足，但违反收入约束．因此 B 不能是最优．在点 $C, \bar{x}=13.71, \bar{y}=25.71$，收入约束和饮食约束都是紧的，且，没有违反库恩-塔克条件．因此 C 是最优，并注意到它在两个约束的交叉处产生．

13.41 自然垄断的调控者，比如公用事业公司，遵从适当回报率政策，严格控制利润与资本的固定比例．但是政策导致投入的失真在部分调控行业中，它被称为 Averch-Johnson 效应．假定公司希望最大化利润

$$\pi(K,L)=E(K,L)-rK-wL$$

满足适当回报率约束

$$E(K,L)-wL\leqslant mK$$

这里 $E=$收益和 $E_K, E_L>0, E_{KK}, E_{LL}<0, E_{KK}E_{LL}>E_{KL}E_{LK}, r=$资金成本，$w=$工资，$m=$资本最大回报率，$m-r>0$，使用凹规划来证明 Averch-Johnson 失真效应的可能性．

解 ☞ 拉格朗日函数和库恩-塔克条件是

$$\Pi(K,L)=E(K,L)-rK-wL+\lambda[mK-E(K,L)+wL]$$

1. (a) $\Pi_K=E_K-r+\bar{\lambda}m-\bar{\lambda}E_K\leqslant 0$ $\quad\Pi_L=E_L-w-\bar{\lambda}E_L+\bar{\lambda}w\leqslant 0$

 (b) $\bar{K}\geqslant 0$ $\quad\bar{L}\geqslant 0$

 (c) $\bar{K}(E_K-r+\bar{\lambda}m-\bar{\lambda}E_K)=0$ $\quad\bar{L}(E_L-w-\bar{\lambda}E_L+\bar{\lambda}w)=0$

2. (a) $\Pi_\lambda=m\bar{K}+w\bar{L}-E(\bar{K},\bar{L})\geqslant 0$

 (b) $\bar{\lambda}\geqslant 0$

 (c) $\bar{\lambda}[m\bar{K}+w\bar{L}-E(\bar{K},\bar{L})]=0$

通常意义上假定 $\bar{K},\bar{L}\geqslant 0$，在 1(c)左边等式中加上和减去 $\bar{\lambda}r$，整理有

$$(1-\bar{\lambda})(E_K-r)+\bar{\lambda}(m-r)=0 \tag{13.27}$$

$$(1-\bar{\lambda})(E_L-w)=0 \tag{13.28}$$

$$m\bar{K}+w\bar{L}-E(\bar{K},\bar{L})\geqslant 0$$

$$\bar{\lambda}[m\bar{K}+w\bar{L}-E(\bar{K},\bar{L})]=0$$

如果在(13.27)中 $\bar{\lambda}=1$，则 $m-r=0$，且这与允许的最大回报率大于资本成本 $m>r$ 的假定矛盾．因此 $\bar{\lambda}\neq 1$．但是如果 $\bar{\lambda}\neq 1$，从(13.27)

$$E_K=r-\frac{\bar{\lambda}(m-r)}{(1-\bar{\lambda})} \tag{13.29}$$

和从(13.28)

$$E_L=w \tag{13.30}$$

用(13.30)除(13.29)

$$\frac{E_K}{E_L}=\frac{r-\left[\dfrac{\bar{\lambda}(m-r)}{(1-\bar{\lambda})}\right]}{w}=\frac{r}{w}-\frac{\bar{\lambda}(m-r)}{(1-\bar{\lambda})w} \tag{13.31}$$

如果 $\bar{\lambda}=0$，约束是松弛的，则我们有**未经调控**的最优值

$$\frac{E_K}{E_L}=\frac{r}{w}$$

这里 $E_K=MRP_K$ 和 $E_L=MRP_L$，用普通产出价格除左边的分子和分母，上面的表达变成

$$\frac{MP_K}{MP_L}=\frac{r}{w}$$

但是如果 $\bar{\lambda}\neq 0$，约束是紧的，调控使得最优解无法在边际生产正好等于要素各自价格的比率实现．因此如果 $\bar{\lambda}\neq 0$，产品的利润最大化水平将会存在失真效应．

13.42 (a) 指出 Averch-Johnson 效应预测的失真方向，(b) 根据以前的模型说明证明它所需要的条件．

解 ☞ (a) Averch-Johnson 效应预测的失真将导致一个比在自由竞争市场更高的 K/L 比率．如果使用多于最优数量的资本，资本的边际生产率将减少，且由 Averch-Johnson 效应预测结果是

$$\frac{MP_K}{MP_L}<\frac{r}{w}$$

(b)　依据(13.31)，只要下式成立，则上述结论成立.

$$\frac{\bar{\lambda}(m-r)}{(1-\bar{\lambda})w} > 0 \tag{13.32}$$

因为我们知道 $r>0, w>0$，且由一般常识 $m-r>0$，只有 $\bar{\lambda}<1$(13.32)将是正确的，为了决定 $\bar{\lambda}$ 的符号，我们转向比较静态技术.

已经确定 $\bar{x},\bar{y},\bar{\lambda}\neq 0$，我们知道库恩-塔克条件的三个偏导数都必须是等式

$$(1-\bar{\lambda})E_K - r + \bar{\lambda}m = 0$$

$$(1-\bar{\lambda})(E_L - w) = 0$$

$$m\bar{K} - w\bar{L} - E(\bar{K},\bar{L}) = 0$$

这些方程和我们将获得的一阶条件相同.

$$\text{Max}\pi(K,L) = E(K,L) - rK - wL$$

满足

$$E(K,L) - wL = mK$$

最优化的二阶条件要求海赛矩阵为正的

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = \begin{vmatrix} (1-\bar{\lambda})E_{KK} & (1-\bar{\lambda})E_{KL} & m-E_K \\ (1-\bar{\lambda})E_{LK} & (1-\bar{\lambda})E_{LL} & w-E_L \\ m-E_K & w-E_L & 0 \end{vmatrix} > 0$$

沿第三行展开

$$|\boldsymbol{H}| = (m-E_K)[(w-E_L)(1-\bar{\lambda})E_{KL} - (m-E_K)(1-\bar{\lambda})E_{LL}]$$
$$- (w-E_L)[(w-E_L)(1-\bar{\lambda})E_{KK} - (m-E_K)(1-\bar{\lambda})E_{LK}]$$

因为在最优点 $w=E_L$，所有含有$(w-E_L)$项$=0$，留下

$$|\bar{\boldsymbol{H}}| = -(m-E_K)^2(1-\bar{\lambda})E_{LL}$$

因为$|\boldsymbol{H}|>0$，

$$(1-\bar{\lambda})E_{LL} < 0$$

因为我们以前在严格凹的假设下有 $E_{LL}<0$，从而

$$\bar{\lambda} < 1$$

由于 $\bar{\lambda}<1$，(13.22)>0 又从(13.31)，有

$$\frac{MP_K}{MP_L} < \frac{r}{w} \qquad \text{Q.E.D.}$$

第十四章　积分学：不定积分

14.1　积分

在第三章到第六章我们主要讲解了微分，微分是用来测量函数的变化率．我们知道微分法就是求函数 $F(x)$的导数 $F'(x)$的过程．然而通常在经济领域里，我们只知道函数的变化率 $F'(x)$且想求原函数．求微分法的逆过程及已知微分求解原函数的过程叫做**积分**或**反微分**．原函数 $F(x)$就称作 $F'(x)$**积分**或**原函数**．

例 1　简单的说，令 $f(x)=F'(x)$，则 $f(x)$ 的原函数的数学表达式为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

这里等式的左边读作"f 关于 x 的不定积分"符号 $\int$ 表示积分符号，$f(x)$是被积函数，c 是积分常数，它将在例 3 中说明．

14.2　积分法则

以下的积分法则是通过逆推相应的微分法则获得的，很容易验证它们的正确性．因为积分的导数一定等于被积函数．每条法则在例 2 和习题 14.1～14.6 都由详细阐述．

法则 1　常数 k 的积分是

$$\int k\mathrm{d}x = kx + c$$

法则 2　1 的积分(简单写作 $\mathrm{d}x$ 而不是 $1\mathrm{d}x$)是

$$\int \mathrm{d}x = x + c$$

法则 3　幂函数 x^n 的积分，这里 $n\neq-1$ 应用幂法则表示为

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (n\neq-1)$$

法则 4　x^{-1}(或 $1/x$)的积分是

$$x^{-1}\mathrm{d}x = \ln x + c \qquad (x>0)$$

之所以加上 $x>0$ 是因为只有正数才有对数，对于负数

$$\int x^{-1}\mathrm{d}x = \ln|x| + c \qquad (x\neq 0)$$

法则 5　指数函数的积分是

$$\int a^{kx}\mathrm{d}x = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + c$$

法则 6　自然指数函数的积分是

$$\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + c \quad 因为 \quad \ln\mathrm{e} = 1$$

法则 7　函数的常数倍的积分等于函数积分的常数倍

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$$

法则 8　两个或更多的函数的和或差的积分等于它们分别积分的和或差

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

法则 9　函数的负数的积分等于函数积分的负数

$$\int -f(x)\mathrm{d}x = -\int f(x)\mathrm{d}x$$

例 2　以下举例说明积分法则.读者可以自己验证一下,看看积分的导数是否等于被积函数.

(i)

$$\int 3\mathrm{d}x = 3x + c \qquad \text{(法则 1)}$$

(ii)

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c \qquad \text{(法则 3)}$$

(iii)

$$\int 5x^4\mathrm{d}x = 5\int x^4\mathrm{d}x \qquad \text{(法则 7)}$$

$$= 5\left(\frac{1}{5}x^5 + c_1\right) \qquad \text{(法则 3)}$$

$$= x^5 + c$$

这里 c_1 和 c_2 都是任意常数且 $5c_1 = c$,由于 c 是一个任意常数所以在前面的积分过程中可以忽略而在最后的结果中写出.

(iv)

$$\int(3x^3 - x + 1)\mathrm{d}x = 3\int x^3\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x \qquad \text{(法则 7,8,9)}$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}x^4\right) - \frac{1}{2}x^2 + x + c \qquad \text{(法则 2,3)}$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

(v)

$$\int 3x^{-1}\mathrm{d}x = 3\int x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \text{(法则 7)}$$

$$= 3\ln|x| + c \qquad \text{(法则 4)}$$

(vi)

$$\int 2^{3x}\mathrm{d}x = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c \qquad \text{(法则 5)}$$

(vii)

$$\int 9\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}}{-3} + c \quad \text{(法则 6)}$$

$$= -3\mathrm{e}^{-3x} + c$$

例 3　如果函数之间相差一个常数,那么它们有相同的导数.对任意 k,函数 $F(x) = 2x + k$ 有相同的导数 $F'(x) = f(x) = 2$.其逆显然,即 $\int 2\mathrm{d}x$ 一定是无数个彼此相差一个常数的函数的不定积分.积分常数 c 代表任意常数值,这些常数是原函数的一部分,只不过在利用微分法则时被预先排除了.

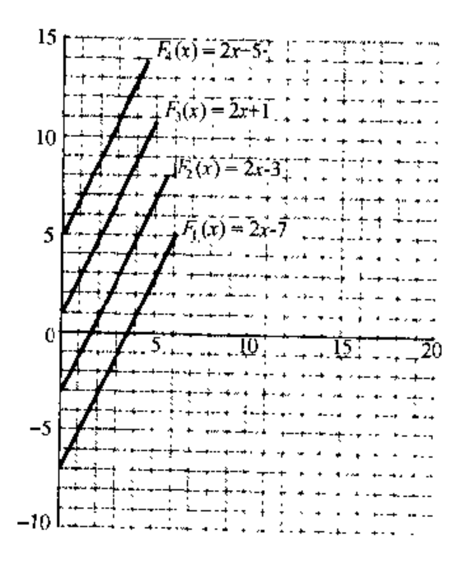


图 14-1

不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$ 由于 c 是不确定的,所以它的曲线图是一组平行的曲线,也就是说它们中的任意一条在 x 点的斜率都是 $f(x)$,图 14-1 表示的就是不定积分 $\int 2\mathrm{d}x = 2x + c$ 当 c 分别等于 -7,

$-3,1,5$ 时的图形,若 $c=0$ 曲线是通过原点的.

14.3 初始条件和边界条件

在许多问题中给出了初始条件(当 $x=0$ 时 $y=y_0$)或边界条件(当 $x=0$ 时 $y=y_0$),那么我们就可以惟一的确定微分常数.由于 c 的确定,那么根据初始条件和边界条件就可以从曲线族惟一的刻画出一条曲线,如例3和习题14.3~14.5所示.

例4 给定边界条件当 $x=3$ 时,$y=11$,积分 $y=\int 2\mathrm{d}x$ 计算如下:

$$y=\int 2\mathrm{d}x=2x+c$$

在 $x=3$ 时代入 $y=11$

$$11=2(3)+c \qquad c=5$$

因此,$y=2x+5$.注意即使 c 是确定了的,$\int 2\mathrm{d}x$ 仍表示一个不定积分,因为 x 是不确定的,因此,积分 $2x+5$ 仍存在多个可能值.

14.4 积分代换

两个关于 x 的可微函数的乘积或商的积分,例如:

$$\int 12x^2(x^3+2)\mathrm{d}x$$

不能利用以上的法则直接求出,然而如果被积函数能被表达成另一个函数 u 和它的导数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 的常数倍,那么积分代换就成为可能,把被积函数 $f(x)$ 用函数 u 和它的导数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 表示,并且关于 x 积分.

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}u=F(u)+c$$

这种代换方法是微分中链式法则和广义幂函数法则的逆推,参见例5.6和习题14.7~14.18.

例5 应用代换法,求解不定积分

$$\int 12x^2(x^3+2)\mathrm{d}x$$

解 ☞ 1. 首先要确定被积函数能转换成另一个函数 u 和它的导数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 的乘积的常数倍,(a) 令 u 等于含有自变量的绝对值的幂指数最高的那个函数.这里令 $u=x^3+2$.(b) 求 u 的导数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=3x^2$.(c) 求 $\mathrm{d}x$ 代数表达式 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/3x^2$.(d) 在原积分函数中用 u 代替 x^3+2,用 $\mathrm{d}u/3x^2$ 代替 $\mathrm{d}x$

$$\int 12x^2(x^3+2)\mathrm{d}x=\int 12x^2\cdot u\cdot\frac{\mathrm{d}u}{3x^2}=\int 4u\mathrm{d}u=4\int u\mathrm{d}u$$

这里4是 u 的常数倍.

2. 利用法则3,求关于 u 的积分,在积分的第一步忽略 c

$$4\int u\mathrm{d}u=4\left(\frac{1}{2}u^2\right)=2u^2+c$$

3. 然后用 x^3+2 代替 u,转换为起始问题.

$$\int 12x^2(x^3+2)\mathrm{d}x=2u^2+c=2(x^3+2)^2+c$$

4. 利用广义幂函数法则或链式法则求微分来检验答案.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[2(x^3+2)^2+c]=4(x^3+2)(3x^2)=12x^2(x^3+2)$$

见习题14.7~14.18.

例6　求积分 $\int 4x(x+1)^3\mathrm{d}x$.

解　☞ 令 $u=x+1$,则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=1$ 且 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/1=\mathrm{d}u$,在原被积函数中替代 $u=x+1$ 和 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

$$\int 4x(x+1)^3\mathrm{d}x=\int 4xu^3\mathrm{d}u=4\int xu^3\mathrm{d}u$$

由于 x 是变量的,不能被提出来,所以原被积函数不能转变成 $u\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 的常数倍,因此,代换法就无效了.这可以用分部积分来求解.

14.5　分部积分法

若被积函数是关于 x 的可微函数的乘积或商,且不能表示成 $u\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 的常数倍,则通常利用分部积分法,这个方法来源于求一个乘积微分的逆过程.从3.7.5节的乘积法则我们可以看出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

对导数积分

$$f(x)g(x)=\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

那么等式右边第一个积分项就可表示为

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\mathrm{d}x \tag{14.1}$$

见例7.8和习题14.19~14.24.

如果是更加复杂的函数,通常使用积分表.积分表提供了500多种不同函数的积分公式,它们可以在数学手册中找到.

例7　应用分部积分法求以下积分

$$\int 4x(x+1)^3\mathrm{d}x$$

解　☞ 1.按(14.1)的公式,将被积函数分为两部分,按照一般法则把第一个较简单的函数当作 $f(x)$,比较复杂的当作 $g'(x)$,令 $f(x)=4x$ 和 $g'(x)=(x+1)^3$,那么 $f'(x)=4$,$g(x)=\int(x+1)^3\mathrm{d}x$,而利用幂函数法则(法则3),求得 $g(x)$的积分为

$$g(x)=\int(x+1)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(x+1)^4+c_1$$

2.把 $f(x)f'(x)$,$g(x)$分别代入(14.1)中,注意在公式中没有使用 $g'(x)$.

$$\begin{aligned}\int 4x(x+1)^3\mathrm{d}x&=f(x)g(x)-\int[g(x)f'(x)]\mathrm{d}x\\&=4x\left[\frac{1}{4}(x+1)^4+c_1\right]-\int\left[\frac{1}{4}(x+1)^4+c_1\right](4)\mathrm{d}x\\&=x(x+1)^4+4c_1x-\int[(x+1)^4+4c_1]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3.利用法则3计算最后的积分结果

$$\begin{aligned}\int 4x(x+1)^3\mathrm{d}x&=x(x+1)^4+4c_1x-\frac{1}{5}(x+1)^5-4c_1x+c\\&=x(x+1)^4-\frac{1}{5}(x+1)^5+c\end{aligned}$$

记住 c_1 项在最后的结果中并没有出现,这在分部积分中是常见的,c_1 因此被假设为0,且在将来问题的求解过程中通常不包含在内.

4.令 $y(x)=x(x+1)^4-\frac{1}{5}(x+1)^5+c$,利用乘法和广义幂函数法则检验

$$y'(x) = [x \cdot 4(x+1)^3 + (x+1)^4 \cdot 1] - (x+1)^4 = 4x(x+1)^3$$

例 8 求解积分 $\int 2xe^x dx$ 如下：

解 ☞ 令 $f(x)=2x$ 和 $g'(x)=e^x$，那么 $f'(x)=2$，根据法则 6，$g(x)=\int e^x dx = e^x$，代入(14.1)

$$\int 2xe^x dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$=2xe^x - \int e^x \cdot 2dx = 2xe^x - 2\int e^x dx$$

再次应用法则 6，并且加上积分常数

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - 2e^x + c$$

那么，令 $y(x)=2xe^x-2e^x+c$，检验

$$y'(x) = 2x \cdot e^x + e^x \cdot 2 - 2e^x = 2xe^x$$

14.6 经济中的应用

净投资 I 定义为时间 t 内的资本存量构成 K 的变化率，假如这个过程是连续的，$I(t)=dK(t)/dt=K'(t)$. 根据投资率可以估计资本存量的水平，资本存量就是净投资关于时间的积分.

$$K_t = \int I(t)dt = K(t) + c = K(t) + K_0$$

这里 $c=$ 初始的资本存量 K_0

类似地，利用积分可以根据边际成本来估算总成本，因为边际成本就是产出增量而引起的总成本的变化，$MC=dTC/dQ$，且只有可变成本随着产出水平的变化而变化.

$$TC = \int MCdQ = VC + c = VC + FC$$

因为 $c=$ 固定的或初始成本 FC. 经济分析致力于寻找变量的时间路径或者力求决定变量是否随着时间的推移将收敛于平衡点. 类似的应用见例 9 和习题 14.25～14.35.

例 9 给定净投资率 $I(t)=140t^{3/4}$，且当 $t=0$ 时初始资本存量是 150. 求资本函数 K，即时间路径线 $K(t)$.

解 ☞
$$K=\int 140t^{3/4}dt = 140\int t^{3/4}dt$$

利用幂函数法则

$$K = 140\left(\frac{4}{7}t^{7/4}\right) + c = 80t^{7/4} + c$$

由于 $c=K_0=150$，因此 $K=80t^{7/4}+150$

习 题 解 答

不定积分

14.1 求下列积分，然后，请读者自己用对积分的求导检验其是否等于被积函数.

(a) $\int 3.5dx$

解 ☞
$$\int 3.5dx = 3.5x + c \quad \text{(法则 1)}$$

(b) $\int -\frac{1}{2}dx$

解 ☞
$$\int -\frac{1}{2}dx = -\int \frac{1}{2}dx = -\frac{1}{2}x + c \quad \text{(法则 1,9)}$$

(c) $\int dx$

解 ☞ $$\int dx = x + c \quad \text{(法则 2)}$$

(d) $\int x^5 dx$

解 ☞ $$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c \quad \text{(法则 3)}$$

(e) $\int 4x^3 dx$

解 ☞ $$\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx \quad \text{(法则 7)}$$
$$= 4\left(\frac{1}{4}x^4\right) + c = x^4 + c \quad \text{(法则 3)}$$

(f) $\int x^{2/3} dx$

解 ☞ $$\int x^{2/3} dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(g) $\int x^{-1/5} dx$

解 ☞ $$\int x^{-1/5} dx = \frac{5}{4}x^{4/5} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(h) $\int 4x^{-2} dx$

解 ☞ $$\int 4x^{-2} dx = -4x^{-1} + c = -\frac{4}{x} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(i) $\int x^{-5/2} dx$

解 ☞ $$\int x^{-5/2} dx = -\frac{2}{3}x^{-3/2} + c = \frac{-2}{3\sqrt{x^3}} + c \quad \text{(法则 3)}$$

14.2 求下列积分.

(a) $\int \frac{dx}{x}$

解 ☞ $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \quad \text{(法则 4)}$$

(b) $\int 5x^{-1} dx$

解 ☞ $$\int 5x^{-1} dx = 5\ln|x| + c \quad \text{(法则 7, 4)}$$

(c) $\int \frac{1}{3x} dx$

解 ☞ $$\int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}\ln|x| + c \quad \text{(法则 7, 4)}$$

(d) $\int \sqrt{x}\, dx$

解 ☞ $$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(e) $\int \frac{dx}{x^4}$

解 ☞ $$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

解 ☞ $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{3}{2}x^{2/3} + c \quad \text{(法则 3)}$$

(g) $\int (5x^3 + 2x^2 + 3x) dx$

解 ☞ $$\int (5x^3 + 2x^2 + 3x) dx = 5\int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 3\int x dx \quad \text{(法则 7, 8)}$$
$$= 5\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + c \quad \text{(法则 3)}$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$$

(h)　$\int (2x^6 - 3x^4)\mathrm{d}x$

解 ☞　$\int (2x^6 - 3x^4)\mathrm{d}x = \frac{2}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + c$　　（法则 3,7,8,9）

14.3　求积分 $y = \int (x^{1/2} + 3x^{-1/2})\mathrm{d}x$，初始条件当 $x=0$ 时 $y=0$.

解 ☞　$y = \int (x^{1/2} + 3x^{-1/2})\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + c$

代入初始条件，当 $x=0$ 时 $y=0$，得 $c=0$ 因此 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$.

14.4　求积分 $y = \int (2x^5 - 3x^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}x$ 给定初始条件当 $x=0$ 时 $y=6$.

解 ☞　$y = \int (2x^5 - 3x^{-1/4})\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^6 - 4x^{3/4} + c$

代入 $y=6, x=0$，得 $c=6$，因此 $y = \frac{1}{3}x^6 - 4x^{3/4} + 6$.

14.5　求积分 $y = \int (10x^4 - 3)\mathrm{d}x$，给定边界条件当 $x=1$ 时 $y=21$.

解 ☞　$y = \int (10x^4 - 3)\mathrm{d}x = 2x^5 - 3x + c$

代入 $y=21, x=1$，有 $21 = 2(1)^5 - 3(1) + c$，得 $c=22$

$$y = 2x^5 - 3x + 22$$

14.6　求下列积分

(a)　$\int 2^{4x}\mathrm{d}x$

解 ☞　$\int 2^{4x}\mathrm{d}x = \frac{2^{4x}}{4\ln 2} + c$　　（法则 5）

(b)　$\int 8^x\mathrm{d}x$

解 ☞　$\int 8^x\mathrm{d}x = \frac{8^x}{\ln 8} + c$

(c)　$\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x$

解 ☞　$\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} + c = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + c$　　（法则 6）

(d)　$\int 16\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x$

解 ☞　$\int 16\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{d}x = \frac{16\mathrm{e}^{-4x}}{-4} + c = -4\mathrm{e}^{-4x} + c$

(e)　$\int (6\mathrm{e}^{3x} - 8\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$.

解 ☞　$\int (6\mathrm{e}^{3x} - 8\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x = \frac{6\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{8\mathrm{e}^{-2x}}{-2} + c = 2\mathrm{e}^{3x} + 4\mathrm{e}^{-2x} + c$

积分代换

14.7　利用代换法求解以下积分，请读者自己检验结果，已知 $\int 10x(x^2+3)^4\mathrm{d}x$

解 ☞ 令 $u = x^2 + 3$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x$，$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$. 代换原被积函数，并把它简化为 $u\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 的函数形式

$$\int 10x(x^2+3)^4\mathrm{d}x = \int 10xu^4\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5\int u^4\mathrm{d}u$$

利用幂函数法则，求积分 $5\int u^4\mathrm{d}u = 5\left(\frac{1}{5}u^5\right) = u^5 + c$.

代入 $u = x^2 + 3$ 得，$\int 10x(x^2+3)^4\mathrm{d}x = u^5 + c = (x^2+3)^5 + c$

14.8　重新考虑问题 14.1，设 $\int x^4(2x^5-5)^4\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=2x^5-5$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=10x^4$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/10x^4$，替换原被积函数并积分

$$\frac{1}{10}\int u^4\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}u^5\right)=\frac{1}{50}u^5+c$$

代换

$$\int x^4(2x^5-5)^4\mathrm{d}x=\frac{1}{50}u^5+c=\frac{1}{50}(2x^5-5)^5+c$$

14.9　重新考虑问题 14.7，设 $\int(x-9)^{7/4}\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=x-9$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=1$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，代换得

$$\int(x-9)^{7/4}\mathrm{d}x=\int u^{7/4}\mathrm{d}$$

积分

$$\int u^{7/4}\mathrm{d}u=\frac{4}{11}u^{11/4}+c$$

代换得

$$\int(x-9)^{7/4}\mathrm{d}x=\frac{4}{11}(x-9)^{11/4}+c$$

只要 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=1$，则幂函数法则可以直接应用到积分代换中去.

14.10　重新考虑问题 14.7，设 $\int(6x-11)^{-5}\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=6x-11$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=6$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/6$，代换

$$\int(6x-11)^{-5}\mathrm{d}x=\int u^{-5}\frac{\mathrm{d}u}{6}=\frac{1}{6}\int u^{-5}\mathrm{d}u$$

积分

$$\frac{1}{6}\int u^{-5}\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{-4}u^{-4}\right)=-\frac{1}{24}u^{4}+c$$

代换得

$$\int(6x-11)^{-5}\mathrm{d}x=-\frac{1}{24}(6x-11)^{-4}+c$$

注意，这里 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=6\neq1$，则不能直接应用幂函数法则.

14.11　重新考虑问题 14.7，已知 $\int\frac{x^2}{(4x^3+7)^2}\mathrm{d}x$.

解 ☞

$$\int\frac{x^2}{(4x^3+7)^2}=\int x^2(4x^3+7)^{-2}\mathrm{d}x$$

令 $u=4x^3+7$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=12x^2$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/12x^2$，作代换

$$\int x^{2u^{-2}}\frac{\mathrm{d}u}{12x^2}=12\int u^{-1}\mathrm{d}u$$

积分

$$\frac{1}{12}\int u^{-2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{12}u^{-1}+c$$

代换

$$\int\frac{x^2}{(4x^3+7)^2}=-\frac{1}{12(4x^3+7)}+c$$

14.12　重新考虑问题 14.7，设 $\int\frac{6x^2+4x+10}{(x^3+x^2+5x)^3}\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=x^3+x^2+5x$，则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=3x^2+2x+5$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/(3x^2+2x+5)$，代换得

$$\int(6x^2+4x+10)u^{-3}\frac{\mathrm{d}u}{3x^2+2x+5}=2\int u^{-3}\mathrm{d}u$$

积分

$$2\int u^{-3}\mathrm{d}u=-u^{-2}+c$$

代换

$$\int \frac{6x^2+4x+10}{(x^3+x^2+5x)^3}dx = -\frac{1}{(x^3+x^2+5x)^2}+c$$

14.13　重新考虑问题 14.7，设 $\int \frac{dx}{9x-5}$.

解 ☞

$$\int \frac{dx}{9x-5} = \int (9x-5)^{-1}dx$$

令 $u=9x-5$, $du/dx=9$, $dx=du/9$，代入得

$$\int u^{-1}\frac{du}{9} = \frac{1}{9}\int u^{-1}du$$

利用法则 4，$\frac{1}{9}\int u^{-1}du = \frac{1}{9}\ln|u|+c$. 由于 u 可以大于 0 也可以小于 0，而只有正数方可取对数．所以经常取 u 的绝对值形式，见法则 4，代换得

$$\int \frac{dx}{9x-5} = \frac{1}{9}\ln|9x-5|+c$$

14.14　重新考虑问题 14.7，设 $\int \frac{3x^2+2}{4x^3+8x}dx$.

解 ☞ 令 $u=4x^3+8x$, $du/dx=12x^2+8$, $dx=du/(12x^2+8)$，代换得

$$\int (3x^2+2)u^{-1}\frac{du}{12x^2+8} = \frac{1}{4}\int u^{-1}du$$

积分

$$\frac{1}{4}\int u^{-1}du = \frac{1}{4}\ln|u|+c$$

代换

$$\int \frac{3x^2+2}{4x^3+8x}dx = \frac{1}{4}\ln|4x^3+8x|+c$$

14.15　利用代换法求积分 $\int x^3e^{x^4}dx$，检验你的答案.

解 ☞ 令 $u=x^4$ 则 $du/dx=4x^3$ 和 $dx=du/4x^3$，代换，注意 u 在这里是指数

$$\int x^3e^u\frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int e^u du + c$$

利用法则 6 积分

$$\frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c$$

代换

$$\int x^3e^{x^4}dx = \frac{1}{4}e^{x^4}+c$$

14.16　重新考虑问题 14.15，设 $\int 24xe^{3x^2}dx$.

解 ☞ 令 $3x^2$, $du/dx=6x$, $dx=du/6x$，代换得

$$\int 24xe^u\frac{du}{6x} = 4\int e^u du$$

积分

$$4\int e^u du = 4e^u + c$$

代换

$$24xe^{3x^2}dx = 4e^{3x^2}+c.$$

14.17　重新考虑问题 14.15，设 $\int 14e^{2x+7}dx$.

解 ☞ 令 $u=2x+7$ 则 $du/dx=2$ 和 $dx=du/2$，代换得

$$\int 14e^u\frac{du}{2} = 7\int e^u du = 7e^u + c$$

代换

$$\int 14e^{2x+7}dx = 7e^{2x+7} + c.$$

14.18　重新考虑问题 14.15,设 $\int 5xe^{5x^2+3}dx$.

解 ☞ 令 $u = 5x^2 + 3$,则 $du/dx = 10x$, $dx = du/10x$,代换得

$$\int 5xe^u \frac{du}{10x} = \frac{1}{2}\int e^u du$$

积分

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c$$

代换

$$\int 5xe^{5x^2+3}dx = \frac{1}{2}e^{5x^2+3} + c.$$

分部积分

14.19　利用分部积分法计算以下积分,注意养成检验你的答案的习惯.设 $\int 15x(x+4)^{3/2}dx$.

解 ☞ 令 $f(x) = 15x$,则 $f'(x) = 15$,令 $g'(x) = (x+4)^{3/2}$,则 $g(x) = \int(x+4)^{3/2}dx = \frac{2}{3}(x+4)^{5/2}$, 代入(14.1)

$$\int 15x(x+4)^{3/2}dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$= 15x\left[\frac{2}{5}(x+4)^{\frac{5}{2}}\right] - \int \frac{2}{5}(x+4)^{5/2}dx = 6x(x+1)^{5/2} - 6\int(x+1)^{5/2}dx$$

求解余下的积分

$$\int 15x(x+4)^{3/2}dx = 6x(x+4)^{5/2} - \frac{12}{7}(x+4)^{7/2} + c$$

14.20　重新考虑问题 14.19,设 $\int \frac{2x}{(x-8)^3}dx$.

解 ☞ 令 $f(x) = 2x$, $f'(x) = 2$,且 $g'(x) = (x-8)^{-3}$,则 $g(x) = \int(x-8)^{-3}dx = -\frac{1}{2}(x-8)^{-2}$, 代入(14.1)

$$\int \frac{2x}{(x-8)^3}dx = 2x\left[-\frac{1}{2}(x-8)^{-2}\right] - \int -\frac{1}{2}(x-8)^{-2}2dx$$

$$= -x(x-8)^{-2} + \int(x-8)^{2}dx$$

最后一次积分得

$$\int \frac{2x}{(x-8)^3}dx = -x(x-8)^{-2} - (x-8)^{-1} + c = \frac{-x}{(x-8)^2} - \frac{1}{x-8} + c$$

14.21　重新考虑问题 14.19,设 $\int \frac{5x}{(x-1)^2}dx$.

解 ☞ 令 $f(x) = 5x$, $f'(x) = 5$, $g'(x) = (x-1)^{-2}$,则 $g(x) = \int(x-1)^{-1}dx = -(x-1)^{-1}$, 代入(14.1)

$$\int \frac{5x}{(x-1)^2}dx = 5x[-(x-1)^{-1} - \int -(x-1)^{-1}5dx = -5x(x-1)^{-1} + \int(x-1)^{-1}dx$$

再一次积分

$$\int \frac{5x}{(x-1)^2}dx = -5x(x-1)^{-1} + 5\ln|x-1| + c = \frac{-5x}{x-1} + 5\ln|x-1| + c$$

14.22　重新考虑问题 14.19,设 $\int 6xe^{x^2+7}dx$.

解 ☞ 令 $f(x)=6x, f'(x)=6, g'(x)=e^{x+7}$, $g(x)=\int e^{x+7}dx=e^{x+7}$, 利用(14.1)

$$\int 6xe^{x+7}dx = 6xe^{x+7} - \int e^{x+7}6dx = 6xe^{x+7} - 6\int e^{x+7}dx$$

再次积分

$$\int 6xe^{x+7}dx = 6xe^{x+7} - 6e^{x+7} + c$$

14.23 利用分部积分求解 $\int 16xe^{-(x+9)}dx$.

解 ☞ 令 $f(x)=16x, f'(x)=16, g'(x)=e^{-(x+9)}$, $g(x)=\int e^{-(x+9)}dx=-e^{-(x+9)}$, 利用(14.1)

$$\int 16xe^{-(x+9)}dx = -16xe^{-(x+9)} - \int -e^{-(x-9)}16dx = -16xe^{-(x+9)} + \int e^{-(x+9)}dx$$

再次积分

$$\int 16xe^{-(x+9)}dx = -16xe^{-(x+9)} - 16e^{-(x+9)} + c$$

14.24 重新考虑问题 14.23, 设 $\int x^2e^{2x}dx$.

解 ☞ 令 $f(x)=x^2, f'(x)=2x, g'(x)e^{2x}$, $g(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$, 代入 (14.1)

$$\int x^2e^{2x}dx = x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}(2x)dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx \tag{14.2}$$

对于余下的积分式再一次使用分部积分法, $f(x)=x, f'(x)=1, g'(x)=e^{2x}$和$g(x)=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$, 利用(14.1)

$$\int xe^{2x}dx = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

最后, 代入(14.2)

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

经济上的应用

14.25 净投资率是 $I=40t^{3/5}$. 当 $t=0$ 时的资本存量是 75, 求解资本函数 K.

解 ☞
$$K = \int Idt = \int 40t^{3/5}dt = 40\left(\frac{5}{8}t^{8/5}\right) + c = 25t^{8/5} + c$$

代入 $t=0$ 和 $K=75$,

$$75 = 0 + c \qquad c = 75$$

则 $K=25t^{8/5}+75$.

14.26 净投资率是 $60t^{1/3}$. 当 $t=1$ 时的资本存量是 85, 求解资本函数 K.

解 ☞
$$K = \int 60t^{1/3}dt = 45t^{4/3} + c$$

当 $t=1$ 和 $K=85$,

$$85 = 45(1) + c \qquad c = 40$$

则 $K=45t^{4/3}+40$.

14.27 边际成本是 $MC=dTC/dQ=25+30Q-9Q^2$. 固定成本是 55, 求(a) 总成本, (b) 平均成本, (c) 可变成本函数.

解 ☞ (a) $TC = \int MCdQ = \int(25+30Q-9Q^2)dQ = 25Q+15Q^2-3Q^3+c$

当 $Q=0$ 时, $FC=55$, $TC=FC=55$. 那么 $c=FC=55$ 且 $TC=25Q+15Q^2-3Q^3+55$.

(b) $AC=\frac{TC}{Q}=25+15Q-3Q^2+\frac{55}{Q}$

(c) $VC=TC-FC=25Q+15Q^2-3Q^3$

14.28 设 $MC=dTC/dQ=32+18Q-12Q^2$, $FC=43$. 求(a) TC, (b) AC, (c) VC 函数.

解 ☞ (a) $\mathrm{TC}=\int \mathrm{MC}dQ=\int(32+18Q-12Q^2)dQ=32Q+9Q^2-4Q^3+c$

当 $Q=0$ 时, $\mathrm{TC}=43$, $\mathrm{TC}=32Q+9Q^2-4Q^3+43$

(b) $\mathrm{AC}=\frac{\mathrm{TC}}{Q}=32+9Q-4Q^2+\frac{43}{Q}$

(c) $\mathrm{VC}=\mathrm{TC}-\mathrm{FC}=32Q+9Q^2-4Q^3$.

14.29 边际收益是 $\mathrm{MR}=d\mathrm{TR}/dQ=60-2Q-2Q^2$. 求(a) 总收益函数 TR 和(b) 需求函数 $P=f(Q)$.

解 ☞ (a) $\mathrm{TR}=\int \mathrm{MR}dQ=\int(60-2Q-2Q^2)dQ=60Q-Q^2-\frac{2}{3}Q^3+c$

当 $Q=0$ 时, $\mathrm{TR}=0$, 因此 $c=0$. 则 $\mathrm{TR}=60Q-q^2-\frac{2}{3}Q^3+c$

(b) $\mathrm{TR}=PQ$. 因此 $P=\mathrm{TR}/Q$, 也就是说需求函数和平均收益函数是相同的, 故 $P=\mathrm{AR}=\mathrm{TR}/Q=60-Q-\frac{2}{3}Q^2$.

14.30 设 $\mathrm{MR}=84-4Q-Q^2$, 求(a) 总收益函数和(b) 需求函数.

解 ☞ (a) $\mathrm{TR}=\int \mathrm{MR}dQ=\int(84-4Q-Q^2)dQ=84Q-2Q^2-\frac{1}{3}Q^3+c$

当 $Q=0$ 时, $\mathrm{TR}=0$. 因此 $c=0$. 则 $\mathrm{TR}=84Q-2Q^2-\frac{1}{3}Q^3$.

(b) $P=\mathrm{AR}=\frac{\mathrm{TR}}{Q}=84-2Q-\frac{1}{3}Q^2$.

14.31 由 $C=f(Y)$ 边际消费倾向是 $\mathrm{MPC}=dC/dY=f'(Y)$. 当收入是 0 时, $\mathrm{MPC}=0.8$, 消费量是 40, 求消费函数

$$C=\int f'(Y)dY=\int 0.8dY=0.8Y+c$$

解 ☞ 当 $Y=0$ 时, $C=40$. 那么 $c=40$ 和 $C=0.8Y+40$.

14.32 设 $dC/dY=0.6+0.1/\sqrt[3]{Y}=\mathrm{MPC}$, 且当 $Y=0$ 时, $C=45$. 求消费函数

$$C=\int\left(0.6+\frac{0.1}{\sqrt[3]{Y}}\right)dY=\int(0.6+0.1Y^{-1/3})dY=0.6Y+0.15Y^{2/3}+c.$$

解 ☞ 当 $Y=0$ 时, $C=45$. 则 $C=0.6Y+0.15Y^{2/3}+45$.

14.33 边际储蓄倾向是 $dS/dY=0.5-0.2Y^{-1/2}$. 当收入是 25 时, 储蓄减少 3.5. 也就是说, 当 $Y=25$ 时, $S=-3.5$. 求储蓄函数.

$$S=\int(0.5-0.2Y^{-1/2})dY=0.5Y-0.4Y^{1/2}+c$$

解 ☞ 当 $Y=25$ 时, $S=-3.5$.

$$-3.5=0.5(25)-0.4(\sqrt{25})+c \qquad c=-14$$

则 $S=0.5Y-0.4Y^{1/2}-14$.

14.34 设 $\mathrm{MC}=d\mathrm{TC}/dQ=12e^{0.5Q}$ 和 $\mathrm{FC}=36$. 求总成本.

$$\mathrm{TC}=\int 12e^{0.5Q}dQ=12\frac{1}{0.5}e^{0.5Q}+c=24e^{0.5Q}+c.$$

解 ☞ 当 $Q=0$ 时, $\mathrm{FC}=36$, $\mathrm{TC}=36$. 代换得 $36=24e^{0.5(0)}+c$. 因为 $e^0=1$, $36=24+c$, $c=12$, 则 $\mathrm{TC}=24e^{0.5Q}+12$. 注意, c 并不是总等于 FC.

14.35 设 $\mathrm{MC}=16e^{0.4Q}$ 和 $\mathrm{FC}=100$. 求 TC.

解 ☞ $$\mathrm{TC}=\int 16e^{0.4Q}dQ=16\left(\frac{1}{0.4}\right)e^{0.4Q}+c=40Qe^{0.4Q}+c$$

当 $Q=0$ 时, $\mathrm{TC}=100$

$$100=40e^0+c \qquad c=60$$

则 $\mathrm{TC}=40e^{0.4Q}+60$.

第十五章　积分学:定积分

15.1　曲线下的面积

对于无规则的曲线下的区域,例如 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的区域(如图 15-1(a)),我们没有该图形的面积计算公式,如果区间 $[a,b]$ 被分成 n 个子区间 $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$,等等,我们就可以构造出 $n-1$ 个矩形,每一个的高度等于函数在这个区间上的最小值,形如图 15-1(b),那么这些矩形的面积的和 $\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$ 就叫做黎曼和,它接近于但小于曲线下区域的真正面积.子区间越小,即 Δx_i 越小.被构造的矩形就会越多,矩形的面积和 $\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$ 就会越接近曲线下的真正面积,如果区间的数量 $n\to\infty$,那么每个区间变成了无限小 $\Delta x_i=\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}x$,那么曲线下的区域的面积 A 的数学表达式为

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

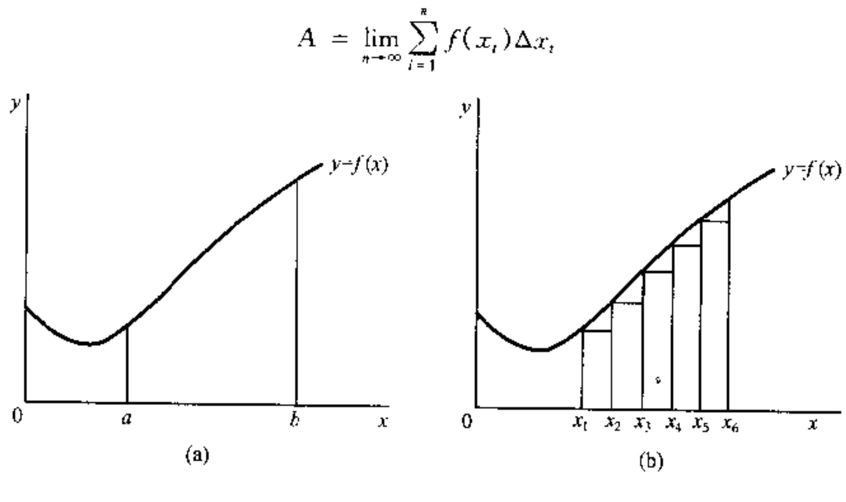


图 15-1

15.2　定积分

对于连续函数的曲线下的区域形如图 15-1,从 a 到 $b(a\leqslant b)$,其面积可以更简洁的表示为 $f(x)$ 在区间 a 到 b 上的定积分,其数学表达式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

这里左边读作"函数 $f(x)$ 的从 a 到 b 的积分",这里称 a 为积分的下限,b 为积分的上限,定积分与不定积分是不同的,不定积分是包含 $f(x)$ 的全部不定积分结果的一组函数,就像十四章例 3 中所阐述的,而定积分是利用积分理论(15.3 节)求出的一个实数.

15.3　积分的基本理论

积分的基本理论阐述的是连续函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分的值,可以由不定积分 $F(x)+c$ 在积分上限 b 处的值减去相同的不定积分 $F(x)+c$ 在积分下限 a 处的值,由于 c 是相同的,则积分常数可不计,数学表达式如下

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

这里符号 $|_a^b$, $]_a^b$ 或 $[\cdots]_a^b$ 表示 b 和 a 将用来替换 x,见例 1 和例 2 及习题 15.1~15.10.

例 1　求定积分

(1) $\int_1^4 10x\,dx$ (2) $\int_1^3 (4x^3+6x)\,dx$.

计算如下:1) $\int_1^4 10x\,dx = 5x^2 |_0^4 = 5(4)^2 - 5(1)^2 = 75$

2) $\int_1^4 (4x^3+6x)\,dx = [x^4+3x^2]_1^3 = [(3)^4+3(3)^2]-[(1)^4+3(1)^2] = 108-4 = 104$.

例 2 应用定积分求解图 15-2 在[0,20]区间内的曲线下的面积

$$A = \int_0^{20} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2|_0^{20} = \frac{1}{2}(20)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = 100$$

利用几何公式 $A=\frac{1}{2}xy$ 检验结果:

$$A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(20)(10) = 100$$

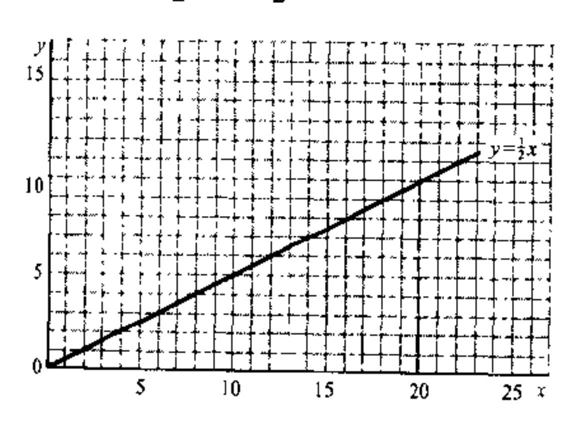


图 15-2

15.4 定积分的性质

1. 调换上下限位置,则改变定积分的符号.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{15.1}$$

2. 如果积分上下限相等,则定积分的值为 0.

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 \tag{15.2}$$

3. 定积分可以表示为在各子区间上积分的和.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad a \leqslant b \leqslant c \tag{15.3}$$

4. 具有相同积分上下限的定积分的和或差等于两个函数的和或差的积分.

$$\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx \tag{15.4}$$

5. 函数常数倍的定积分等于函数的定积分的常数倍.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{15.5}$$

见例 3 习题 15.11～15.14

例 3 为进一步阐述以上性质,求解以下定积分.

1. $\int_1^3 2x^3\,dx = -\int_3^1 2x^3\,dx$

解 ☞ $$\int_1^3 2x^3\,dx = \frac{1}{2}x^4|_1^3 = \frac{1}{2}(3)^4 - \frac{1}{2}(1)^4 = 40$$

$$\int_3^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}x^4 \Big|_3^1 = \frac{1}{2}(1)^4 - \frac{1}{2}(3)^4 = -40$$

2. $\int_5^5 (2x+3)dx = 0$

解 ☞　$\int_5^5 (2x+3)dx = [x^2+3x]_5^5 = [(5)^2+3(5)] - [(5)^2+3(5)] = 0$

3. $\int_0^4 6x dx = \int_0^3 6x dx + \int_3^4 6x dx$

解 ☞

$$\int_0^4 6x dx = 3x^2 \Big|_0^4 = 3(4)^2 - 3(0)^2 = 48$$

$$\int_0^3 6x dx = 3x^2 \Big|_0^3 = 3(3)^2 - 3(0)^2 = 27$$

$$\int_3^4 6x dx = 3x^2 \Big|_3^4 = 3(4)^2 - 3(3)^2 = 21$$

检验　　$48 = 27 + 21$

15.5　曲线间的面积

两条或更多的曲线间的区域的面积可以应用以上的定积分的性质求得，例 4 阐述了其步骤，在习题 15.15～15.18 中加以解决.

例 4　利用积分性质，在函数 $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ 和 $y_2 = -2x^2 + 4x + 1$ 之间从 $x = 0$ 到 $x = 2$ 的区域的面积可按如下步骤求得.

(a)　画出函数的曲线草图，在所求部分图上阴影，如图 15-3.

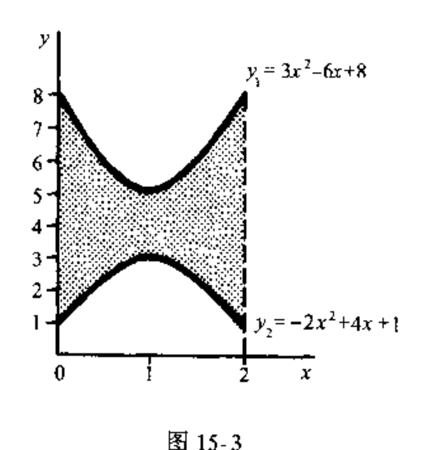


图 15-3

(b)　注意曲线间的关系，由于 y_1 在 y_2 之上，所求区域就是在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 之间，y_1 下的面积减去 y_2 下的面积，因此

$$A = \int_0^2 (3x^2 - 6x + 8)dx - \int_0^2 (-2x^2 + 4x + 1)dx$$

根据(15.4)

$$A = \int_0^2 [(3x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 4x + 1)]dx$$

$$= \int_0^2 (5x^2 - 10x + 7)dx$$

$$= \left(\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 7x\right)\Big|_0^2 = 7\frac{1}{3} - 0 = 7\frac{1}{3}$$

15.6　广义积分

一些曲线下的面积沿着 x 轴无限延伸，如图 15-4(a)所示，那么我们可以利用广义积分求

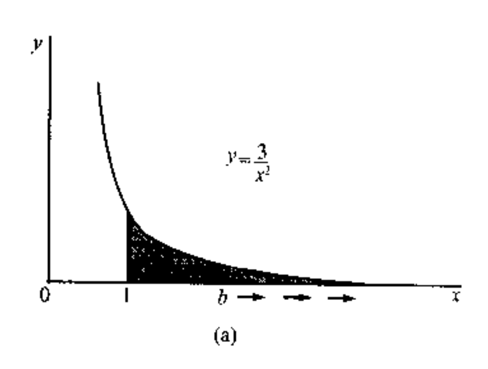
得一个定积分,如果其上限或下限是无穷大,则我们称其为广义积分.

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$$

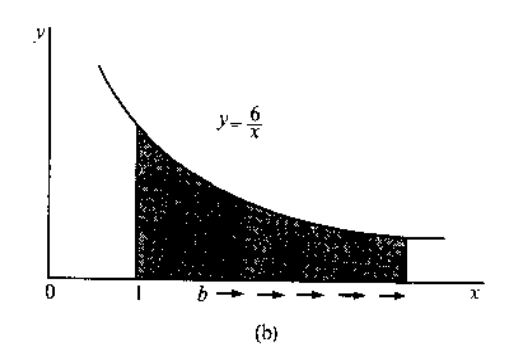
就是广义积分,因为∞不是一个确定的数,在 $F(x)$ 中不能替代 x.然而广义积分能够表示为其他积分的极限,如下定义

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

如果极限存在,则我们说这个广义积分是收敛的,积分有一个确定的值,且曲线下的区域面积可以计算出来,若极限不存在,则广义积分发散,这个积分就是无意义的,见例 5,习题 15.19~15.25.



(a)



(b)

图 15-4

例 5　求广义积分(a) $\int_1^{\infty}\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x$,(b) $\int_1^{\infty}\frac{6}{x}\mathrm{d}x$.

解　如图 15-4(a),(b)所示,计算如下

(a)

$$\int_1^{\infty}\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{3}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-3}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-3}{b}-\frac{(-3)}{1}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-3}{b}+3\right) = 3$$

因为当 $b\to\infty$ 时,$-3/b\to 0$ 因此广义积分是收敛的,且曲线丁区域的面积(见图 15-4(a))等于 3.

(b)

$$\int_1^{\infty}\frac{6}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{6}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[6\ln|x|]_1^b = \lim_{b\to\infty}[6\ln|b|-6\ln|1|]$$

$$= \lim_{b\to\infty}[6\ln|b|] \text{ 因为 } \ln|1| = 0$$

当 $b\to\infty$,$6\ln|b|\to\infty$.广义积分发散而且没有确定的值.则图 15-4(b)中曲线下的面积就不能计算出来,尽管它和(a)中的图有着相似之处

15.7　洛必达法则

如果函数 $f(x)=g(x)/h(x)$,当 $x\to a$ 的极限不能计算出来,例如(1),当分子分母同时趋于 0 时,引起不定形式 0/0 或者(2),当分子分母同时趋于无穷时,引起不定形式∞/∞,通常可以使用洛必达法则,洛必达法则是

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{h'(x)} \tag{15.6}$$

可参见例 6 和习题 15.26.

例 6　应用洛必达法则求函数的极限,注意这时是分子和分母分别求导数而不是它们的商再求导数.

(a)　当 $x\to 4$,$x-4$ 和 $16-x^2\to 0$ 利用式(15.6),因此分子分母分别求导数.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{-2x}=-\frac{1}{8}$$

(b)　当 $x\to\infty$，和 $6x-2, 7x+4\to\infty$，利用式(15.6)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{7x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{7}=\frac{6}{7}$$

15.8　消费者剩余和生产者剩余

需求函数 $P_1=f_1(Q)$，见图 15-5(a)，代表了在提供不同数量的产品时消费者愿意接受的价格，如果市场均衡发生在(Q_0, P_0)，那么那些愿意支付超过 P_0 的消费者就会受益．消费者的全部受益如阴影部分所示，被称作消费者剩余．其数学表达式为

$$\text{消费者剩余}=\int_0^{Q_0}f_1(Q)\mathrm{d}Q-Q_0P_0 \tag{15.7}$$

供给函数 $P_2=f_2(Q)$，见图 15-5(b)，它代表了在提供不同货物量时的产品的价格．若市场均衡发生在(Q_0, P_0)，那么那些愿意以低于 P_0 价格付产品的厂商就会受益．总的生产者受益叫做生产者剩余，如阴影部分所示．其数学表达式为

$$\text{生产者剩余}=Q_0P_0-\int_0^{Q_0}f_2(Q)\mathrm{d}Q \tag{15.8}$$

见例 7，习题 15.27～15.31．

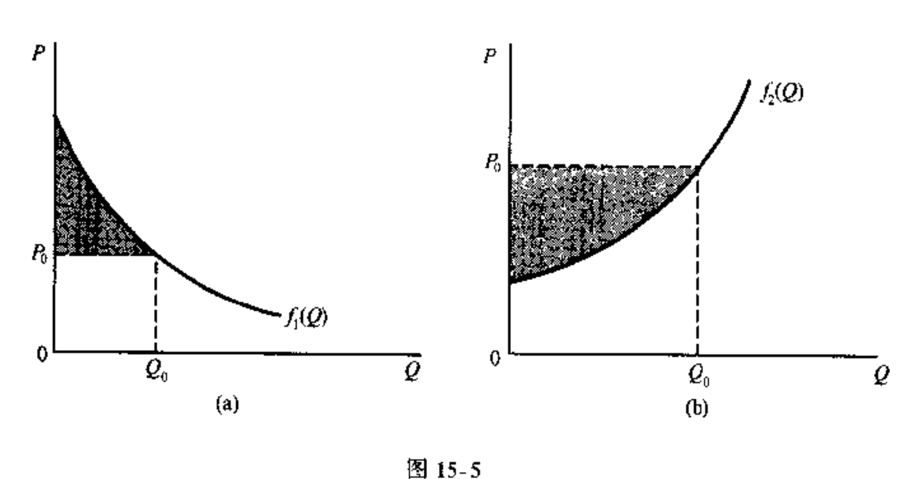


图 15-5

例 7　已知需求函数为 $P=42-5Q-Q^2$，若均衡价格为 6，则消费者剩余如下：

在 $P_0=6$，

$$42-5Q-Q^2=6$$
$$36-5Q-Q^2=0$$
$$(Q+9)(\quad Q+4)=0$$

因此 $Q_0=4$，因为 $Q=-9$ 无意义，代入式(15.7)

$$\text{消费者剩余}=\int_0^4(42-5Q-Q^2)\mathrm{d}Q-(4)(6)$$
$$=\left[42Q-2.5Q^2-\frac{1}{3}Q^3\right]_0^4-24$$
$$=\left(168-40-21\frac{1}{3}\right)-0-24=82\frac{2}{3}$$

15.9　定积分与概率

事件发生的概率 P 可以通过概率密度函数下相应区域的面积来计量，概率密度或频率函数是一个连续函数 $f(x)$：

1. $f(x) \geqslant 0$,概率不能是负数.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.在 x 全体范围内,事件发生的概率是1.

3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$x$ 在区间$[a,b]$上取值的概率为定积分从 a 到 b 的值.

见例8,习题15.32和15.33.

例8　邻近的两辆车经过高速公路的时间间隔的分布由概率函数给出 $f(t)=2\mathrm{e}^{-2t}$,t(时间以分钟表示)$\geqslant 0$.一辆汽车在0.25分钟内经过的概率计算如下:

$$P = \int_0^{0.25} 2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-2t}\Big|_0^{0.25} = -\mathrm{e}^{-0.5} - (-\mathrm{e}^0)$$
$$= -0.606531 + 1 = 0.399469$$

习题解答

定积分

15.1　计算以下定积分

(a)　$\int_0^6 5x\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_0^6 5x\mathrm{d}x = 2.5x^2\Big|_0^6 = 2.5(6)^2 - 2.5(0)^2 = 90$$

(b)　$\int_1^{10} 3x^2\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_1^{10} 3x^2\mathrm{d}x = x^3\Big|_1^{10} = (10)^3 - (1)^3 = 999$$

(c)　$\int_1^{64} x^{-2/3}\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_1^{64} x^{-2/3}\mathrm{d}x = 3x^{1/3}\Big|_1^{64} = 3\sqrt[3]{64} - 3\sqrt[3]{1} = 9$$

(d)　$\int_1^3 (x^3 + x + 6)\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_1^3 (x^3 + x + 6)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_1^3$$
$$= \frac{1}{4}(3)^4 + \frac{1}{2}(3)^2 + 6(3) - \left[\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{1}{2}(1)^2 + 6(1)\right] = 36$$

(e)　$\int_1^4 (x^{-1/2} + 3x^{1/2})\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_1^4 (x^{-1/2} + 3x^{1/2})\mathrm{d}x = (2x^{1/2} + 2x^{3/2})\Big|_1^4 = 2\sqrt{4} + 2\sqrt{4^3} - (2\sqrt{1} + 2\sqrt{1^3}) = 16$$

(f)　$\int_0^3 4\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_0^3 4\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^3 = 2(\mathrm{e}^{2(3)} - \mathrm{e}^{2(0)}) = 2(403.4 - 1) = 804.8$$

(g)　$\int_0^{10} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

解 ☞
$$\int_0^{10} 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{10} = -\mathrm{e}^{-2(10)} - (-\mathrm{e}^{-2(0)}) = -\mathrm{e}^{-20} + \mathrm{e}^0 = 1$$

代换法

15.2　利用积分代换法求定积分 $\int_0^3 8x(2x^2 + 3)\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u = 2x^2 + 3$.那么 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 4x$ 和 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/4x$ 暂时忽略积分的上下限,把它当作不定积分来计算.对原积分函数进行代换

$$\int 8x(2x^2+3)\mathrm{d}x = \int 8xu\frac{\mathrm{d}u}{4x} = 2\int u\mathrm{d}u$$

关于 u 积分，

$$2\int u\mathrm{d}u = 2\left(\frac{u^2}{2}\right)+c = u^2+c \tag{15.9}$$

最后，在(15.9)式中把 $u=2x^2+3$ 代入，在积分结果中 c 可以暂时忽略，定积分写成关于 x 的形式，加入积分上下限，

$$\int_0^3 8x(2x^2+3)\mathrm{d}x = (2x^2+3)^2\Big|_0^3 = [2(3)^2+3]^2-[2(0)^2+3]^2 = 441-9 = 432$$

因为在原始代换中 $u\neq x$ 而等于 $2x^2+3$，就 x 而言的积分上下限是与就 u 而言的积分上下限不同的. 如果需要，积分的上下限也可以表示成 u 的形式，因为，令 $u=2x^2+3$，当 x 从 0 到 3 的变化时，u 相应的等于 $u=2(3)^2+3=21$ 和 $u=2(0)^2+3=3$，在(15.9)中我们可以用这个上下限求得关于 u 的积分值

$$2\int_3^{21} u\mathrm{d}u = u^2\Big|_3^{21} = 441-9 = 432$$

15.3 重新考虑问题 15.2.

解 ☞ 设 $\int_0^2 x^2(x^3-5)^2\mathrm{d}x$ 令 $u=x^3-5$ 和 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=3x^2$. 不含上下限，执行积分代换

$$\int x^2(x^3-5)^2\mathrm{d}x = \int x^2u^2\frac{\mathrm{d}u}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^2\mathrm{d}u$$

关于 u 积分且忽略常量，

$$\frac{1}{3}\int u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u^3\right) = \frac{1}{9}u^3$$

代换 $u=x^3-5$ 且加入关于 x 的限制，

$$\int_1^2 x^2(x^3-5)^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{9}(x^3-5)^3\right]_1^2 = \frac{1}{9}[(2)^3-5]^3-\frac{1}{9}[(1)^3-5]^3$$

$$= \frac{1}{9}(27)-\frac{1}{9}(-64) = 10.11$$

因为 $u=x^3-5$ 和对 x 的限制 $x=1, x=2$ 替换成关于 u 的限制 $u=(1)^3-5=-4, u=(2)^3-5=3$，并把它们作为关于 u 的积分的上下限

$$\frac{1}{3}\int_{-4}^3 u^2\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{9}u^3\right]_{-4}^3 = \frac{1}{9}(3)^3-\frac{1}{9}(-4)^3 = 10.11$$

15.4 重新考虑问题 15.2，设 $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=x^3+1$，那么 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=3x^2$ 和 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/3x^2$. 代入

$$\int \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\mathrm{d}x = \int 3x^2u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{3x^2} = \int u^{-2}\mathrm{d}u$$

关于 u 积分，忽略常量

$$\int u^{-2}\mathrm{d}u = -u^{-1}$$

把 $u=x^3+1$ 代入，再加上初始极限

$$\int_0^3 \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\mathrm{d}x = -(x^3+1)^{-1}\Big|_0^2 = \frac{-1}{2^3+1}-\frac{-1}{0^3+1} = -\frac{1}{9}+1 = \frac{8}{9}$$

由 $u=x^3+1$ 和对 x 的限制是从 0 到 2，则 u 的限制应从 $u=(0)^3+1=1$ 到 $u=(2)^3+1=9$，那么

$$\int_1^9 u^{-2}\mathrm{d}u = -u^{-1}\Big|_1^9 = \left(-\frac{1}{9}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{8}{9}$$

15.5 利用代换法求定积分 $\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 ☞ 令 $u=x^2+1$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=2x$ 和 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/2x$. 代换

$$\int \frac{6x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int 6xu^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{2x} = 3\int u^{-1}\mathrm{d}u$$

关于 u 积分

$$3\int u^{-1}du = 3\ln|u|$$

代换 $u = x^2+1$

$$\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\,\Big|_0^3 = 3\ln|3^2+1| - 3\ln|0^2+1| = 3\ln10 - 3\ln1 = 3\ln10 = 6.9078$$

u 的极限是从 $u=(0)^2+1=1$ 到 $u=(3^2+1)=10$.关于 u 积分

$$3\int_1^{10} u^{-1}du = 3\ln|u|\,\Big|_1^{10} = 3\ln10 - 3\ln1 = 3\ln10 = 6.9078$$

15.6 重新考虑问题15.2,设 $\int_1^2 4xe^{x^2+2}dx$.

解 ☞ 令 $u=x^2+1$,那么 $du/dx=2x$ 和 $dx=du/2x$.代换

$$\int 4xe^{x^2+2}dx = \int 4xe^u\frac{du}{2x} = 2\int e^u du$$

关于 u 积分,并忽略常量

$$2\int e^u du = 2e^u$$

代入 $u=x^2+2$,

$$\int_1^2 4xe^{x^2+1}dx = 2e^{x^2+1}\Big|_1^2 = 2(e^{(2)^2+2} - e^{(1)^2+2}) = 2(e^6 - e^3)$$

$$= 2(403.43 - 20.09) = 766.68$$

由 $u=x^2+2$,u 的限制为 $u=(1)^2+2=3$ 和 $u=(2)^2+2=6$

$$2\int_3^6 e^u du = 2e^u\Big|_3^6 = 2(e^6 - e^3) = 766.68$$

15.7 重新考虑问题15.5,设 $\int_0^1 3x^2e^{2x^3+1}dx$.

解 ☞ 令 $u=2x^3+1$、$du/dx=6x^2$ 和 $dx=du/6x^2$ 代换

$$\int 3x^2e^{2x^3-1}dx = \int 3x^2e^u\frac{du}{6x^2} = \frac{1}{2}\int e^u du$$

关于 u 积分

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u$$

代入 $u=2x^3+1$

$$\int_0^1 3x^2e^{2x^3+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x^3+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^3 - e^1) = \frac{1}{2}(20.086 - 2.718) = 8.684$$

由 $u=2x^3+1$,u 的限制为 $u=2(0)^3+1=1$ 和 $u=2(1)^3+1=3$,则

$$\frac{1}{2}\int_1^3 e^u du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^3 - e^1) = 8.68$$

分部积分

15.8 利用分部积分法求定积分 $\int_2^5 \frac{3x}{(x+1)^2}dx$.

解 ☞ 令 $f(x)=3x$,那么 $f'(x)=3$.令 $g'(x)=(x+1)^{-2}$,那么代入(14.1)

$$\int \frac{3x}{(x+1)^2}dx = 3x[-(x+1)^{-1}] - \int -(x+1)^{-1}3dx = -3x(x+1)^{-1} + 3\int (x+1)^{-1}dx$$

积分并忽略常量

$$\int \frac{3x}{(x+1)^2}dx = -3x(x+1)^{-1} + 3\ln|x+1|$$

加入上下限

$$\int_2^5 \frac{3x}{(x+1)^2}dx = [-3x(x+1)^{-1} + 3\ln|x+1|]_2^5$$

$$= \left[-\frac{3(5)}{5+1} + 3\ln|5+1|\right] - \left[-\frac{3(2)}{2+1} + 3\ln|2+1|\right]$$

$$= -\frac{5}{2} + 3\ln 6 + 2 - 3\ln 3$$

$$= 3(\ln 6 - \ln 3) - \frac{1}{2} = 3(1.7918 - 1.0986) - 0.5 = 1.5796$$

15.9　重新考虑问题 15.8，设 $\int_1^3 \frac{4x}{(x+2)^3}dx$.

解 ☞ 令 $f(x) = 4x, f'(x) = 4, g'(x) = (x+2)^{-3}$ 和 $g(x) = \int (x+2)^{-3}dx = -\frac{1}{2}(x+2)^{-2}$，代入(14.1)

$$\int \frac{4x}{(x+2)^3}dx = 4x\left[-\frac{1}{2}(x+2)^{-2}\right] - \int -\frac{1}{2}(x+2)^{-2}4dx$$

$$= -2x(x+2)^{-2} + 2\int (x+2)^{-2}dx$$

积分

$$\int \frac{4x}{(x+2)^3}dx = -2x(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-1}$$

添入上下限

$$\int_1^3 \frac{4x}{(x+2)^3}dx = [-2x(x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-1}]_1^3$$

$$= [-2(3)(3+2)^{-2} - 2(3+2)^{-1}] - [-2(1)(1+2)^{-2} - 2(1+2)^{-1}]$$

$$= -\frac{6}{25} - \frac{2}{5} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{56}{225}$$

15.10　重新考虑问题 15.8，设 $\int_1^3 5xe^{x+2}dx$.

解 ☞ 令 $f(x) = 5x, f'(x) = 5, g'(x) = e^{x+2}$ 和 $g(x) = \int e^{x+2}dx = e^{x+2}$，应用(14.1)

$$\int 5xe^{x+2}dx = 5xe^{x+2} - \int e^{x+2}5dx = 5xe^{x+2} - 5\int e^{x+2}dx$$

积分

$$\int 5xe^{x+2}dx = 5xe^{x+2} - 5e^{x+2}$$

添入上下限

$$\int_1^3 5xe^{x+2}dx = [5xe^{x+2} - 5e^{x+2}]_1^3 = (15e^5 - 5e^5) - (5e^3 - 5e^3)$$

$$= 10e^5 = 10(148.4) = 1484$$

定积分的性质

15.11　证明 $\int_{-4}^4 (8x^3 + 9x^2)dx = \int_{-4}^0 (8x^3 + 9x^2)dx + \int_0^4 (8x^3 + 9x^2)dx$.

解 ☞

$$\int_{-4}^4 (8x^3 + 9x^2)dx = 2x^4 + 3x^3\Big|_{-4}^4 = 704 - 320 = 384$$

$$\int_{-4}^0 (8x^3 + 9x^2)dx = 2x^4 + 3x^3\Big|_{-4}^0 = 0 - 320 = -320$$

$$\int_0^4 (8x^3 + 9x^2)dx = 2x^4 + 3x^3\Big|_0^4 = 704 - 0 = 704$$

检验

$$-320 + 704 = 384$$

15.12　证明 $\int_0^{16} (x^{-1/2} + 3x)dx = \int_0^4 (x^{-1/2} + 3x)dx + \int_4^9 (x^{-1/2} + 3x)dx + \int_9^{16} (x^{-1/2} + 3x)dx$.

解 ☞

$$\int_0^{16} (x^{-1/2} + 3x)dx = 2x^{1/2} + 1.5x^2\Big|_0^{16} = 392 - 0 = 392$$

$$\int_0^4 (x^{-1/2} + 3x)dx = 2x^{1/2} + 1.5x^2\Big|_0^4 = 28 - 0 = 28$$

$$\int_4^9 (x^{-1/2} + 3x)dx = 2x^{1/2} + 1.5x^2\Big|_4^9 = 127.5 - 28 = 99.5$$

$$\int_9^{16}(x^{1/2}+3x)\,dx = 2x^{1/2}+1.5x^2\Big|_9^{16} = 392-127.5 = 264.5$$

检验　　$28+99.5+264.5=392$

15.13　证明 $\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}dx + \int_1^2 \frac{6x}{x^2+1}dx + \int_2^3 \frac{6x}{x^2+1}dx$.

解　☞ 根据问题 15.5

$$\int_0^3 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_0^3 = 3\ln 10$$

$$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_0^1 = 3\ln 2 - 0 = 3\ln 2$$

$$\int_1^2 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_1^2 = 3\ln 5 - 3\ln 2$$

$$\int_2^3 \frac{6x}{x^2+1}dx = 3\ln|x^2+1|\Big|_2^3 = 3\ln 10 - 3\ln 5$$

检验　　$3\ln 2 + 3\ln 5 - 3\ln 2 + 3\ln 10 - 3\ln 5 = 3\ln 10$

15.14　证明 $\int_1^3 5xe^{x+1}dx = \int_1^2 5xe^{x+1}dx + \int_2^3 5xe^{x+1}dx$.

解　☞ 根据问题 15.10

$$\int_1^3 5xe^{x+2}dx = [5xe^{x+2} - 5e^{x+2}]_1^3 = 10e^5$$

$$\int_1^2 5xe^{x+2}dx = [5xe^{x+2} - 5e^{x+2}]_1^2 = (10e^4 - 5e^4) - (5e^3 - 5e^3) = 5e^4$$

$$\int_2^3 5xe^{x+2}dx = [5xe^{x+2} - 5e^{x+2}]_2^3 = (15e^5 - 5e^5) - (10e^4 - 5e^4) = 10e^5 - 5e^4$$

检验　　$5e^4 + 10e^5 - 5e^4 = 10e^5$

曲线间的面积

15.15　(a)画出以下函数的草图,(b)计算它们在所述区间上曲线之间的面积.

$$y_1 = 7-x \text{ 且 } y_2 = 4x - x^2 \text{ 从 } x=1 \text{ 到 } x=4$$

解　☞ (a)见图 15-6.

(b)根据图 15-6 所求的区域就是曲线 $y_1=7-x$ 之下从 $x=1$ 到 $x=4$ 的区域面积减去曲线 $y_2=4x-x^2$ 之下从 $x=1$ 到 $x=4$ 的区域面积. 利用积分性质

$$A = \int_1^4(7-x)dx - \int_1^4(4x-x^2)dx = \int_1^4(x^2-5x+7)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2.5x^2 + 7x\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{1}{3}(4)^3 - 2.5(4)^2 + 7(4)\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 - 2.5(1)^2 + 7(1)\right] = 4.5$$

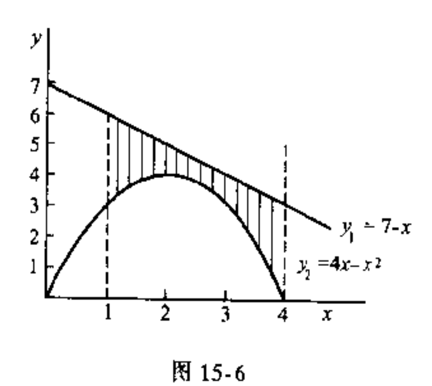


图 15-6

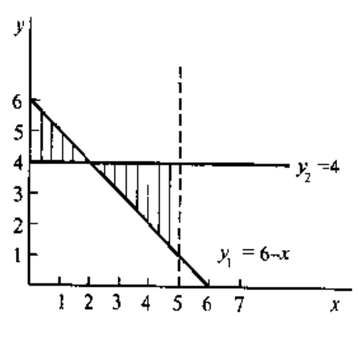


图 15-7

15.16　重新考虑问题 15.15,设 $y_1=6-x$, $y_2=4$ 从 $x=0$ 到 $x=5$.

注意在交叉点曲线相关位置的转变

解 ☞ (a) 见图 15-7.

(b) 根据图 15-7 所求面积就是从 $x=0$ 到 $x=4$ 曲线 $y_1=6-x$ 和 $y_2=4$ 之间的面积加上从 $x=2$ 到 $x=5$ 曲线 $y_2=4$ 和 $y_1=6-x$ 之间的面积.数学推导就是

$$A=\int_0^2[(6-x)-4]dx+\int_2^5[4-(6-x)]dx$$
$$=\int_0^2(2-x)dx+\int_2^5(x-2)dx=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^5$$
$$=2-0+2.5-(-2)=6.5$$

15.17 重新考虑问题 15.15,设 $y_1=x62-4x+8$, $y_2=2x$ 从 $x=0$ 到 $x=3$.

解 ☞ (a) 见图 15-8.

(b) $$A=\int_0^2[(x^2-4x+8)-2x]dx+\int_2^3[2x-(x^2-4x+8)]dx$$
$$=\int_0^2(x^2-6x+8)dx+\int_2^3(-x^2+6x-8)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^3=7\frac{1}{3}$$

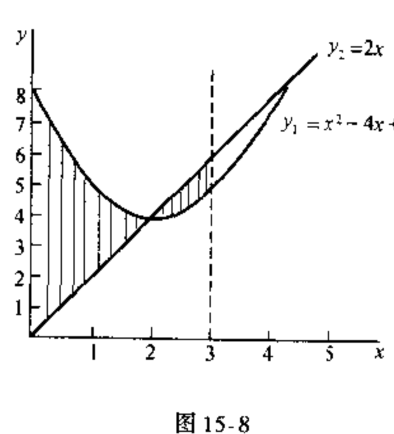


图 15-8

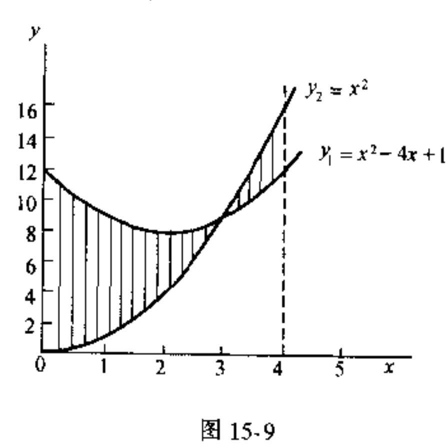


图 15-9

15.18 重新考虑问题 15.2,设 $y_1=x^2-4x+12$, $y_2=x^2$ 从 $x=0$ 到 $x=4$.

解 ☞ (a) 见图 15-9.

(b) $$A=\int_0^3[(x^2-4x+12)-x^2]dx+\int_3^4[x^2-(x^2-4x+12)]dx$$
$$=\int_0^3(12-4x)dx+\int_3^4(4x-12)dx=[12x-2x^2]_0^3+[2x^2-12x]_3^4=20$$

广义积分与洛必达法则

15.19 (a)试述为什么以下积分是广义的,(b)验证它的收敛性.如果可能请计算出它的值.

$$\int_1^\infty\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

解 ☞ (a) 这是一个广义积分,因为积分的上限是无穷大

(b) $$\int_1^\infty\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$$

令 $u=x^2+1$, $du/dx=2x$ 和 $dx=du/2x$ 代入

$$\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\int 2xu^{-2}\frac{du}{2x}=\int u^{-2}du$$

关于 u 积分并忽略常量

$$\int u^{-2}du=-u^{-1}$$

代入 $u=x^2+1$ 并加上 x 的上下限

$$\int_1^{\infty}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = -(x^2+1)^{-1}\Big|_1^b$$

$$= \frac{-1}{b^2+1}+\frac{1}{(1)^2+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{b^2+1}$$

当 $b\to\infty$, $1/(b^2+1)\to 0$ 积分收敛其值为$\frac{1}{2}$.

15.20 重新考虑问题 15.19, 设 $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+7}$.

解 ☞ (a) 这是一个广义积分,因为有一个积分限制是无穷.

(b) $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+7} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x+7} = \ln|x+7|\Big|_1^b = \ln|b+7|-\ln|1+7|$

当 $b\to\infty$, $\ln|b+7|\to\infty$ 积分发散,无解.

15.21 重新考虑问题 15.19, 设 $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

解 ☞ (a) 下限是无穷大.

(b) $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_a^0 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3(0)}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3a} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3a}$

当 $a\to-\infty$, $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3a}\to 0$ 积分发散,值为$\frac{1}{3}$.

15.22 (a)试述以下积分为什么是广义积分,(b)并验证它的收敛性.如果可能请计算出它的值.

$$\int_{-\infty}^0 (5-x)^{-2}\mathrm{d}x$$

解 ☞ (a) 下限是无穷大

(b) $\int_{-\infty}^0 (5-x)^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 (5-x)^{-2}\mathrm{d}x$

令 $u=5-x$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=-1$ 和 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$, 代换

$$\int (5-x)^{-2}\mathrm{d}x = \int u^{-2}(-\mathrm{d}u) = -\int u^{-2}\mathrm{d}u$$

关于 u 积分

$$-\int u^{-2}\mathrm{d}u = u^{-1}$$

代入 $u=5-x$ 加上 x 的上下限

$$\int_{-\infty}^0 (5-x)^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 (5-x)^{-2}\mathrm{d}x = (5-x)^{-1}\Big|_a^0 = \frac{1}{5-0}-\frac{1}{5-a} = \frac{1}{5}-\frac{1}{5-a}$$

当 $a\to-\infty$, $1/(5-a)\to 0$ 积分收敛,值为$\frac{1}{3}$.

15.23 重新考虑问题 15.22, 设 $\int_{-\infty}^0 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 ☞ (a) 下限是无穷大.

(b) $\int_{-\infty}^0 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

利用分部积分法,令 $f(x)=2x$, $f'(x)=2$, $g'(x)=\mathrm{e}^x$ 和 $g(x)=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$. 代入(14.1)

$$\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 2x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x 2\mathrm{d}x$$

再次积分

$$\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = 2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x$$

加入上下限

$$\int_{-\infty}^0 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x)\Big|_a^0 = [2(0)\mathrm{e}^0-2\mathrm{e}^0]-(2a\mathrm{e}^a-2\mathrm{e}^a)$$

$$= -2-2a\mathrm{e}^a+2\mathrm{e}^a \quad 因为\ \mathrm{e}^0=1$$

当 $a \to -\infty$, $e^a \to 0$ 积分收敛,值为 -2

15.24 重新考虑问题 15.22,设 $\int_0^6 \frac{dx}{x-6}$.

解 ☞ (a) 这也是一个广义积分,因为当 x 从左边($x \to 6^-$)趋于 6 时积分趋于无穷大.

(b) $\int_0^6 \frac{dx}{x-6} = \lim_{b \to 6} \int_0^b \frac{dx}{x-6} = \ln|x-6| \Big|_0^b = \ln|b-6| - \ln|0-6|$

当 $b \to 6^-$, $|b-6| \to 0$ 时 ln0 是无解的.因此积分发散且无解

15.25 重新考虑问题 15.22,设 $\int_0^8 (8-x)^{-1/2} dx$.

解 ☞ (a) 当 $x \to 8^-$ 积分函数接近无穷.

(b) $\int_0^8 (8-x)^{-1/2} dx = \lim_{b \to 8} \int_0^b (8-x)^{-1/2} dx = -2(8-x)^{1/2} \Big|_0^b = (-2\sqrt{8-b}) - (-2\sqrt{8-0})$

$= 2\sqrt{8} - 2\sqrt{8-b}$

当 $b \to 8^-$, $-2\sqrt{8-b} \to 0$ 积分收敛,值为 $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$.

15.26 利用洛必达法则求解以下极限:

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x-9}{e^x}$.

解 ☞ 当 $x \to \infty$, e^x 和 $5x-9$ 都趋于∞,从而产生确定形式∞/∞.因此利用(15.6)分别对分子和分母进行求导

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x-9}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{e^x} = \frac{5}{\infty} = 0$$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x}$

解 ☞ 当 $x \to \infty$, $1-e^{1/x}$和 $1/x \to 0$.那么利用(15.6),注意 $1/x = x^{-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-(-1/x^2)e^{1/x}}{-1/x^2}$$

简单的代数求得

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \to \infty} (-e^{1/x}) = -e^0 = -1$$

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln 2x}{e^{5x}}$

解 ☞ 当 $x \to \infty$, $\ln 2x$ 和 $e^{5x} \to \infty$,再次应用(15.6)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln 2x}{e^{5x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{5e^{5x}} = \frac{0}{\infty} = 0 \quad \text{因为} \frac{1}{\infty} \text{不是一个不确定形式}$$

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3-7}{3x^2+9}$

解 ☞

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3-7}{3x^2+9} = \lim_{x \to \infty} \frac{18x^2}{6x} = \lim_{x \to \infty} 3x = \infty$$

(e) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-7x}{4x^2-21}$

解 ☞

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-7x}{4x^2-21} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x-7}{8x}$$

应用洛比达法则会得出一个新的分式,它也是一个不确定的形式,所以必须再次应用洛比达法则

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x-7}{8x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{见习题 3.4(c)}$$

(f) $\lim_{x \to \infty} \frac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x}$

解 ☞ 反复使用洛比达法则

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^3-5x^2+13x}{2x^3+7x^2-18x} = \lim_{x \to \infty} \frac{24x^2-10x+13}{6x^2+14x-18} = \lim_{x \to \infty} \frac{48x-10}{12x+14} = \lim_{x \to \infty} \frac{48}{12} = 4$$

消费者和生产者剩余

15.27 给出需求函数 $P=45-0.5Q$. 当 $P_0=32.5$ 和 $Q_0=25$ 时,求消费者剩余.

解 ☞ 利用(15.7)

$$CS=\int_0^{25}(45-0.5Q)dQ-(32.5)(25)=[45Q-0.25Q^2]_0^{25}-812.5$$
$$=[45(25)-0.25(25)^2]-0-812.5=156.25$$

15.28 给出供给函数 $P=(Q+3)^2$, 当 $P_0=81, Q_0=6$ 时,求生产者剩余.

解 ☞ 根据(15.8)

$$PS=(81)(6)-\int_0^6(Q+3)^2dQ=486-\left[\frac{1}{3}(Q+3)^3\right]_0^6$$
$$=486-\left[\frac{1}{3}(6-3)^3-\frac{1}{3}(0+3)^3\right]=252$$

15.29 给出需求函数 $P_d=25-Q^2$ 和供给函数 $P_s=2Q+1$. 假设是自由竞争求(a)消费者剩余(b)和生产者剩余.

解 ☞ 当市场平衡时, $s=d$, 则

$$2Q+1=25-Q^2 \qquad Q^2+2Q-24=0$$
$$(Q+6)(Q-4)=0 \qquad Q_0=4 \qquad P_0=9$$

因为 Q_0 不能等于 -6

(a) $CS=\int_0^4(25-Q^2)dQ-(9)(4)=\left[25Q-\frac{1}{3}Q^3\right]_0^4-36=\left[25(4)-\frac{1}{3}(4)^3\right]-0-36=42.67$

(b) $PS=(9)(4)-\int_0^4(2Q+1)dQ=36-[Q^2+Q]_0^4=16$

15.30 给出完全竞争的条件下需求函数 $P_d=113-Q^2$ 和供给函数 $P_s=(Q+1)^2$. 求(a)CS 和(b)PS.

解 ☞ 把供给函数展开,使供给和需求相等

$$Q^2+2Q+1=113-Q^2 \qquad 2(Q^2+Q-56)=0$$
$$(Q+8)(Q-7)=0 \qquad Q_0=7 \qquad P_0=64$$

(a) $CS=\int_0^7(113-Q^2)dQ-(64)(7)=\left[113Q-\frac{1}{3}Q^3\right]_0^7-448=228.67$

(b) $PS=(64)(7)-\int_0^7(Q+1)^2dQ=448-\left[\frac{1}{3}(Q+1)^3\right]_0^7=448-(170.67-0.33)=277.67$

15.31 在垄断条件下所销售的数量和市场价格是由需求函数决定的,对于一个利益最大化的垄断者来说需求函数是 $P=274-Q^2$ 和 $MC=4+3Q$. 求消费者剩余.

解 ☞ 已知 $P=274-Q^2$,

$$TR=PQ=(274-Q^2)Q=274Q-Q^3$$

和

$$MR=\frac{dTR}{dQ}=274-3Q^2$$

在 MR = MC 处垄断者获得最大利润,则

$$274-3Q^2=4+3Q \qquad 3(Q^2+Q-90)=0$$
$$(Q+10)(Q-9)=0 \qquad Q_0=9 \qquad P_0=193$$

和 $CS=\int_0^9(274-Q^2)dQ-(193)(9)=\left[274Q-\frac{1}{3}Q^3\right]_0^9-1737=486$

频率函数和概率

15.32 在一个大的连锁店等待时间的概率由频率函数 $f(t)=\frac{4}{81}t^3, 0\leqslant t\leqslant 3$ 给出. 等待 1 至

2 分钟的概率是多少?

解 ☞ $$P = \int_1^2 \frac{4}{81} t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{81} t^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{81}(16) - \frac{1}{81}(1) = 0.1852$$

15.33 在特定的某一天工作完成的比例可以由频率密度函数 $f(x) = 12(x^2 - x^3), 0 \leqslant x \leqslant 1$ 描述,那么在这一天之内完成的工作量不多于 50% 的概率是多少? 完成的工作量不少于 50% 的概率是多少?

解 ☞ (a) $P_a = \int_0^{0.5} 12(x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{0.5} = 12\left[\left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right) - 0\right] = 0.3125$

(b) $P_b = \int_{0.5}^{1} 12(x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0.5}^{1} = 12\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0.125}{3} - \frac{0.0625}{4}\right)\right]$
$= 0.6875$

则有 $P_a + P_b = 0.3125 + 0.6875 = 1$.

在经济上的其他应用

15.34 给出 $I(t) = 9t^{1/2}$,求在(a) 8 年内(b) 从第 5 年到第 8 年间,即在[4,8]的资本构成水平.

解 ☞ (a) $K = \int_0^8 9t^{1/2}\mathrm{d}t = 6t^{3/2}\Big|_0^8 = 6(8)^{3/2} - 0 = 96\sqrt{2} = 135.76$

(b) $K = \int_4^8 9t^{1/2}\mathrm{d}t = 6t^{3/2}\Big|_4^8 = 6(8)^{3/2} - 6(4)^{3/2} = 135.76 - 48 = 87.76$

第十六章　一阶微分方程

16.1　定义和概念

微分方程是用来表示函数 $y=f(t)$ 与它的一阶或者更高阶导数或微分之间明确的或隐含的关系的方程，例如

$$\frac{dy}{dt}=5t+9y'=12y \quad 和 \quad y''-2y'+19=0$$

如上，只包含一个自变量的方程，称为常微分方程．微分方程的解或者积分是不再包含导数或者微分的方程，它被定义在一定的区间内，当自变量取这个区间内的任意值，它均满足微分方程，见例1．

微分方程的阶数就是方程中最高阶导数的阶数，微分方程的次数就是最高阶导数的最高次幂，见例2和习题16.1．

例1　要求解满足微分方程 $y'(t)=7$ 的所有函数 $y(t)$，只要方程两边积分即可．

$$y'=\int 7dt=7t+c_1$$

$$y(t)=\int(7t+c_1)dt=3.5t^2+c_1+c$$

这个解被称为通解，它表示当 c 不确定时，微分方程就有无穷多个可能解．若 c 是确定的，则微分方程就有一个特殊解或定解它与所有的可能解是相关的．

例2　微分方程的阶数和次数如下：

1. $\frac{dy}{dt}=2x+6$　一阶，一次．
2. $\left(\frac{dy}{dt}\right)^4-5t^5=0$　一阶，四次．
3. $\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)+x^2=0$　二阶，一次．
4. $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^7+\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^5=75y$　三阶，五次．

16.2　求解一阶线性微分方程的一般公式

对于一个一阶线性微分方程，dy/dt 和 y 必须是一次且不存在乘积 $y(dy/dt)$，对于这样的方程

$$\frac{dy}{dt}+vy=z$$

这里 v 和 z 可以是常数或时间函数，则求得的通解的公式是

$$y(t)=e^{-\int vdt}\left(A+\int ze^{\int vdt}dt\right) \tag{16.1}$$

这里 A 是任意常数，解包含两个部分，$e^{-\int vdt}A$ 称作余函数，而 $e^{-\int vdt}\int ze^{\int vdt}dt$ 称为特殊积分．特殊积分 y_p 等于 $y(t)$ 的暂态均衡水平，余函数 y_c 代表均衡态的偏差．由于 $y(t)$ 是动态稳定的，则当 t 趋向于无穷时，y_c 一定接近零（也就是说，e^{kt} 中的 k 一定是负数），微分方程的解可以通过求微分来检验，见例3～5，习题16.2～16.12和习题20.33．

例3　求解微分方程 $dy/dt+4y=12$ 的通解如下，由于 $v=4$，$z=12$，根据(16.1)式得

$$y(t)=e^{-\int 4dt}\left(A+\int 12e^{\int 4dt}dt\right)$$

从 14.2 节中知道，$\int 4\mathrm{d}t = 4t + c$，利用(16.1)，忽略 c，将其并入 A，所以

$$y(t) = e^{-4t}(A + \int 12e^{4t}\mathrm{d}t) \tag{16.2}$$

对剩下的积分项进行积分得：再一次忽略常数项代入(16.2)式，

$$y(t) = e^{-4t}(A + 3e^{4t}) = Ae^{-4t} + 3 \tag{16.3}$$

由于 $e^{-4t}e^{4t} = e^0 = 1$．当 $t\to\infty$时，$y_c = Ae^{-4t}\to 0$，且 $y(t)$接近于 $y_p = 3$，即暂态均衡水平，$y(t)$是动态稳定的．

由于 A 是不确定的，所以所求得的解是通解，我们可以对(16.3)求导数来检验这个结果．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4Ae^{-4t}$$

根据最初的问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = 12 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12 - 4y$$

把 $y = Ae^{-4t} + 3$ 代入(16.3)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12 - 4(Ae^{-4t} + 3) = -4Ae^{-4t}$$

例 4　已知 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t + 3t^2y = t^2$，这里 $v = 3t^2$，$z = t^2$．求通解，首先把它们代入(16.1)

$$y(t) = e^{-\int 3t^2\mathrm{d}t}(A + \int t^2 e^{\int 3t^2\mathrm{d}t}\mathrm{d}t) \tag{16.4}$$

求积分 $\int 3t^2\mathrm{d}t = t^3$．代入(16.4)式

$$y(t) = e^{-t^3}(A + \int t^2e^{t^3}\mathrm{d}t) \tag{16.5}$$

利用代换法，对(16.5)式中的积分项积分，令 $u = t^3$，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 3t^2$，且 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/3t^2$，

$$\int t^2e^{t^3}\mathrm{d}t = \int t^2e^u\frac{\mathrm{d}u}{3t^2} = \frac{1}{3}\int e^u\mathrm{d}u = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{t^3}$$

最后，代入(16.5)

$$y(t) = e^{-t^3}(A + \frac{1}{3}e^{t^3}) = Ae^{-t^3} + \frac{1}{3} \tag{16.6}$$

当 $t\to\infty$时，$y_c = Ae^{-t^3}\to 0$，且 $y(t)$接近于$\frac{1}{3}$，这个平衡是动态稳定的．

对(16.6)式进行求导以检验这个通解是否正确，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -3t^2Ae^{-t^3}$．根据已知的问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3t^2y = t^2 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t^2 - 3t^2y$$

把 y 代入(16.6)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t^2 - 3t^2(Ae^{-t^3} + \frac{1}{3}) = -3t^2Ae^{-t^3}$$

例 5　假设例 4 中 $y(0) = 1$，则定解可以按如下求得：根据(16.6)，$y = Ae^{-t^3} + \frac{1}{3}$，当 $t = 0$ 时，$y(0) = 1$，因此 $1 = A + \frac{1}{3}$，事实上，$e^0 = 1$ 和 $A = \frac{2}{3}$把 $A = \frac{2}{3}$代入(16.6)，定解是$y = \frac{2}{3}e^{-t^3} + \frac{1}{3}$

16.3　正合微分方程和部分积分

给定一个包含多个自变量的函数，形如 $F(y,t)$，令 $M = \partial F/\partial y$ 和$N = \partial F/\partial t$，则全微分是

$$dF(y,t) = M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}t \tag{16.7}$$

由于 F 包含多个自变量，M 和 N 是偏导数，则方程(16.7)称为偏微方程，若 F 的微分等于零，即 $M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}t = 0$，由于左边恰好等于原始方程 $F(y,t)$ 的微分，我们称其为一个正合的微分方程．对于一个正合微分方程，$\partial M/\partial t = \partial N/\partial y$，也就是说 $\partial^2 F/(\partial t\partial y) = \partial^2 F/(\partial y\partial t)$ 证明见习题 16.49．

正合微分方程的解，即是对于一个自变量进行连续积分，此时其他自变量保持恒定，此过程称为部分积分，它是求解偏微分的逆过程，见例 6 和习题 16.13～16.17．

例 6　解正合非线性微分方程

$$(6yt + 9y^2)\mathrm{d}y + (3y^2 + 8t)\mathrm{d}t = 0 \tag{16.8}$$

1．验证其是否是一个正合微分方程，这里 $M = 6yt + 9y^2$ 和 $N = 3y^2 + 8t$，所以 $\partial M/\partial t = 6y$ 和 $\partial N/\partial y = 6y$，假若 $\partial M/\partial t \neq \partial N/\partial y$，它就不是正合微分方程．

2．由于 $M = \partial F/\partial y$ 是偏导数，对 M 关于 y 进行部分积分，此时把 t 看作常数．并且再加上一个新的函数项 $Z(t)$，它是关于 t 的函数，这些项是可能在对原函数进行关于 y 的求导时略去的，注意在部分积分中用 ∂y 取代 $\mathrm{d}y$

$$F(y,t) = \int(6yt + 9y^2)\partial y + Z(t) = 3y^2 t + 3y^3 + Z(t) \tag{16.9}$$

除未知项 $Z(t)$ 外，上式给出原函数．

3．对(16.9)关于 t 求导，得 $\partial F/\partial t$，则

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3y^2 + Z'(t) \tag{16.10}$$

因为 $\partial F/\partial t = N$ 和 $N = 3y^2 + 8t$．根据(16.8)，把 $\partial F/\partial t = 3y^2 + 8t$ 代入(16.10)

$$3y^2 + 8t = 3y^2 + Z'(t) \qquad Z'(t) = 8t$$

4．对 $Z'(t)$ 关于 t 进行积分，求得丢失的 t 的函数项．

$$Z(t) = \int Z'(t)\mathrm{d}t = \int 8t\mathrm{d}t = 4t^2 \tag{16.11}$$

5．把(16.11)代入(16.9)，再加上积分常数项，利用求导很容易验证结果是否正确的．

$$F(y,t) = 4y^2 t + 3y^3 + 4t^2 + c$$

这容易由求导来验证．

16.4　积分因子

并不是所有的微分方程都是正合的，然而，有一些是能够利用积分因子变成正合的，这个积分因子是一个乘式，它使得方程能够进行积分求解，见例 7 和习题 16.18～16.22．

例 7　检查非线性微分方程 $5yt\mathrm{d}y + (5y^2 + 8t)\mathrm{d}t = 0$，发现它不是正合的，这里 $M = 5yt$ 而 $N = 5y^2 + 8t$，然而通过乘以 t 的一个积分因子，我们可以将其变成正合的 $5yt^2\mathrm{d}y + (5y^2 t + 8t^2)\mathrm{d}t = 0$，现在 $\partial M/\partial t = 10yt = \partial N/\partial y$，此时可能通过上面的方法求解方程，见习题 16.22．

为了检验利用了积分因子后问题的解是否正确，可以求得解的全微分再除以积分因子．

16.5　积分因子法则

对于一个非线性一阶微分方程，如果积分因子存在的话，这里有两条法则有助于寻找到积分因子．

法则 1　如果 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = f(y)$，则 $\mathrm{e}^{\int f(y)\mathrm{d}y}$ 就是一个积分因子．

法则 2　如果 $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right)g(t)$，则 $\mathrm{e}^{(\int g(t)\mathrm{d}t)}$ 就是积分因子．

见例 8 和习题 16.23～16.28

例 8　为了更好地理解以上法则，我们可以利用它找到例 7 中的积分因子，这里

$$5yt\,dy + (5y^2 + 8t)dt = 0 \quad M = 5yt$$

$$N = 5y^2 + 8t \quad \frac{\partial M}{\partial t} = 5y \neq \frac{\partial N}{\partial y} = 10y$$

应用法则 1

$$\frac{1}{5y^2 + 8t}(5y - 10y) = \frac{-5y}{5y^2 + 8t}$$

上式并不只是 y 的函数，故不能做为方程式的积分因子. 运用法则 2,

$$\frac{1}{5yt}(10y - 5y) = \frac{5y}{5yt} = \frac{1}{t}$$

它只是 t 的函数，因此积分因子是 $e^{\int (1/t)dt} = e^{\ln t} = t$.

16.6　分离变量法

非线性一阶一次微分方程的求解是复杂的（一阶一次微分方程是指最高阶导数是一阶导数 dy/dt 且导数的最高次幂是 1. 若它包含 y 和 dy/dt 的乘积，或者 y 的最高次幂大于 1，则它是非线性的）. 若方程是正合的或者可以找到积分因子使其变为正合的，则我们可以利用例 6 中的方法求解. 然而若方程能表达成变量分离的形式，形如 $R(y)dy + S(t)dt = 0$ 的，此时 R 和 S 分别是 y 和 t 的函数，那么利用通常的积分就可以求解该方程. 在例 9 和例 10 以及习题 16.29～16.37 中有更详细的阐述.

例 9　利用分离变量法解下列非线性微分方程.

$$\frac{dy}{dt} = y^2 t \tag{16.12}$$

首先，调整各项的位置，以达到分离变量的目的，

$$\frac{dy}{y^2} = t\,dt$$

这里面 $R = 1/y^2$ 和 $S = t$，那么两边同时积分

$$\int y^{-2}dy = \int t\,dt$$

$$-y^{-1} + c_1 = \frac{t^2}{2} + c_2$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^2 + 2c_2 - 2c_1}{2}$$

令 $c = 2c_2 - 2c_1$,

$$y = \frac{-2}{t^2 + c} \tag{16.13}$$

在给予 c 某个值以获得一个特解之前，c 是任意取值的，所以在求解的初始的几步里这个解将被一般地而不是特殊地对待，e^c 和 c 也可以用来表达常数.

这个解的检验如下，利用幂函数法则，求 $y = -2(t^2 + c)^{-1}$ 的微分

$$\frac{dy}{dt} = (-1)(-2)(t^2 + c)^{-2}(2t) = \frac{4t}{(t^2 + c)^2}$$

根据(16.12) $dy/dt = y^2 t$，把(16.13)代入(16.12)

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{-2}{t^2 + c}\right)^2 t = \frac{4t}{(t^2 + c)^2}$$

例 10　给出非线性微分方程

$$t^2 dy + y^3 dt = 0 \tag{16.14}$$

此时 $M \neq f(y)$, $N \neq f(t)$，但是(16.14)乘以 $1/(t^2 y^3)$，分离变量得

$$\frac{1}{y^3}dy + \frac{1}{t^2}dt = 0 \tag{16.14a}$$

对分离的变量进行积分

$$\int y^{-3}\mathrm{d}y + \int t^{-2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}y^{-2} - t^{-1} + c$$

$$F(y,t) = -\frac{1}{2}y^{-2} - t^{-1} + c = -\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{t} + c$$

对于更复杂的函数,其结果通常都是这个形式,它可以通过求微分再与(16.14a)式相比较进行检验,其中(16.14a)可以乘以 y^3t^2 简化为(16.14),另外方程的解也可以表示成其他形式,见习题 16.20～16.22 和 16.29～16.35.

16.7 在经济上的应用

微分方程也可用于经济中的许多方程的求解,它们常常用于决定市场均衡的微观经济模型中的动态平衡点,并且它可以描绘出在宏观经济的不同条件下,价格增长的时间路径.给定一个函数的增长率,经济学家们可以利用微分方程求该函数,利用点弹性,经济学家可以估计需求函数(见例 11 和习题 16.38～16.47),在 14.6 节中,利用微分方程可以根据投资函数和总成本估计资本函数,并且根据边际成本和边际收入函数估计总收益函数.

例 11 给定需求函数 $Q_d = c + bP$ 和供给函数 $Q_s = g + hP$,均衡价格是

$$\overline{P} = \frac{c-g}{h-b} \tag{16.15}$$

假定市场中价格的变化率 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ 是正的,它是关于超额需求 $Q_d - Q_s$ 的线性函数.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m(Q_d - Q_s) \qquad m = 常数 > 0 \tag{16.16}$$

则市场上的动态价格稳定的条件为(也就是在什么条件不,当 $t\to\infty$ 时, $P(t)$将汇集于 $\overline{P}$ 点).

把给定的参数 Q_d 和 Q_s 代入(16.16)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = m[(c+bP)-(g+hP)] = m(c+bP-g-hP)$$

调整顺序,使其与 16.2 节的一般形式相一致, $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t + m(h-b)P = m(c-g)$. 令 $v = m(h-b)$, $z = m(c-g)$, 利用(16.1)

$$P(t) = \mathrm{e}^{-\int v\mathrm{d}t}\left(A + \int z\mathrm{e}^{\int v\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-vt}\left(A + \int z\mathrm{e}^{vt}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-vt}\left(A + \frac{z\mathrm{e}^{vt}}{v}\right) = A\mathrm{e}^{-vt} + \frac{z}{v} \tag{16.17}$$

当 $t=0$ 时, $P(0) = A + z/v$, $A = P(0) - z/v$.

代入(16.17),

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{z}{v}\right]\mathrm{e}^{-vt} + \frac{z}{v}$$

最后,代换 $v = m(h-b)$和 $z = m(c-g)$,

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{c-g}{h-b}\right]\mathrm{e}^{-m(h-b)t} + \frac{c-g}{h-b}$$

利用(16.15)价格的时间曲线是

$$P(t) = [P(0) - \overline{P}]\mathrm{e}^{-m(h-b)t} + \overline{P} \tag{16.18}$$

因为 $P(0), \overline{P}, m\geqslant 0$,当 $t\to\infty$ 时右边的第一项将趋于 0,因此 $P(t)$将趋于 $\overline{P}$,当且仅当 $h-b\geqslant 0$.对于正常的情况,需求是负的斜率($b<0$),而供给是正的斜率($b>0$)则可以确定其动态稳定条件.只要 $h\geqslant b$,拥有有正斜率需求函数或负斜率供给函数的市场也将是动态稳定的.

16.8 微分方程的相位图

许多非线性微分方程作为时间函数不能得到解析解.然而相位图提供了关于方程稳定性

值的信息,它有助于决定方程将是否收敛于暂态的均衡点.相位图描绘了 y 的导数,这里我们用 $\dot{y}$ 作为函数的简单符号.在相位图中,根据曲线和水平轴的交点,我们很容易确定平稳状态的解,因为在点 $\dot{y}=0$ 函数是不改变的,对于一些方程可能会有多于一个的交叉点,因此就有不止一个解.

从图表上看,平稳状态解的稳定性可以用移动的箭头来表示.无论何时只要移动的箭头指向右(表明 y 正在增加),则 $\dot{y}$ 的图形就在水平轴的上方,表明 $\dot{y}>0$.若箭头指向左(表明 y 正在减少),则 $\dot{y}$ 的图形就在水平轴的下方,表明 $\dot{y}<0$.若移动的箭头指向一个平稳状态解,则这个解是稳定的;若移动的箭头不指向平稳状态的解,则这个解就是不稳定的.

从数学表达式上看,当相位图经过平稳状态的平衡点时,它的斜率也可以告诉我们这个平衡点是否是稳定的,当求接触一个平稳状态的平衡点时,

$$\text{如果}\frac{d\dot{y}}{dy}<0, \qquad \text{均衡点稳定}$$

$$\text{如果}\frac{d\dot{y}}{dy}>0, \qquad \text{均衡点不稳定}$$

对相位图的解释见例 12,例 13 给出了稳定性的导数检验方法,也见习题 16.48~16.50

例 12 给定非线性微分方程

$$\dot{y}=8y-2y^2$$

构造相位图,这里需要六个简单的步骤:

解 ☞ 1. 求暂态的或平稳状态的解.只需令 $\dot{y}=0$,利用代数方法求解即可.

$$\dot{y}=8y-2y^2=0$$

$$2y(4-y)=0$$

$$\bar{y}=0 \quad \bar{y}=4 \quad \text{稳态解}$$

相位图将在 $y=0$, $y=4$ 点穿过水平轴.

2. 由于这个函数经过水平轴两次,那么它就有一个拐点,我们下一步要决定这个拐点是最大值点还是最小值点.

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=8-4y=0 \quad y=2\ \text{是一个临界值}$$

$$\frac{d^2\dot{y}}{dy^2}=-4<0 \quad \text{凹, 相对最大}$$

3. 下面可以很容易的画出这个相位图的草图,见图 16-1.

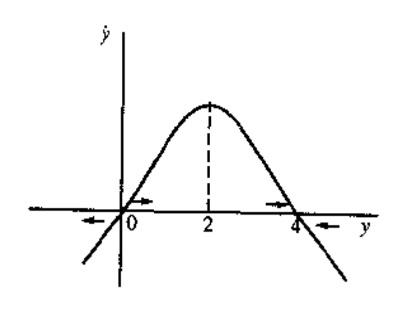


图 16-1

4. 标注移动的箭头,完成这个相位图.如上所述,图形在水平轴的下方 $\dot{y}\geqslant 0$ 箭头指向右;而在水平轴上方的图形 $\dot{y}\leqslant 0$,箭头指向左.

5. 我们可以根据以上图形,看出平稳状态均衡点的稳定性.因为箭头向远离暂态均衡点 $\bar{y}_1=0$ 的方向移动,所以 $\bar{y}_1$ 是不稳定的均衡点.而由于移动的箭头指向第二个暂态均衡点 $\bar{y}_2=4$,所以 $\bar{y}_2$ 是一个稳定的态均衡点.

6. 不考虑移动的箭头,只要根据相位图在平稳状态下的解的斜率,我们就可以验证其

稳定性．因为在 $\bar{y}_1=0$ 点相位图的斜率是正的．我们可以得出 $\bar{y}_1$ 是一个不稳定的平衡点，因为相位图在 $\bar{y}_2=4$ 点的斜率是负的，我们可以知道 $\bar{y}_2$ 一定是稳定的．

例 13　即使不利用相位图，我们也可以通过计算在暂态均衡点的一阶导数来确定微分方程的稳定性，设

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}=8-4y$$

在稳态水平 $\bar{y}_1=0$，$\bar{y}_2=4$ 处求解，

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}(0)=8-4(0)=8>0 \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}(4)8-4(4)=-8<0$$

$\bar{y}_1=0$ 是不稳定的　　　$\bar{y}_2=4$ 是稳定的

习 题 解 答

阶数与次数

16.1　确定以下微分方程的阶数和次数：

(a) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=12x$　　(b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right)^4+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^6=4-y$　　(d) $\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^3+\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}-75y=0$

(e) $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+x^2y\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)-4y^4=0$

解 ☞ (a)二阶，一次；(b)一阶，一次；(c)三阶，四次；(d)四阶，一次；(e)三阶，一次．

一阶一次线性微分方程

16.2　(a)利用通解公式求解以下方程 (b)检验

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+5y=0 \tag{16.19}$$

解 ☞ (a)　这里 $v=5$ 和 $z=0$．代入(16.1)

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\int 5\mathrm{d}t}\left(A+\int 0\mathrm{e}^{\int 5\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)$$

积分 $\int 5\mathrm{d}t=5t+c$，这里因子 c 可以并入 A 中，故可以忽略．所以 $y(t)=\mathrm{e}^{-5t}\left(A+\int 0\mathrm{d}t\right)$．而 $\int 0\mathrm{d}t=k$（常数），它也能并入 A 中．因此

$$y(t)=\mathrm{e}^{-5t}A=A\mathrm{e}^{-5t} \tag{16.20}$$

(b)　对(16.20)式求导，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-5A\mathrm{e}^{-5t}$．根据(16.19)，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-5y$，用(16.20)式取代 y，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-5(A\mathrm{e}^{-5t})=-5A\mathrm{e}^{-5t}$$

16.3　重新考虑问题 16.2，设

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3y \qquad y(0)=2 \tag{16.21}$$

解 ☞ (a)　调整次序以获得一般形式，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-3y=0$$

这里 $v=-3$ 和 $z=0$，代入(16.1)，

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\int -3\mathrm{d}t}\left(A+\int 0\mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)$$

把 $\int -3\mathrm{d}t=-3t$，$y(t)=\mathrm{e}^{3t}\left(A+\int 0\mathrm{d}t\right)=A\mathrm{e}^{3t}$ 代入，当 $t=0$，$y=2$ 时，$2=A\mathrm{e}^{3(0)}$，$A=2$．代入，

$$y(t) = 2e^{3t} \tag{16.22}$$

(b) 对(16.22)式求导 $dy/dt = 6e^{3t}$,根据(16.21),$dy/dt = 3y$,用(16.22)式替代 y.

16.4 再次考虑问题16.2,设

$$\frac{dy}{dt} = 15 \tag{16.23}$$

解 ☞ (a) 这里 $v = 0$ 和 $z = 15$,因此

$$y(t) = e^{-\int 0dt}\left(A + \int 15e^{\int 0dt}dt\right)$$

这里 $\int 0dt = k$(常数),代换并且注意 e^k 也是一个常数.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-k}\left(A + \int 15e^{k}dt\right) \\ &= e^{-k}(A + 15te^{k}) = Ae^{-k} + 15t = 15t + A \end{aligned} \tag{16.24}$$

这里 A 是一个任意常数等于 Ae^{-k} 或者 c. 只要导数等于常数,则积分就如同例1中所述.

(b) 对16.24式求导 $dy/dt = 15$. 根据(16.23),$dy/dt = 15$.

16.5 重新考虑16.2,给出

$$\frac{dy}{dt} - 6y = 18 \tag{16.25}$$

解 ☞ (a) 这里 $v = -6$, $z = 18$, $\int -6dt = -6t$. 代入(16.1),

$$y(t) = e^{6t}\left(A + \int 18e^{-6t}dt\right)$$

这里 $\int 18e^{-6t}dt = -3e^{-6t}$. 因此,

$$y(t) = e^{6t}(A - 3e^{-6t}) = Ae^{6t} - 3 \tag{16.26}$$

(b) 对(16.26)式求导,$dy/dt = 18 + 6y$. 根据(16.25),$dy/dt = 18 + 6y$,根据(16.26),把 y 代入,$dy/dt = 18 + 6(Ae^{66t})$

16.6 重新考虑问题16.2,设

$$\frac{dy}{dt} + 4y = -20 \quad y(0) = 10 \tag{16.27}$$

解 ☞ (a) 这里 $v = 4$, $z = -20$ 和 $\int 4dt = 4t$. 因此

$$y(t) = e^{-4t}\left(A + \int -20e^{4t}dt\right)$$

这里 $\int -20e^{4t}dt = -5e^{4t}$. 代入 $y(t) = e^{-4t}(A - 5e^{4t}) = Ae^{-4t} - 5$. 当 $t = 0$, $y = 10$ 时,则 $10 = Ae^{-4(0)} - 5$, $A = 15$. 代入

$$y(t) = 15e^{-4t} - 5 = 5(3e^{-4t} - 1) \tag{16.28}$$

(b) (16.28)的微分是 $dy/dt = -60e^{-4t}$. 根据(16.27),$dy/dt = -20 - 4y$,对于 y 用(16.28)式代替,$dy/dt = -20 - 4(15e^{-4t} - 5) = -60e^{-4t}$

16.7 重新考虑问题16.2,设

$$\frac{dy}{dt} + 4ty = 6t \tag{16.29}$$

解 ☞ (a) $v = 4t$, $z = 6t$ 和 $\int 4tdt = 2t^2$. 因此

$$y(t) = e^{-2t^2}\left(A + \int 6te^{2t^2}dt\right) \tag{16.30}$$

对积分项利用代换法,令 $u = 2t^2$, $du/dt = 4t$, $dt = du/4t$,因此

$$\int 6te^{2t^2}dt = \int 6te^{u}\frac{du}{4t} = 1.5\int e^{u}du = 1.5e^{2t^2}$$

代回(16.30)

$$y(t) = e^{-2t^2}(A + 1.5e^{2t^2}) = Ae^{-2t^2} + 1.5 \tag{16.31}$$

(b) 对(16.31)求导得 $dy/dt = -4tAe^{-2t^2}$. 根据(16.29),$dy/dt = 6t - 4ty$. 利用(16.31)代入,dy/dt

$=6t-4t(Ae^{-2t^2}-1.5)=-4tAe^{-2t^2}$

16.8 (a)利用通解公式解决以下问题.(b)检验

$$2\frac{dy}{dt}-2t^2y=9t^2 \qquad y(0)=-2.5 \tag{16.32}$$

解 ☞ (a) (16.32)式除以2, $dy/dt-t^2y=4.5t^2$. 因此, $v=-t^2$, $z=4.5t^2$ 和 $\int -t^2dt=-\frac{1}{3}t^3$. 代入

$$y(t)=e^{(1/3)t^3}\left(A+\int 4.5t^2e^{-(1/3)t^3}dt\right) \tag{16.33}$$

令 $u=-\frac{1}{3}t^3$, $du/dt=-t^2$, $dt=-du/t^2$. 则

$$\int 4.5t^2e^{-(1/3)t^3}dt=\int 4.5t^2e^u\frac{du}{-t^2}=-4.5\int e^u du=-4.5e^{-(1/3)t^3}$$

代入(16.33),

$$y(t)=e^{(1/3)t^3}(A-4.5e^{-(1/3)t^3})=Ae^{(1/3)t^3}-4.5$$

当 $t=0$ 时, $-2.5=A-4.5$; $A=2$. 因此

$$y(t)=2e^{(1/3)t^3}-4.5 \tag{16.34}$$

(b) 对(16.34)求导, $dy/dt=2t^2e^{(1/3)t^3}$. 根据(16.32), $dy/dt=4.5t^2+t^2y$, 把(16.34)代入, $dy/dt=4.5t^2+t^2(2e^{(1/3)t^3}-4.5)=2t^2e^{(1/3)t^3}$.

16.9 重新考虑问题16.8, 设

$$\frac{dy}{dt}-2ty=e^{t^2} \tag{16.35}$$

解 ☞ (a) $v=-2t$, $z=e^{t^2}$ 和 $\int -2tdt=-t^2$. 因此

$$y(t)=e^{t^2}\left(A+\int e^{t^2}e^{-t^2}dt\right)=e^{t^2}\left(A+\int e^0dt\right)$$

这里 $e^0=1$ 和 $\int 1dt=t$. 代回得

$$y(t)=e^{t^2}(A+t) \tag{16.36}$$

(b) 利用乘法法则, 求(16.36)的导数是 $dy/dt=2te^{t^2}(A+t)+e^{t^2}(1)=2tAe^{t^2}+2t^2e^{t^2}+e^{t^2}$. 由(16.35), $dy/dt=e^{t^2}+2ty$. 把(16.36)代入得

$$\frac{dy}{dt}=e^{t^2}+2t[e^{t^2}(A+t)]=e^{t^2}+2tAe^{t^2}+2t^2e^{t^2}$$

16.10 重新考虑问题16.8. 设

$$\frac{dy}{dt}+3y=6t \qquad y(0)=\frac{1}{3} \tag{16.37}$$

解 ☞ (a) $v=3$, $z=-6$, $\int 3dt=3t$. 则

$$y(t)=e^{-3t}\left(A+\int 6te^{3t}dt\right) \tag{16.38}$$

对积分项用部分积分法, 令 $f(t)=6t$, 那么 $f'(t)=6$; 令 $g'(t)=e^{3t}$, 那么 $g(t)=\int e^{3t}dt=\frac{1}{3}e^{3t}$. 代入(14.1)

$$\int 6te^{3t}dt=6t\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)-\int\frac{1}{3}e^{3t}6dt$$

$$=2te^{3t}-2\int e^{3t}dt=2te^{3t}-\frac{2}{3}e^{3t}$$

代回到(16.38)

$$y(t)=e^{-3t}\left(A+2te^{3t}-\frac{2}{3}e^{3t}\right)=Ae^{-3t}+2t-\frac{2}{3}$$

当 $t=0$ 时, $\frac{1}{3}=AE^{-3(0)}+2(0)-\frac{2}{3}$; $A=1$, 则

$$y(t)=e^{-3t}+2t-\frac{2}{3} \tag{16.39}$$

(b) 对(16.39)求导，$dy/dt=3e^{-3t}+2$. 根据(16.37)，$dy/dt=6t-3y$. 把上式直接代入(16.39)，$dy/dt=6t-3\left(e^{-3t}+2t-\frac{2}{3}\right)=-3e^{-3t}+2$.

16.11 重新考虑问题 16.8，设

$$\frac{dy}{dt}-\frac{y}{t}=0 \qquad y(3)=12 \tag{16.40}$$

解 ☞ (a) $v=-1/t$，$z=0$，$\int-(1/t)dt=-\ln t$，则

$$y(t)=e^{\ln t}(A+\int 0dt)=At$$

因为 $e^{\ln t}=t$. 在 $t=3$，$12=A(3)$；$A=4$. 则

$$y(t)=4t \tag{16.41}$$

(b) 对(16.41)求导得 $dy/dt=4$. 根据(16.40)，$dy/dt=y/t$. 把(16.41)代入，$dy/dt=4t/t=4$.

16.12 重新考虑问题 16.8，设

$$\frac{dy}{dt}=-y \qquad y(3)=20 \tag{16.42}$$

解 ☞ (a) 变换结构 $dy/dt+y=0$. 因此 $v=1$，$z=0$，$\int 1dt=t$. 则

$$y(t)=e^{-t}(A+\int 0dt)=Ae^{-t}$$

当 $t=3$ 时，$20=Ae^{-3}$；$20=A(0.05)$，因此 $A=400$. 则

$$y(t)=400e^{-t} \tag{16.43}$$

(b) 对(16.43)求导，$dy/dt=-400e^{-t}$. 根据(16.42)，$dy/dt=-y$. 把(16.43)代入 $dy/dt=-(400e^{-t})=-400e^{-t}$.

正合微分方程和部分积分

16.13 求解以下正合微分方程. 请读者自己进行检验.

$$(4y+8t^2)dy+(16yt-3)dt=0$$

解 ☞ 见例 6.

1. 首先看看它是否是一个正合微分方程. 令 $M=4y+8t^2$，$N=16yt-3$，$\partial M/\partial t=16t=\partial N/\partial y$.

2. 对 M 关于 y 进行部分积分，再加上 $Z(t)$ 得到 $F(y,t)$

$$F(y,t)=\int(4y+8t^2)\partial y+Z(t)=2y^2+8t^2y+Z(t) \tag{16.44}$$

3. 求 $F(y,t)$ 关于 t 的偏微分，它等于上述 N.

$$\frac{\partial F}{\partial t}=16ty+Z'(t)$$

但是 $\partial F/\partial t=N=16yt-3$. 则

$$16ty+Z'(t)=16yt-3 \qquad Z'(t)=-3$$

4. 对 $Z'(t)$ 关于 t 积分. 得到 $Z(t)$

$$Z(t)=\int Z'(t)dt=\int-3dt=-3t \tag{16.45}$$

5. 把(16.45)代入(16.44)，再加上积分常数

$$F(y,t)=2y^2+8t^2y-3t+c$$

16.14 重新考虑问题 16.13. 设 $(12y+7t+6)dy+(7y+4t-9)dt=0$.

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=7=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int(12y+7t+6)\partial y+Z(t)=6y^2+7yt+6y+Z(t)$

3. $\partial F/\partial t=7y+Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t=N=7y+4t-9$，则

$$7y+Z'(t)=7y+4t-9 \qquad Z'(t)=4t-9$$

4. $Z(t)=\int(4t-9)dt=2t^2-9t$

5. $F(y,t)=6y^2+7yt+6y+2t^2-9t+c$

16.15 重新考虑问题 16.13. 设 $(12y^2t^2+10y)dy+(8y^3t)dt=0$.

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=24y^2t=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int(12y^2t^2-10y)\partial y+Z(t)=4y^3t^2+5y^2+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=8y^3t+Z'(t)$. 但 $N=8y^3t$, 则

$$8y^3t=8y^3t+Z'(t)\qquad Z'(t)=0$$

4. $Z(t)=\int 0\mathrm{d}t=k$, 它可以并入 c 中.

5. $F(y,t)=4y^3t^2+5y^2+c$.

16.16 重新考虑问题 16.13. 设 $8tyy'=-(3t^2+4y^3)$.

解 ☞ 变换方程

$$8ty\mathrm{d}y=-(3t^2+4y^3)\mathrm{d}t\qquad 8ty\mathrm{d}y+(3t^2+4y^3)\mathrm{d}t=0$$

1. $\partial M/\partial t=8y=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int 8ty\partial y+Z(t)=4ty^2+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=4y^2+Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t=N=3t^2+4y^2$, 则

$$4y^2t+Z'(t)=3t^2+4y^2\qquad Z'(t)=3t^2$$

4. $Z(t)=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3$.

5. $F(y,t)=t^3+4ty^2+c$.

16.17 重新考虑问题 16.13. 设 $60ty^2y'=-(12t^3+20y^3)$.

解 ☞ 变换方程

$$60ty^2y'+(12t^3+20y^3)=0$$

1. $\partial M/\partial t=60y^2=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int 60ty^2\partial y+Z(t)=20ty^3+Z(t)$

3. $\partial F/\partial t=20y^3+Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t=N=12t^3+20y^3$, 则

$$20y^3+Z'(t)=12t^3+20y^3\qquad Z'(t)=12t^3$$

4. $Z(t)=\int 12t^3\mathrm{d}t=3t^4$.

5. $F(y,t)=3t^4+20ty^3-c$.

积分因子

16.18 利用积分因子求解以下微分方程. 请自己检验(记住要在所得的结果取完全微分之后才能除以积分因子).

$$6t\mathrm{d}y+12y\mathrm{d}t=0\qquad (t)$$

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=6\neq\partial N/\partial y=12$. 但乘以积分因子 t

$$6t^2\mathrm{d}y+12yt\mathrm{d}t=0$$

这里 $\partial M/\partial t=12t=\partial N/\partial y$. 构造新的函数.

2. $F(y,t)=\int 6t^2\partial y+Z(t)=6t^2y+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=12ty+Z'(t)$. 但 $\partial F/\partial t=N=12ty$, 则 $Z'(t)=0$.

4. $Z(t)=\int 0\mathrm{d}t=k$, 它可以并入 c 中.

5. $F(y,t)=6t^2y+c$.

16.19 重新考虑问题 16.18. 设

$$t^2\mathrm{d}y+3yt\mathrm{d}t=0\qquad (t)$$

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=2t\neq\partial N/\partial y=3t$. 但乘以 t

$$t^3\mathrm{d}y+3yt^2\mathrm{d}t=0$$

这里$\partial M/\partial t=3t^2=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int t^3\partial y+Z(t)=t^3y+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=3t^2y+Z'(t)$, 但$\partial F/\partial t=N=3t^2y$, 则 $Z'(t)=0$, $F(y,t)=t^3y+c$.

16.20 重新考虑问题 16.18. 设

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{t}\qquad\left(\frac{1}{ty}\right)$$

解 ☞ 变换方程

$$t\,dy=y\,dt\qquad t\,dy-y\,dt=0$$

1. $\partial M/\partial t=1\neq\partial N/\partial y=-1$. 乘以 $1/(ty)$

$$\frac{dy}{y}-\frac{dt}{t}=0$$

这里$\partial M/\partial t=0=\partial N/\partial y$, 因为每一个函数都不包含要进行部分求导的自变量.

2. $F(y,t)=\int\frac{1}{y}\partial y+Z(t)=\ln y+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=Z'(t)$. 但$\partial F/\partial t=N=-1/t$, 则 $Z'(t)=-1/t$.

4. $Z(t)=\int-\frac{1}{t}dt=-\ln t$.

5. $F(y,t)=\ln y-\ln t+c$ 可以表示成几种形式. 因为 c 是任意常数, 在这里我们可以写作 $\ln y-\ln t=c$. 应用对数法则(7.3 节), $\ln y-\ln t=\ln(y/t)$. 因此 $\ln(y/t)=c$. 最后等式的两边表示成 e 的指数形式. 注意 $e^{\ln x}=x$,

$$e^{\ln(y/t)}=e^c$$

$$\frac{y}{t}=e^c\quad\text{或}\quad y=te^c$$

对于 c 的另外一种处理方法见习题 16.29～16.37.

16.21 重新考虑问题 16.18. 设

$$4t\,dy+(16y-t^2)dt=0\qquad(t^3)$$

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=4\neq\partial N/\partial y=16$. 乘以 t^3, $4t^4dy+(16t^3y-t^5)dt=0$, 这里$\partial M/\partial t=16t^3=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int4t^4\partial y+Z(t)=4t^4y+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=16t^3y+Z'(t)$. 但$\partial F/\partial t=N=16t^3y-t^5$, 则

$$16t^3y+Z'(t)=16t^3y-t^5\qquad Z'(t)=-t^5$$

4. $Z(t)=\int-t^5dt=-\frac{1}{6}t^6$.

5. $F(y,t)=4t^4y-\frac{1}{6}t^6+c=24t^4y-t^6+c$

或

$$24t^4y-t^6=c$$

16.22 重新考虑问题 16.18, 设

$$5yt\,dy+(5y^2+8t)dt=0\qquad(t)$$

解 ☞ 1. $\partial M/\partial t=5y\neq\partial N/\partial y=10y$. 乘以 t, 见例 7, $5yt^2dy+(5y^2t+8t^2)dt=0$. 这里$\partial M/\partial t=10yt=\partial N/\partial y$.

2. $F(y,t)=\int5yt^2\partial y+Z(t)=2.5y^2t^2+Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t=5y^2t+Z'(t)$. 但$\partial F/\partial t=N=5y^2t+8t^2$, 因此

$$5y^2t+Z'(t)=5y^2t+8t^2\qquad Z'(t)=8t^2$$

4. $Z(t)=\int8t^2dt=\frac{8}{3}t^3$.

5. $F(y,t)=2.5y^2t^2+\frac{8}{3}t^3+c=7.5y^2t^2+8t^3+c$.

寻找积分因子

16.23 (a) 对以下的微分方程求出其积分因子, (b) 应用例 6 中的 5 步求解积分方程

$$(7y + 4t^2)\mathrm{d}y + 4ty\mathrm{d}t = 0 \tag{16.46}$$

解 (a) $\partial M/\partial t = 8t \neq \partial N/\partial y - 4t$. 用 16.5 节中的法则 1,因为 $M = 7y + 4t^2$, $N - 4ty$

$$\frac{1}{4ty}(8t - 4t) = \frac{4t}{4ty} = \frac{1}{y} = f(y)$$

因此积分因子为

$$e^{\int(1/y)\mathrm{d}y} = e^{\ln y} = y$$

(b) (16.46)式乘以积分因子 y, $(7y^2 + 4yt^2)\mathrm{d}y + 4ty^2\mathrm{d}t = 0$.

1. $\partial M/\partial t = 8yt = \partial N/\partial$, 则

2. $F(y,t) = \int(7y^2 + 4yt^2)\partial y + Z(t) - \frac{7}{3}y^3 - 2y^2t^2 + Z(t)$.

3. $\frac{\partial F}{\partial t} = 4y^2t + Z'(t)$.

4. $\partial F/\partial N = 4y^2t$, 则 $Z'(t) = 0$, $Z(t)$是一个常数, 因此

5. $F(y,t) = \frac{7}{3}y^3 + 2y^2t^2 + c = 7y^3 + 6y^2t^2 + c$.

16.24 重新考虑问题 16.23. 设

$$y^3t\mathrm{d}y + \frac{1}{2}y^4\mathrm{d}t = 0 \tag{16.47}$$

解 (a) $\partial M/\partial t = y^3 \neq \partial N/\partial y = 2y^3$. 应用法则 1

$$\frac{1}{\frac{1}{2}y^4}(y^3 - 2y^3) = \frac{2}{y^4}(\ \ y^3) = -\frac{2}{y} = f(y)$$

因此

$$e^{\int -2y^{\ 1}\mathrm{d}y} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{\ 2}} = y^{-2}$$

(b) (16.47)式乘以 $y^{\ 2}$, $yt\mathrm{d}y + \frac{1}{2}y^2\mathrm{d}t = 0$

1. $\partial M/\partial t = y = \partial N/\partial$, 则

2. $F(y,t) = \int yt\partial y + Z(t) = \frac{1}{2}y^2t + Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t = \frac{1}{2}y^2 + Z'(t)$.

4. $\partial F/\partial N = \frac{1}{2}y^2$, 则 $Z'(t) = 0$, $Z(t)$是一个常数, 因此

5. $F(y,t) = \frac{1}{2}y^2t + c$.

16.25 重新考虑问题 16.23. 设

$$4t\mathrm{d}y + (16y - t^2)\mathrm{d}t = 0 \tag{16.48}$$

解 (a) $M = 4t$, $N = 16y - t^2$, $\partial M/\partial t = 4 \neq \partial N/\partial y = 16$. 应用法则 1

$$\frac{1}{16y - t^2}(4 - 16) = \frac{-12}{16y\ \ t^2} \neq f(y)$$

应用法则 2

$$\frac{1}{4t}(16 - 4) = \frac{3}{t} = g(t)$$

因此

$$e^{\int 3t^{-1}\mathrm{d}t} = e^{3\ln t} = e^{\ln t^3} = t^3$$

(b) (16.48)式乘以 t^3, $4t^4\mathrm{d}y + (16yt^3 - t^5) = 0$. 在习题 16.21 中已经求解.

16.26 重新考虑问题 16.2. 设

$$t^2\mathrm{d}y + 3yt\mathrm{d}t = 0 \tag{16.49}$$

解 (a) 这里 $M = t^2$, $N = 3yt$, $\partial M/\partial t = 2t \neq \partial N/\partial y = 3t$. 应用法则 1

$$\frac{1}{3yt}(2t - 3t)\frac{-t}{3yt} = \frac{-1}{3y} = f(y)$$

那么

$$e^{\int(-1/3y)dy} = e^{-(1/3)\ln y} = e^{\ln y^{1/3}} = y^{-1/3}$$

结果尽管在问题 16.19 中已经给出了一个积分因子 t，$y^{-1/3}$也是方程的一个积分因子.首先我们来检验 $y^{-1/3}$.

(b) (16.49)式乘以 $y^{1/3}$，$t^2y^{-1/3}dy + 3ty^{2/3}dt = 0$.

1. $\partial M/\partial t = 2ty^{-1/3} = \partial N/\partial$，则

2. $F(y,t) = \int t^2y^{-1/3}\partial y + Z(t) = 1.5t^2y^2 + Z(t)$

3. $\partial F/\partial t = 3ty^{2/3} + Z'(t)$

4. $\partial F/\partial N = 3ty^{2/3}$，则 $Z'(t) = 0$，$Z(t)$是一个常数，因此

5. $F_1(y,t) = 1.5t^2y^{2/3} + c$. (16.50)

这里 F_1 用于与下面的 F_2 函数相区别.

16.27 检验问题 16.26 中 t 是否是一个积分因子.

解 ☞ 对原始方程应用法则 2

$$\frac{1}{t^2}(3t - 2t) = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$$

那么

$$e^{\int(1/t)dt} = e^{\ln t} = t$$

因此 t 也是一个积分因子.如问题 16.19 所述.这时解是 $F_2(y,t) = t^3y + c$.虽然与(16.50)式不同，但它也是正确的.读者可以自行检验.

16.28 重新考虑问题 16.23，设

$$(y - t)dy - dt = 0 \tag{16.51}$$

解 ☞ (a) $M = y - t$，$N = -1$，$\partial M/\partial t = -1 \neq \partial N/\partial y = 0$. 应用法则 1

$$\frac{1}{-1}(-1 - 0) = 1 = f(y)$$

那么

$$e^{\int 1dy} = e^y$$

(b) (16.51)式乘以 e^y，

$$(y - t)e^ydy - e^ydt = 0 \tag{16.52}$$

1. $\partial M/\partial t = -e^y = \partial N/\partial y$，则

2. $F(y,t) = \int(y - t)e^y\partial y + Z(t)$ (16.53)

这里需要用部分积分，令

$$f(y) = y - t \quad f'(y) = 1 \quad g'(y) = e^y \quad g(y) = \int e^ydy = e^y$$

代入(14.1)

$$\int(y - t)e^y\partial y = (y - t)e^y - \int e^y1dy = (y - t)e^y - e^y$$

代入(16.53)，$F(y,t) = (y - t)e^y - e^y + Z(t)$.

3. $\partial F/\partial t = -e^y + Z'(t)$

4. 在(16.52)中，$\partial F/\partial N = -e^y$，则 $Z'(t) = 0$，$Z(t)$是一个常数，因此

5. $F(y,t) = (y - t)e^y - e^y + c$ 或 $(y - 1)e^y - te^y + c$

变量分离

16.29 应用 16.6 节所述的变量分离法，求解下列微分方程

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-5t}{y}$$

解 ☞ 分离变量

$$ydy = -5tdt \qquad ydy + 5tdt = 0$$

每一项分别积分

$$\frac{y^2}{2}+\frac{5t^2}{2}=c_1$$

$$y^2+5t^2=2c_1$$

令 $c=2c_1$,

$$y^2+5t^2=c$$

16.30 重新考虑问题 16.29,设

(a) $\frac{dy}{dt}=\frac{t^5}{y^4}$　　　　(b) $t^2dy-y^2dt=0$

(a) **解** ☞ $y^4dy-t^5dt=0$

积分 $\frac{y^5}{5}-\frac{t^6}{6}=c_1$

$6y^5-5t^6=30c_1$

令 $c=30c_1$　$6y^5-5t^6=c$

(b) **解** ☞ $\frac{dy}{y^2}-\frac{dt}{t^2}=0$

积分 $-\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=c$

$y-t=cty$

16.31 重新考虑问题 16.29,设 $tdy+ydt=0$.

解 ☞

$$\frac{dy}{y}+\frac{dt}{t}=0$$

积分

$$\ln y+\ln t=\ln c \qquad \text{(任意常数)}$$

用对数法则,

$$\ln yt=\ln c \qquad yt=c$$

16.32 利用变量分离法,求解下列微分方程

$$\frac{dy}{dt}=-y$$

解 ☞ 分离变量

$$\frac{dy}{y}=-dt$$

两边分别积分,用 ln$c$ 作为积分常量

$$\ln y=-t+\ln c$$

利用这个积分常量以获得简练的解

$$\ln y-\ln c=-t$$

$$\ln\frac{y}{c}=-t$$

两边作为 e 的指数

$$\frac{y}{c}=e^{-t}$$

$$y=ce^{-t}$$

16.33 重新考虑问题 16.23,设 $\frac{dy}{dt}=b-ay$.

解 ☞ 分离变量并且两边乘以 -1

$$\frac{dy}{b-ay}=dt$$

$$\frac{dy}{ay-b}=-dt$$

两边积分,并且再次得到积分常数

$$\frac{1}{a}\ln(ay-b)=-t+\frac{1}{a}\ln c$$

两边乘以 a,变换得

$$\ln(ay-b)=-at+\ln c$$

$$\ln\left(\frac{ay-b}{c}\right)=-at$$

$$\frac{ay-b}{c} = e^{-at}$$

$$ay - b = ce^{-at}$$

$$y = Ce^{-at} + \frac{b}{a} \quad 其中\ C = \frac{c}{a}$$

16.34 重新考虑问题 16.32，设 $\frac{dy}{y+9} - \frac{dt}{t+5} = 0$.

解 ☞ 积分

$$\ln(y+9) - \ln(t+5) = -\ln c$$

应用对数法则 $\ln\frac{y+9}{t+5} = \ln c$

$$\frac{y+9}{t+5} = c \quad 或 \quad y + 9 = c(t+5)$$

16.35 应用分离变量法，求解微分方程 $dy = 3t^2 y dt$.

解 ☞

$$\frac{dy}{y} - 3t^2 dt = 0$$

积分

$$\ln y - t^3 = \ln c$$

方程的两边作为 e 的指数函数

$$e^{\ln y - t^3} = e^{\ln c}$$

$$e^{\ln y} e^{-t^3} = e^{\ln c}$$

$$ye^{-t^3} = c$$

$$y = ce^{t^3}$$

16.36 重新考虑问题 16.35，设 $y^2(t^3+1)dy + t^2(y^3-5)dt = 0$.

解 ☞

$$\frac{y^2}{y^3-5}dy + \frac{t^2}{t^3+1} = 0$$

作积分代换

$$\frac{1}{3}\ln(y^3-5) + \frac{1}{3}\ln(t^3+1) = \ln c$$

$$\ln[(y^3-5)(t^3+1)] = \ln c \qquad (y^3-5)(t^3+1) = c$$

16.37 重新考虑问题 16.35，设

$$3dy + \frac{t}{t^2-1}dt = 0$$

解 ☞ 积分

$$3y + \frac{1}{2}\ln(t^2-1) = c$$

令左边作为 e 的指数，并且忽略 c，这是因为作为一个任意常数，它可以等价表示为 c 或 e^c

$$e^{3y+(1/2)\ln(t^2-1)} = c$$

$$e^{3y}e^{\ln(t^2-1)^{1/2}} = c \qquad e^{3y}(t^2-1)^{1/2} = c$$

微分方程在经济学中的应用

16.38 若对于所有的 $P \geqslant 0$ 点弹性 ε 是 -1. 求解需求函数 $Q = f(P)$.

解 ☞

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -1 \qquad \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P}$$

分离变量

$$\frac{dQ}{Q} + \frac{dP}{P} = 0$$

积分，$\ln Q + \ln P = \ln c$

$$QP = c \qquad Q = \frac{c}{P}$$

16.39　若 $\varepsilon=-k$ 是常数，求解需求函数 $Q=f(P)$.

解 ☞
$$\varepsilon=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=-k\qquad \frac{dQ}{dP}=-\frac{kQ}{P}$$
分离变量
$$\frac{dQ}{Q}+\frac{1}{P}dP=0$$
$$\ln Q+k\ln P=c$$
$$QP^k=c\qquad Q=cP^{-k}$$

16.40　若当 $P=0$ 时，$\varepsilon=-(5P+2P^2)/Q$ 且 $Q=500$，求需求函数 $Q=f(P)$.

解 ☞
$$\varepsilon=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{-(5P+2P^2)}{Q}$$
$\frac{dQ}{dP}=\frac{-(5P+2P^2)}{Q}\frac{Q}{P}=-(5+2P)$

分离变量
$$dQ+(5+2P)dP=0$$
积分
$$Q+5P+P^2=c\qquad Q=-P^2-5P+c$$
当 $P=10$, $Q=500$,
$$500=-100-50+c\qquad c=650$$
则 $Q=650-5P-P^2$

16.41　推导公式 $P=P(0)e^{it}$，P 是以 $P(0)$ 为初始金额，以 i 为利率，t 年后的总价值.若 i 是连续利.
$$\frac{dP}{dt}=iP$$

解 ☞ 分离变量
$$\frac{dP}{P}-i\,dt=0$$
积分
$$\ln P-it=c$$
左边设为 e 的指数
$$e^{\ln P-it}=c$$
$$Pe^{-it}=c\qquad P=ce^{it}$$
当 $t=0$ 时，$P=P(0)$. 则 $P(0)=ce^0$，$c=P(0)$，有 $P=P(0)e^{it}$

16.42　确定一个二部分收入决定模型的稳定条件.在这个模型中，$\hat{C}$，$\hat{I}$，$\hat{Y}$ 分别代表消费量、投资量和收入与均衡值 C_e，I_e，Y_e 的偏移.也就是说 $\hat{C}=C(t)-C_e$，这里 $\hat{C}$ 读作"C 帽".收入的变化率是与超额需求 $C+I-Y$ 成比例的，且
$$\hat{C}(t)=g\hat{Y}(t),\quad \hat{I}(t)=b\hat{Y}(t),\quad \frac{d\hat{Y}(t)}{dt}=a(\hat{C}+\hat{I}-\hat{Y}),\quad 0<a,b,g<1$$

解 ☞ 把前两个方程代入第三个
$$\frac{d\hat{Y}}{dt}=a(g+b-1)\hat{Y}$$
分离变量，并积分
$$\frac{d\hat{Y}}{\hat{Y}}=a(g+b-1)dt$$
$$\ln\hat{Y}=a(g+b-1)t+c$$
$$e^{\ln\hat{Y}}=e^{a(g+b-1)t+c}$$
令常数 $e^c=c$
$$\hat{Y}=ce^{a(g+b-1)t}$$
当 $t=0$ 时，$\hat{Y}=Y(0)-Y_e=c$. 代入上式 $\hat{Y}=[Y(0)-Y_e]e^{a(g+b-1)t}$. 因为 $\hat{Y}=Y(t)-Y_e$，$Y(t)=Y_e+\hat{Y}$，则

$$Y(t) = Y_c + [Y(0) - Y_c]e^{a(g+b-1)t}$$

当 $t\to\infty$ 时，$Y(t)\to Y_c$，当且仅当 $g+b<1$. 边际消费倾向 g 趋势和边际投资的趋势 b 一定小于 1.

16.43 在例 11 中我们得到 $P(t)=[P(0)-\overline{P}]e^{-m(h-b)t}-\overline{P}$，(a) 解释时间路径(1)初始价格为 $P(0)=\overline{P}$，(2)$P(0)>\overline{P}$，(3)$P(0)<\overline{P}$. (b) 作图.

解 ☞ (a) 1)如果初始价格等于均衡价格 $P(0)=\overline{P}$，那么右边的第一项将消失且 $P(t)=\overline{P}$. 如果时间路径是一条水平线，调整是及时的. 见图 16-2.

2)若 $P(0)\geqslant\overline{P}$. 右边的第一项是正的. 那么当 $t\to\infty$，$P(t)\geqslant\overline{P}$，$P(t)$ 将从上方接近于 $\overline{P}$，右边的第一项趋于 0.

3)若 $P(0)\leqslant\overline{P}$. 右边的第一项是负的. 并且当 $t\to\infty$，$P(t)\leqslant\overline{P}$. $P(t)$ 从下面接近 $\overline{P}$，并且第一项→0.

(b) 见图 16-2.

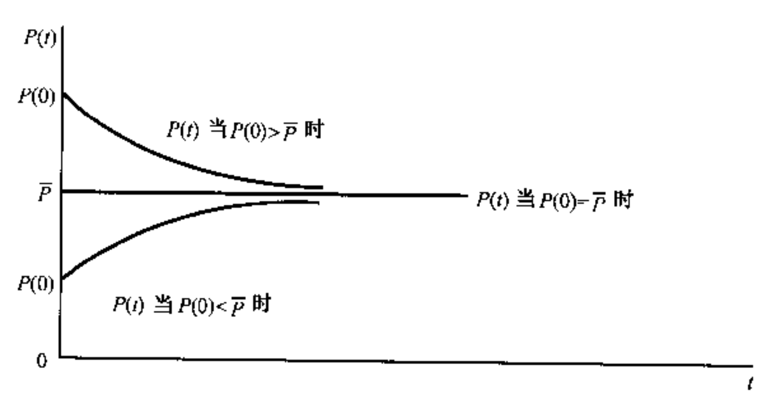


图 16-2

16.44 投资的变化率将影响经济的总需求和生产能力. Domar 模型致力于寻找经济增长的时间路径，经济可以在充分发挥生产能力的同时沿着该路径增长. 若边际储蓄倾向与趋势和边际资本产出的比率 k 都是常数. 求达到预求增长所需的投资函数.

解 ☞ 总体需求的变化等于投资的变化乘以 $1/s$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} \tag{16.54}$$

生产能力的变化等于资本存量的变化乘以边际资本-产出比率的倒数

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{k}\frac{dK}{dt} = \frac{1}{k}I \qquad 因为\frac{dK}{dt} = I \tag{16.55}$$

求充分利用能力，令(16.54)式和(16.55)式相等

$$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{1}{k}I \qquad \frac{1}{s}dI = \frac{1}{k}I\,dt$$

分离变量

$$\frac{dI}{I} - \frac{s}{k}dt = 0$$

积分

$$\ln I - \frac{s}{k}t = c$$

$$Ie^{-(s/k)t} = c \qquad I = ce^{(s/k)t}$$

在 $t=0$，$I(0)=c$，有 $I=I(0)e^{(s/k)t}$.

投资量必须以由 s/k 决定的常数比率增长；即储蓄率与资本-产出率之比.

16.45 Solow 模型是用来求得在充分利用资本和劳动力的条件下的均衡增长路径问题，它假设以下成立.

解 ☞ 1. 产出是一个关于资本和劳动力的线性齐次函数，即规模报酬不变.

$$Y = f(K, L) \tag{16.56}$$

2.产出的固定比例 s 被存储及被投资的.

$$\frac{dK}{dt} \equiv \dot{K} = sY \tag{16.57}$$

3.劳动力的供应是以一定比率 r 增加的,

$$L = L_0e^{rt} \tag{16.58}$$

得到以 K/L 为单一变量的微分方程,它是这个模型的基础.

把(16.56)中的 Y 代入(16.57),

$$\frac{dY}{dt} = sf(K,L) \tag{16.59}$$

把(16.58)中的 L 代入(16.59),

$$\frac{dK}{dt} = sf(K,L_0e^{rt}) \tag{16.60}$$

资本构成路径(dK/dt)必须保证充分利用增长的劳动力,转变成关于 K/L 的函数形式,令 $z=K/L$,则 $K=zL$.利用(16.58),

$$K = zL_0e^{rt} \tag{16.61}$$

对(16.61)式求导数,由于 z 是 t 的函数,所以应用乘法法则

$$\frac{dK}{dt} = z(rL_0e^{rt}) + L_0e^{rt}\frac{dz}{dt} = \left(zr + \frac{dz}{dt}\right)L_0e^{rt} \tag{16.62}$$

令(16.60)式和(16.62)式相等

$$sf(K,L_0e^{rt}) = \left(zr + \frac{dz}{dt}\right)L_0e^{rt} \tag{16.63}$$

因为(16.63)式的左边是一个线性齐次生产函数,我们可以把投入变量除以 L_0e^{rt},然后再把函数乘以 L_0e^{rt} 函数,值并不改变.因此

$$sf(K,L_0e^{rt}) = sL_0e^{rt}f\left(\frac{K}{L_0e^{rt}},1\right) \tag{16.64}$$

把(16.64)代入(16.63),然后两边分别除以 L_0e^{rt}

$$sf\left(\frac{K}{L_0e^{rt}},1\right) = zr + \frac{dz}{dt} \tag{16.65}$$

最后用 z 代替 K/L_0e^{rt},两边再减去 zr

$$\frac{dz}{dt} = sf(z,1) - zr \tag{16.66}$$

这就是一个以单变量 z 和两个参数 r, s 为形式的微分方程.这里 $z=K/L$, $r=$劳动力的增长率, $s=$存储率.

16.46 若所需的货币只是用来交易,那么

$$M_d = kP(t)Q \tag{16.67}$$

这里 k 是一个常数,P 是价格水平,Q 是实际产出.假定 $M_s=M_d$.并且它是由金融机构外在决定的.若通货膨胀或者价格的变化率是和社会上对产品的超额需求成比例的,那么根据 Walras 定律,对产品的超额需求等于货币的过量供给,那么

$$\frac{dP(t)}{dt} = b(M_s - M_d) \tag{16.68}$$

求平稳条件,当实际产出 Q 是一个常数时.

解 把(16.67)代入(16.68),

$$\frac{dP(t)}{dt} = bM_s - bkP(t)Q \tag{16.69}$$

若令

$$\hat{P} = P(t) - P_e \tag{16.70}$$

这里 $\hat{P}$ 是与均衡价格水平 P_e 的偏离,那么对(16.70)式求导数,

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} - \frac{dP_e}{dt}$$

但是,在平衡水平下,$dP_e/dt=0$.因此

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16.71}$$

代入(16.69)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=bM_s-kbP(t)Q \tag{16.72}$$

在均衡状态下 $M_s=M_d=kP_e$，因此 $M_s-kP_eQ=0$，从而 $b(M_s-kP_eQ)=0$.用(16.72)式减去它

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=bM_s-kbP(t)Q-bM_s+bkP_eQ=-bkQ[P(t)-P_e]=-bkQ\hat{P} \tag{16.73}$$

这是一个微分方程.分离变量

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\hat{P}}=-bkQ\mathrm{d}t$$

积分，$\ln\hat{P}=-bkQt-c$，$\hat{P}=A\mathrm{e}^{-bkQt}$，这里 $e^c=A$.

因为 $b,k,Q>0$，当 $t\to\infty$ 时，$\hat{P}\to 0$.系统是稳定的.参考16.42问题的结果，由 $\hat{P}$ 可以得到 $P(t)$ 的时间路径，这里 $Y(t)$ 由 $\hat{Y}$ 求得.

16.47 若通货膨胀期望是一个关于目前通货膨胀率的正函数

$$\left[\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\right]_E=h\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16.74}$$

并且通货膨胀期望会降低人们持有货币的愿望，因此

$$M_d=kP(t)Q-g\left[\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\right]_E \tag{16.75}$$

检验稳定条件，如同(16.78)式，假定通货膨胀率和货币的过量供给成正比.

解 ☞ 把(16.74)式代入(16.75)，

$$M_d=kP(t)Q-gh\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16.76}$$

把(16.76)代入(16.68))，

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=bM_s-b\left[kP(t)Q-gh\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

和从(16.70)到(16.73)的过程相似

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=bM_s-bkP(t)Q+bgh\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}-bM_s+bkP_eQ=-bkQ\hat{P}+bgh\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16.77}$$

在(16.77)中把 $\mathrm{d}P(t)/\mathrm{d}t$ 代换成(16.77)，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=-bkP(t)Q+bgh\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{-bkQ\hat{P}}{1-bgh}$$

分离变量，

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{P}}=\frac{-bkQ}{1-bgh}\mathrm{d}t$$

积分，$\ln\hat{P}=-bkQt/(1-bgh)$

$$\hat{P}=A\mathrm{e}^{-bkQt/(1-bgh)}$$

因为 $b,k,Q>0$，当 $t\to\infty$ 时，若 $bgh<1$，则 $\hat{P}\to 0$.因此这意味着，只要 b,g 充分小，即使 h 大于1，人们期望通货膨胀加速，经济可能是稳定的.

微分方程的相位图

16.48 (a) 构造下列非线性微分方程的相位图，并用(b) 箭头的移动，(c) 相位线的斜率和(d) 偏离，观察它的动态稳定性.

$$\dot{y}=3y^2-18y$$

解 ☞ (a) 令 $\dot{y}=0$，我们可以在相位图和水平轴相交处得到临时的平衡解

$$3y(y-6)=0$$

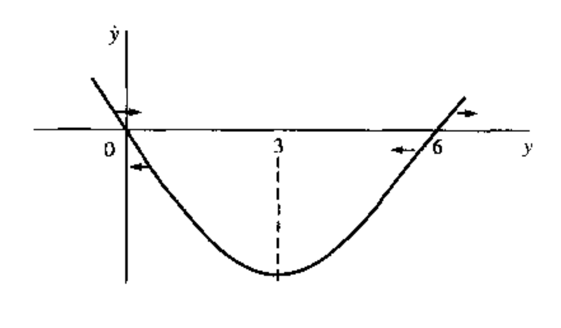
$$\bar{y}_1=0\qquad\bar{y}_2=6$$

于是我们可以找到临界值，看看它是最大或最小值.

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=6y-18=0 \qquad y=3 \qquad \text{临界值}$$

$$\frac{d^2\dot{y}}{dy^2}=6>0 \qquad \text{相对最小值}$$

根据这些信息,我们可以做出具有正确结构的草图,见图 16-3.



$\dot{y}=3y^2-18y$ 的相图

图 16-3

(b)　在水平轴上方,这里 $\dot{y}\geqslant 0$,箭头向右移动;在水平轴下方 $\dot{y}\leqslant 0$,箭头向左移动.因此箭头向 $\bar{y}_1=0$移动.而远离 $\bar{y}_2=6$,所以 $\bar{y}_1$ 是稳定的,$\bar{y}_2$ 不稳定的.

(c)　当相位图在经过 $\bar{y}_1=0$ 时其斜率是负的,我们知道 $\bar{y}_1$ 是稳定的,在 $\bar{y}_2=6$ 具有负的斜率,$\bar{y}_2$ 是不稳定的.

(d)　不考虑曲线图,对方程求导可以计算出临界值.我们可以看到

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=6y-18$$

$$\frac{d\dot{y}}{dy}(0)=6(0)-18=-18<0 \qquad \bar{y}_1=0\text{是稳定的}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dy}(6)=6(6)-18=18>0 \qquad \bar{y}_2=6\text{是不稳定的}$$

16.49　对以下方程重复习题 16.48 的练习.

$$\dot{y}=-y^2+6y-5$$

解 ☞ (a)　令 $\dot{y}=0$

$$(y-1)(-y+5)=0$$

$$\bar{y}_1=1 \qquad \bar{y}_2=5$$

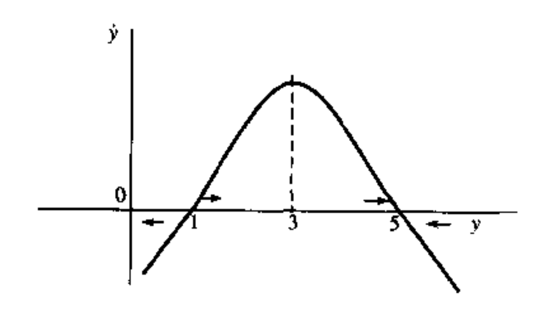
最优化,

$$\frac{d\dot{y}}{dy}=-2y+6=0$$

$$y=3 \qquad \text{边界值}$$

$$\frac{d^2\dot{y}}{dy^2}=-2<0 \qquad \text{相对最大值}$$

画出曲线图见图 16-4.



$\dot{y}=-y^2+6y-5$ 的相图

图 16-4

(b)　因为箭头向 $\bar{y}_2=5$ 移动而远离 $\bar{y}_1=1$,所以 $\bar{y}_2$ 是稳定的而 $\bar{y}_1$ 是不稳定的.

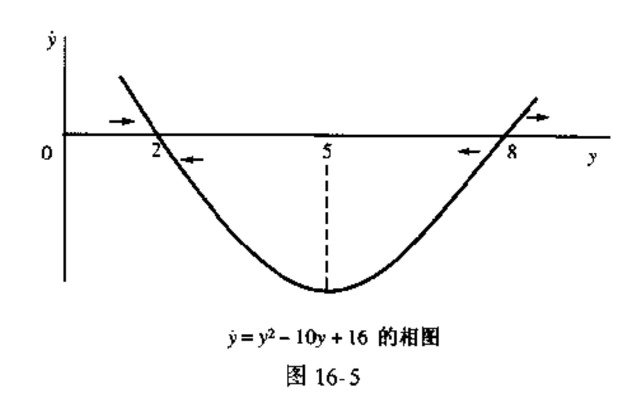
(c)　在 $\bar{y}_2=5$ 的负的斜率和在 $\bar{y}_1=1$ 的正的斜率表示 $\bar{y}_2$ 是稳定的均衡点，$\bar{y}_1$ 是不稳定的均衡点.

(d)
$$\frac{d\dot{y}}{dy}=-2y+6$$
$$\frac{d\dot{y}}{dy}(1)=-2(1)+6=4>0 \qquad \bar{y}_1=1 \text{ 是不稳定的}$$
$$\frac{d\dot{y}}{dy}(5)=-2(5)+6=-4<0 \qquad \bar{y}_2=5 \text{ 是稳定的}$$

16.50　重新考虑问题(16.49)，设 $\dot{y}=y^2-10y+16$.

解　☞ (a)
$$(y-2)(y-8)=0$$
$$\bar{y}_1=2 \qquad \bar{y}_2=8$$
$$\frac{d\dot{y}}{dy}=2y-10=0 \qquad y=5 \text{ 边界值}$$
$$\frac{d^2\dot{y}}{dy^2}=2>0 \qquad \text{相对最小值}$$

草图如下，见图 16-5.



$\dot{y}=y^2-10y+16$ 的相图

图 16-5

(b)　因为箭头向 $\bar{y}_1=2$ 移动而远离 $\bar{y}_2=8$，所以 $\bar{y}_1$ 是稳定的而 $\bar{y}_2$ 是不稳定的.

(c)　在 $\bar{y}_1=2$ 点的负的斜率和在 $\bar{y}_2=8$ 的正的斜率表示 $\bar{y}_1$ 是稳定的平衡点，$\bar{y}_2$ 是不稳定的均衡点.

(d)
$$\frac{d\dot{y}}{dy}=2y-6$$
$$\frac{d\dot{y}}{dy}(2)=2(2)-10=-6<0 \qquad \bar{y}_1=2 \text{ 是稳定的}$$
$$\frac{d\dot{y}}{dy}(8)=2(8)-10=6>0 \qquad \bar{y}_2=8 \text{ 是不稳定的}$$

第十七章　一阶差分方程

17.1　定义和概念

差分方程式表示的是因变量和滞后的自变量之间的关系,这些变量在离散的时间区间内变化,例如 $I_t = f(Y_{t-1})$,这里 I 和 Y 是每年年末的测量值,差分方程式的阶数是由滞后时期的最大数决定,一阶差分方程表式在一个单位时间上的滞后,二阶、两个单位时间的滞后;等等,t 从 t 变化到 $t+1$,引起 y 的变化,我们把 y 的变化叫做 y 的一阶差分,写作

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \Delta y_t = y_{t+1} - y_t \tag{17.1}$$

在微分方程中我们通常用 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 来表示连续变化,而在这里我们用 Δ 来代替它,差分方程式的解决定了取每一个 t 值时的 y,而且它不再包含差分表达式,见例 1 和例 2.

例 1　下面是表示出其阶数的差分方程.

$$I_t = a(Y_{t-1}Y_{t-2}) \qquad 二阶$$

$$Q_s = a + bP_{t-1} \qquad 一阶$$

$$y_{t+3} - 9y_{t+2} + 2y_{t+1} + 6y_t = 8 \qquad 三阶$$

$$\Delta y_t = 5y_t \qquad 一阶$$

用(17.1)式替代上述 Δy_t

$$y_{t+1} - y_t = 5y_t \qquad y_{t+1} = 6y_t \qquad 一阶$$

例 2　给定 y 的初始值为 y_0,在差分方程中

$$y_{t+1} = by_t \tag{17.2}$$

所求得的解如下.在(17.2)中依次取 $t=0,1,2,3$,等时,

$$y_1 = by_0 \qquad y_3 = by_2 = b(b^2y_0) = b^3y_2$$

$$y_2 = by_1 = b(by_0) = b^2y_0 \qquad y_4 = by_3 = b(b^3y_0) = b^4y_0$$

那么,对任意的 t,

$$y_t = b^t y_0$$

这种方法被称为迭代法.因为 y_0 是常数,注意到,b 在确定 $y(t)$ 过程中起着关键作用.

17.2　求解一阶线性差分方程的一般形式

给出一阶差分方程,它是线性的(即所有的变量都是一次的,且没有交叉乘积项)

$$y_t = by_{t-1} + a \tag{17.3}$$

这里 b 和 a 是常数,求定解的一般公式是

$$y_t = \left(y_0 - \frac{a}{1-b}\right)b^t + \frac{a}{1-b} \qquad 当\ b \neq 1 \tag{17.4}$$

$$y_t = y_0 + at \qquad 当\ b = 1 \tag{17.4a}$$

若初始条件没有给出,用任意常数 A 表示(17.4)中 $y_0 - a/(1-b)$ 和(17.4a)中的 y_0,我们称之为通解,见例 3 和习题 17.1～17.13.

例 3　考虑差分方程 $y_t = -7y_{t-1} + 16$ 和 $y_0 = 5$,在方程中 $b = -7$ 和 $a = 16$.因为 $b \neq 1$,应用(17.4)求解如下:

$$y_t = \left(5 - \frac{16}{1+7}\right)(-7)^t + \frac{16}{1+7} = 3(-7)^t + 2 \tag{17.5}$$

检验,把 $t=0$ 和 $t=1$ 代入(17.5),

$$y_0 = 3(07)^0 + 2 = 5 \qquad 因(-7)^0 = 1$$

$$y_1 - 3(-7)^1 + 2 = -19$$

在原始方程中用 $y_1 = -19$ 代替 y_t 并且用 $y_0 = 5$ 代替 y_{t-1},

$$-19 = -7(5) + 16 = -35 + 16$$

17.3 稳定条件

方程(17.4)可以表达为一般形式

$$y_t = Ab^t + c \tag{17.6}$$

这里 $A = y_0 - a/(1-b)$ 和 $c = a/(1-b)$. 称 Ab^t 为**余函数**, c 是特解, 特解表示的是 y 的**暂态均衡水平**, 余函数代表了与平衡水平的偏差. 因此, 方程将是动态稳定的当且仅当 $t \to 0$ 时余函数 $Ab^t \to 0$, 这依赖于底 b. 假若在某一时刻 $A = 1, c = 0$, 指数表达式 b^t 随着 b 的取值不同, 将产生 7 种不同的曲线图, 恰恰如例 4 中所述. 若 $|b| > 1$, 时间轨迹将发散, 且越来越远离衡态; 若 $|b| < 1$ 时, 时间路径将收敛, 它是逐渐接近于平衡态. 若 $b < 0$, 时间路径将在正负值间震荡; 若 $b > 0$, 时间轨线将非震荡. 若 $A \neq 1$, 那么乘以这个常数将扩大或缩小 b^t 的规模, 但它并不会改变曲线运动的基本模式. 若 $A = -1$, 则产生的是 b^t 关于水平轴的镜像. 若 $c \neq 0$, 则影响曲线垂直截距, 则曲线将相应的上移或下移, 见例 4 和例 5, 见习题 17.1～17.13.

例 4 在方程 $y_t = b^t$ 中, b 的范围是从 $-\infty$ 到 ∞, 则产生 7 个不同的时间曲线图, 下面我将解释每一个曲线图(见图 17-1).

1. 若 $b > 1$, b^t 随着 t 的增加而增加, 因此就越来越远离水平轴, 见图(17-1 (a)), 这是一个阶梯函数, 代表了离散时间性区间内的变化, 它不是一个连续函数. 假若 $b = 3$, 那么当 t 从 0 变到 4 时, $b^t = 1, 3, 9, 81$.

2. 若 $b = 1$, 对于任意的 t 值 $b^t = 1$, 它表示的是一条水平线如图 17-1(b).

3. 若 $0 < b < 1$, 那么 b 是一个正分数, b^t 随着 t 的增加而减少, 并且越来越接近于水平

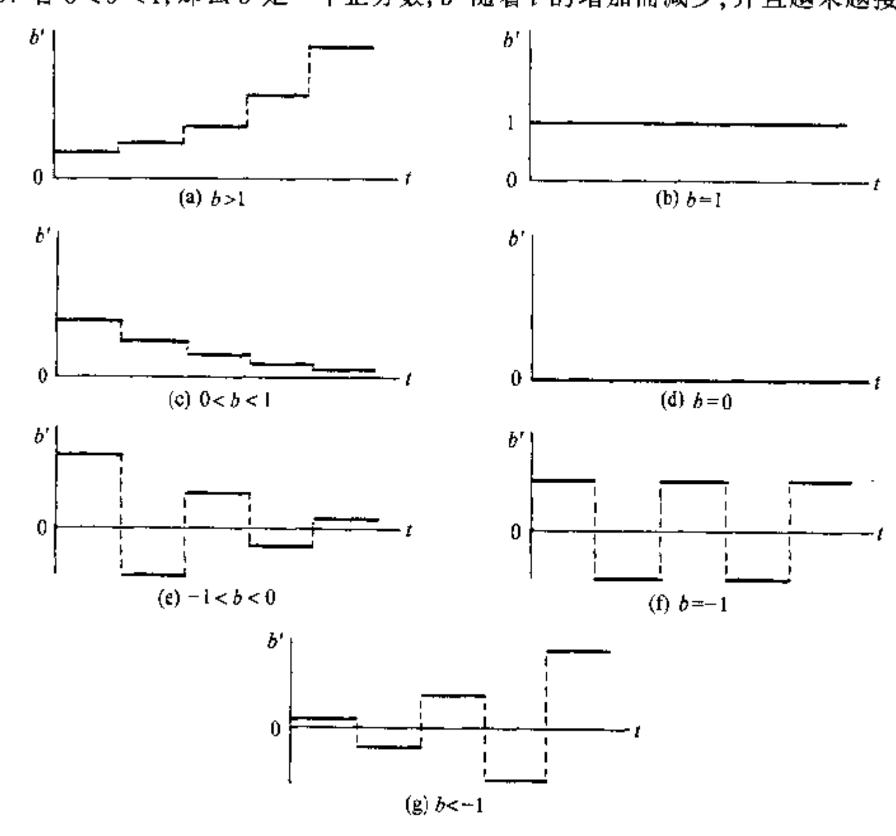


图 17-1 b^t 的时间路径

轴,但它总是保持正值,如图 17-1(c).假若 $b=\frac{1}{3}$,那么,当 t 从 0 变到 4 时 $b^t=1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81}$.

4. 若 $b=0$,对任意的 t 值,$b^t=0$,见图 17-1(d).

5. 若 $-1<b<0$,那么 b 是负分数,随着 t 的变化 b^t 的符号将交替变更而且越来越接近于水平轴,见图 17-1(e).若 $b=-\frac{1}{3}$,那么当 t 从 0 变到 4 时, $b^t=1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81}$.

6. 若 $b=-1$,那么 b^t 将在 1 和 -1 间振荡,见图 17-1(f).

7. 若 $b<-1$,那么 b^t 将振荡,而且越来越远离水平轴,如图 17-1(g),若 $b=-3$,那么当 t 从 0 变到 4 时,$b^t=1,-3,9,-27,81$.

综上所述

$\lvert b\rvert>1$	时间轨线发散
$\lvert b\rvert<1$	时间轨线收敛
$b>0$	时间轨线振荡
$b<0$	时间轨线非振荡

例 5 在方程 $y_t=6\left(-\frac{1}{4}\right)+6$ 中,因为 $b=\frac{1}{4}<0$,时间轨线振荡,因为 $|b|<1$,则时间轨线收敛.

当 $y_t=5(6)^t+9$ 和 $b=6>0$ 时,非振荡,由于 $|b|>1$,时间轨线发散.

17.4 滞后收入决定模型

在 2.3 节的简单收入决定模型中是没有滞后性的.现在假定消费量是前一时期收入的函数,那么

$$C_t = C_0 + cY_{t-1}$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

这里 $I_t=I_0$,那么 $Y_t=C_0+cY_{T-1}+I_0$,调整顺序以便和(17.3)相一致.

$$Y_t = cY_{t-} + C_0 + I_0 \tag{17.7}$$

这里,$b=c$,$a-C_0+I_0$,把这些值代入(17.4),因为边际消费倾向 c 的不等于 1,并且当 $t=0$时,假定 $Y_t=Y_0$,

$$Y_t = \left(Y_0 - \frac{C_0+I_0}{1-c}\right)(c)^t + \frac{C_0+I_0}{1-c} \tag{17.8}$$

那么这条时间路径的稳定性取决于 c,因为 $0<MPC<1$,$|c|<1$,时间路径将收敛.因为 $c>0$,所以非振荡,均衡是稳定的,并且当 $t\to\infty$时,$Y_t\to(C_0+I_0)/(1-c)$,这是收入的暂态均衡水平,见例 6 和习题 17.14~17.20.

例 6 给出 $Y_t=C_t+I_t$, $C_t=200+0.9Y_{t-1}$, $I_t=100$, $Y_0=4500$,求解 Y_t.

解 ☞

$$Y_t=200+0.9Y_{t-1}+100=0.9Y_{t-1}+300 \tag{17.9}$$

利用(17.4),

$$Y_t = \left(4500-\frac{300}{1-0.9}\right)(0.9)^t+\frac{300}{1-0.9} = 1500(0.9)^t+3000 \tag{17.10}$$

由于$|0.9|<1$,时间路径发散;由于 $0.9>0$,则没有振荡,因此 Y_t 是动态稳定的.当 $t\to\infty$时,右边第一项趋于零,并且 Y_t 接近于收入的均衡水平:$300/(1-0.9)=3000$.

检验,令(17.10)式中 $t=0$ 和 $t=1$,因此

$$Y_0 = 1500(0.9)^0+3000 = 4500$$
$$Y_1 = 1500(0.9)^1+3000 = 4350$$

在(17.9)中用 $Y_1=4350$ 代替 Y_t, $Y_0=4500$ 代替 Y_{t-1},

$$4350-0.9(4500)=300$$

$$4350-4050=300$$

17.5 蛛网模型

对于许多的产品,如农业产品,在投入市场之前一年种植,目前的供应量取决于上一年的价格.这就构成了一个有趣的均衡问题,若

$$Q_{dt}=c+bP_t \quad 和 \quad Q_{st}=g+hP_{t-1}$$

达到均衡

$$c+bP_t=g+hP_{t-1} \tag{17.11}$$

$$bP_t=hP_{t-1}+g-c \tag{17.12}$$

把(17.12)式除以 b 以达到与(17.3)的形式相一致.

$$P_t=\frac{h}{b}P_{t-1}+\frac{g-c}{b}$$

因为在正常的供给和需求条件下, $b<0$, $h>0$, $h/b\neq1$, 利用(17.4)

$$P_t=\left[P_0-\frac{(g-c)/b}{1-h/b}\right]\left(\frac{h}{b}\right)^t+\frac{(g-c)/b}{1-h/b}=\left(P_0-\frac{g-c}{b-h}\right)\left(\frac{h}{b}\right)^t+\frac{g-c}{b-h} \tag{17.13}$$

当模型处于均衡时, $P_t=P_{t-1}$. 在(17.11) 中用 P_e 代换 P_t 和 P_{t-1},

$$P_e=\frac{g-c}{b-h} \tag{17.13a}$$

代入(17.13)

$$P_t=(P_0-P_e)\left(\frac{h}{b}\right)^t+P_e$$

在一个通常负的需求函数斜率和正的供给函数斜率下, $b<0$ 和 $h>0$. 因此 $h/b<0$ 时间路径将会振荡.

若 $|h|>|b|$, $|h/b|>1$, 时间 P_t 发散.

若 $|h|=|b|$, $h/b=-1$, 时间不规则振荡.

若 $|h|<|b|$, $|h/b|<1$, 时间收敛且 P_t 接近于 P_e.

总之,在供求分析中,如果 $Q=f(P)$,正如数学中习惯表示的,则当供给曲线比需求曲线平坦时,模型是稳定的;但,如果 $P=f(Q)$,正如经济学中典型表示,只有当需求曲线更有弹性,或比供给曲线更平坦,模型才是稳定的.

例 7 给出 $Q_{dt}=86-0.8P_t$ 和 $Q_{st}=-10+0.2P_{t-1}$, 任意时期的市场价格 P_t, 衡价格 P_e 可按如下方法求得. 使供给和需求相等,

$$86-0.8P_t=-10+0.2P_{t-1} \qquad -0.8P_t=0.2P_{t-1}-96$$

除以 -0.8 以满足(17.3)的形式;利用(17.4)

$$P_t=\left(P_0-\frac{120}{1+0.25}\right)(-0.25)^t+\frac{120}{1+0.25}=(P_0-96)(-0.25)^t+96$$

在(17.13)中代入适当的值,就可检验其正确与否,根据(17.13a), $P_e=(-10-86)/(-0.8-0.2)=(-96)/(-1)=96$.

底数 $b=-0.25$, 它是负数且绝对值小于 1, 时间轨迹是振荡和收敛的,平衡态是稳定的,并且当 $t\to\infty$ 时将收敛于 $P_e=96$.

17.6 Harrod 模型

该模型是用来解释经济增长的动力性,它假设

$$S_t=sY_t$$

这里 s 是常数,它同时等于 MPS 和 APS. 它也假定加速原理成立,也就是投资在一段时间内是

与国民收入的变化成比例的

$$I_t = a(Y_t - Y_{t-1})$$

这里 a 是常数,它既等于边际资本-产出比率也等于平均的资本-产出比率.在均衡态下 $I_t = S_t$,因此

$$a(Y_t - Y_{t-1}) = sY_t \qquad (a - s)Y_t = aY_{t-1}$$

除以 $a \quad s$,以满足(17.3)的形式, $Y_t = [a/(a-s)]Y_{t-1}$. 用(17.4), 因 $a/(a-s) \neq 1$

$$Y_t = (Y_0 - 0)\left(\frac{a}{a-s}\right)^t + 0 = \left(\frac{a}{a-s}\right)^t Y_0 \tag{17.14}$$

因此时间路径的稳定性依赖于 $a/(a-s)$.因为 $a=$ 资本-产出比率,正常的情况下都大于 1,并且因为 $s=\text{MPS}$ 是大于 0 小于 1 的数,则底 $a/(a-s)$将大于 0 且通常状态下大于 1.因此 Y_t 是发散的,但是非振荡的.收入将无限地增加,这意味着它是没有边界的.见例 8 和例 9, 习题 17.26～17.27,更多的经济上的应用见习题 17.28～17.30.

例 8　在 Harrod 模型中我们可以求得保证增长率(即经济增长所遵循的路径已经在每年存储和投资间保持均衡).

根据(17.14), Y_t 无限地增长,某一时期的收入是前一时期收入的 $a/(a-s)$倍

$$Y_1 = \left(\frac{a}{a-s}\right)Y_0 \tag{17.15}$$

在这段时期内增长率 G 定义为

$$G = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0}$$

把(17.15)代入上式

$$G = \frac{[a/(a-s)]Y_0 - Y_0}{Y_0} = \frac{[a/(a-s) - 1]Y_0}{Y_0} = \frac{a}{a-s} - 1$$

$$= \frac{a}{a-s} - \frac{a-s}{a-s} = \frac{s}{a-s}$$

因此保证增长率是

$$G_w = \frac{s}{a-s} \tag{17.16}$$

例 9　假若在上述 Harrod 模型中存储的边际倾向是 0.12,并且资本-产出的比率是 2.12.根据(17.14),得 Y_t

$$Y_t = \left(\frac{2.12}{2.12 - 0.12}\right)^t Y_0 = (1.06)^t Y_0$$

根据 17.16, 保证增长率是

$$G_w = \frac{0.12}{2.12 - 0.12} = \frac{0.12}{2} = 0.06$$

17.7　差分方程的相位图

线性差分方程是显函数而非线性差分方程通常不是.然而有关稳定条件的重要信息,也可根据相位图来获得,差分方程的相位图把 y_t 描绘成y_{t-1}的函数,由于经济需求,我们只研究第一坐标系内的相位图,因此所有的变量都应是非负的,当 $y_t = Y_{t-1}$,从原点引出的一条 45°射线,可以使我们获得所有可能的平稳状态的平衡点,通常任何相位图在与 45°射线相交的点都代表了暂时的平衡解.我们可以利用图表(见例 10)或数学推导(见例 11)来求解稳定性. 其中在利用数学公式推导时,这种验证方法依赖于相位线的一阶微分和一阶导数在某一平稳状态点的值.

1.若 $\left|\dfrac{dy_t}{dy_{t-1}}(\bar{y})\right| < 1$, $\bar{y}$ 是局部稳定.若 $\left|\dfrac{dy_t}{dy_{t-1}}(\bar{y})\right| \geqslant 1$, $\bar{y}$ 是局部不稳定的.

2. 若$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(\bar{y})\geqslant 0$，无振荡. 若$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(\bar{y})<0$，振荡.

例 10　给出一个线性差分方程，例如：

$$y_t = y_{t-1}^{0.5} = \sqrt{y_{t-1}}$$

我们可以在几步之内构造出一个相位图.

1. 求平稳状态的解，此时 $y_t = y_{t-1}$，令 y_t 和 y_{t-1} 均等于 $\bar{y}$，利用代数公式即可解出 $\bar{y}$

$$\bar{y} = \bar{y}^{0.5}$$

$$\bar{y}^{0.5} - \bar{y} = 0$$

$$\bar{y}\left(\frac{\bar{y}^{0.5}}{\bar{y}} - 1\right) = \bar{y}(\bar{y}^{0.5} - 1) = 0$$

$$\bar{y}_1 = 0 \qquad \bar{y}_2 = 1 \qquad \text{稳态解}$$

相位图一定在 $\bar{y}_1 = 1$ 和 $\bar{y}_2 = 1$ 处与 45°线相交.

2. 求一阶导数看看斜率是正的还是负的.

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}} = 0.5y_{t-1}^{-0.5} = \frac{0.5}{\sqrt{y_{t-1}}} > 0$$

若 $y_t, y_{t-1} > 0$，相位图一定具有正的斜率.

3. 求二阶导数，看看相位线是凸的还是凹的.

$$\frac{d^2y_t}{dy_{t-1}^2} = -0.25y_{t-1}^{-1.5} = -0.25y_{t-1}^{-3/2} = \frac{-0.25}{\sqrt{y_{t-1}^3}} < 0 \qquad \text{凹的}$$

4. 画出简略图，见图 17-2.

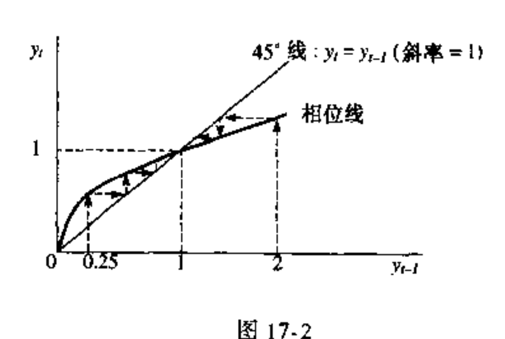


图 17-2

5. 分析相位图的平稳条件，我们可以令 y_{t-1} 取任意值. 令 $y_{t-1} = 0.25$. 反复作阶梯(以箭头表示)垂直的指向相位图，然后跨越水平线与 45°线相交，看看这个过程是否收敛到一个平衡点或者从平衡点发散出去. 在这里，从 $0 < y_{t-1} < 1$ 开始，过程向 $\bar{y}_2 = 1$ 点收敛，而从 $\bar{y}_1 = 0$ 点发散出去. 因此我们开始从 $0 < y_{t-1} < 1$ 内取值，$\bar{y}_2 = 1$ 是局部稳定的平衡点，而 $\bar{y}_1 = 0$ 是局部不稳定的点.

下面我们在 $y_{t-1} > 1$ 内取值，这里取 $y_{t-1} = 2$，重复上面的过程. 根据箭头出现的形式可以看出从 $y_{t-1} > 1$ 开始取值，$\bar{y}_2 = 1$ 也是局部稳定的.

例 11　这里我们可以用相位图的结果来验证上面所描述的简单计算. 再次假设 $y_t = y_{t-1}^{0.5}$，

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}} = 0.5y_{t-1}^{-0.5}$$

计算在 $\bar{y}_2 = 1$ 时的绝对值

$$|0.5(1)^{-0.5}| = \left|\frac{0.5}{\sqrt{1}}\right| = 0.5 < 1 \qquad \text{局部稳定}$$

计算在 $\bar{y}_2 = 1$ 时的值

$$0.5(1)^{-0.5} = \frac{0.5}{\sqrt{1}} = 0.5 > 0 \qquad \text{无震荡}$$

计算 $\bar{y}_1=0$ 时的值,导数是不确定的,但是当 $y_{t-1}\to0$ 时它接近于无穷大.因此 $\bar{y}_1=0$ 是一个局部不平衡点.见习题 17.31~17.33.

习题解答

一阶线性差分方程求解的一般公式的应用

17.1 (a) 求解以下的差分方程;(b) 利用 $t=0$ 和 $t=1$ 时的值检验;(c) 并讨论时间轨线的性质.

$$y_t = 6y_{t-1}$$

解 ☞ (a) 这里 $b=6$ 和 $a=0$. 只要 $b\neq1$,我们可以对所有的例子应用(17.4),

$$y_t = (y_0-0)(6)^t+0 = y_0(6)^t = A(6)^t \tag{17.17}$$

这里 A 作为一个更一般的未定常数,用它来代替 y_0.

(b) 当 $t=0$ 和 $t=1$ 时,估计(17.17)的值,

$$y_0 = A(6)^0 = A \qquad y_1 = A(6) = 6A$$

在原始问题中用 $y_0=A$ 代替 y_{t-1}, $y_1=6A$ 代替 y_t, $6A=6(A)$.

(c) 在(17.17)中由底数 $b=6$ 是正数且大于1,也就是说 $b>0$ 和 $|b|>1$,所以时间轨线是非震荡的和发散的.

17.2 重新考虑问题 17.1,这里 $y_t=\frac{1}{8}y_{t-1}$.

解 ☞ (a) 利用(17.4),

$$Y_t = (y_0-0)\left(\frac{1}{8}\right)^t+0 = y_0\left(\frac{1}{8}\right)^t = A\left(\frac{1}{8}\right)^t$$

(b) 当 $t=0$ 时, $y+0=A\left(\frac{1}{8}\right)^0=A$. 当 $t=1$ 时, $y_1=A\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}A$. 在原始方程中用 $y_0=A$ 代替 y_{t-1} 和用 $y_1=\frac{1}{8}A$ 代替 y_t,原方程 $\frac{1}{8}(A)=\frac{1}{8}(A)$.

(c) 当 $b=\frac{1}{8}$, $b>0$ 和 $|b|<1$ 时,时间轨线是非震荡的和收敛的.

17.3 重新考虑问题 17.1.设 $y_t=-\frac{1}{4}y_{t-1}$, $y_0=16$.

解 ☞ (a) $y_t=\left(8-\frac{60}{1+\frac{1}{4}}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^t+\frac{60}{1+\frac{1}{4}}=-40\left(-\frac{1}{4}\right)^t+48$

(b) 当 $t=0$ 时, $y_0=-40\left(-\frac{1}{4}\right)^0+48=8$. 当 $t=1$ 时, $y_1=-40\left(-\frac{1}{4}\right)+48=58$. 代入原始方程, $58=-\frac{1}{4}(8)+60=58$.

(c) 由于 $b=-\frac{1}{4}$, $b<0$ 和 $|b|<1$,时间轨线是振荡的和收敛的.

17.4 重新考虑问题 17.1,设 $x_t+3x_{t-1}+8=0$, $x_0=16$.

解 ☞ (a) 调整结构以便和(17.3)相一致,

$$x_t = -3x_{t-1}-8$$

那么, $b=-3$, $a=-8$. 代入(17.4),

$$x_t = \left(16+\frac{8}{1+3}\right)(-3)^t-\frac{8}{1+3} = 18(-3)^t-2$$

(b) 当 $t=0$ 时, $x_0=18(-3)^0-2=16$. 当 $t=1$ 时, $x_1=18(-3)-2=-56$. 代入原始方程, $-56+3(16)+8=0$.

c) 由 $b=-3$, $b<0$ 和 $|b|>1$,时间轨线是振荡的和发散的.

17.5 重新考虑问题 17.1,设 $y_t-y_{t-1}=17$.

解 ☞ (a) 变换方程 $y_t=y_{t-1}+17$,这里 $b=1$. 利用(17.4a),因此 $y_t=y_0+17t=A+17t$.

(b) 当 $t=0$ 时，$y_0=A$. 当 $t=1$ 时，$y_1=A+17$. 代入原方程，$A+17-A=17$.

(c) 这里 $b=1$. 那么 $b\geqslant 0$ 和 y_t 将不振荡. 但是由于 $|b|=1$, $1\not<|b|\not<1$, 这是一个特殊的例子. 由于 $a\neq 0$, 除非 $y+0=A=0$, 否则时间轨线是发散的, 因为当 $t\to\infty$ 时余函数趋近于 0. 那么 y_t 趋近于 $A+at$, at 本身不是特解. 当 $b=1$, $a=0$ 时, 见习题 17.17.

17.6 重新考虑问题 17.1. 设 $g_t=g_{t-1}-25$, $g_0=40$.

解 ☞ (a) 应用(17.4a)，$g_t=40-25t$.

(b) 当 $t=0$ 时，$g_0=40$. 当 $t=1$ 时，$g_t=15$. 代入原始方程，$15=40-25$.

(c) 由于 $b=1$, $a\neq 0$ 和 $A=g_0\neq 0$, 时间轨线是非振动和发散的.

17.7 重新考虑问题 17.1, 设 $2y_t=y_{t-1}-18$.

解 ☞ (a) 除以 2, 构成与(17.3)相一致的形式, 利用(17.4),

$$y_t=\frac{1}{2}y_{t-1}-9=\left(y_0-\frac{9}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^t-\frac{9}{1-\frac{1}{2}}=A\left(\frac{1}{2}\right)^t-18$$

这里 A 是一个任意常数等于 y_0+18.

(b) 当 $t=0$ 时，$y_0=A-18$; 当 $t=1$ 时，$y_1=\frac{1}{2}A-18$. 代入原始方程，$2\left(\frac{1}{2}A-18\right)=A-18-18$; $A-36=A-36$.

(c) 由于 $b=\frac{1}{2}$, $b>0$ 和 $|b|<1$, 则 y_t 是非振荡的和收敛的.

17.8 (a)求以下差分方程; (b)用 $t=0$ 和 $t=1$ 检验; (c)讨论时间轨线的特征.

$$5y_t+2y_{t-1}-140=0$$

$$y_0=30$$

解 ☞ (a) 除以 5, 变换方程; 应用(17.4),

$$y_t=-0.4y_{t-1}+28=\left(30-\frac{28}{1+0.4}\right)(-0.4)^t+\frac{28}{1+0.4}=10(-0.4)^t+20$$

(b) 当 $t=0$ 时，$y_0=30$; 当 $t=1$ 时，$y_1=16$. 代入原始方程，$5(16)+2(30)-140=0$.

(c) 由于 $b=-0.4$, $b>0$ 和 $|b|<1$. 则 y_t 是振动的和收敛的.

17.9 重新考虑问题 17.8, 设 $x_{t+1}=4x_t-36$.

解 ☞ (a) 为了和(17.3)相一致, 把时间向前调一个单位 $x_t=4x_{t-1}-36$. 利用(17.4), 如习题 17.7 所示, 用 A 代替 $x_0-a/(1-b)$.

$$x_t=A(4)^t-\frac{36}{1-4}=A(4)^t+12$$

(b) 当 $t=0$ 时，$x_0=A+12$. 当 $t=1$ 时，$x_1=4A+12$. 在原始方程中, 用 $x_1=4A+12$ 代替 x_{t+1} 和用 $x_0=A+12$ 代替 x_t.

(c) 由于 $b=4$, $b>0$ 和 $|b|>1$, x_t 不是振荡的但是它是发散的.

17.10 重新考虑问题 17.8, 设 $y_{t+5}=2y_{t+4}+57=0$, $y_0=11$.

解 ☞ (a) 把时间向前调 5 个单位, 利用(17.4)

$$y_t=-2y_{t-1}-57=\left(11+\frac{57}{1+2}\right)(-2)^t-\frac{57}{1+2}=30(-2)^t-19$$

(b) 当 $t=0$ 时，$y_0=11$; 当 $t=1$ 时，$y_1=-79$. 在原始方程中用 y_1 代替 $y_{t=5}$, y_0 代替 y_{t+4}, $-79+2(11)+57=0$.

(c) 由于 $b=-2$, $b<0$ 和 $|b|>1$, y_t 是振荡的和发散的.

17.11 重新考虑问题 17.1, 设 $8y_{t-2}-2y_{t-3}=120$, $y_0=28$.

解 ☞ (a) 除以 8, 把时间向后调 2 个单位, 变换顺序.

$$y_t=\frac{1}{4}y_{t-1}+15=\left(28-\frac{15}{1-\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^t+\frac{15}{1-\frac{1}{4}}=8\left(\frac{1}{4}\right)^t+20$$

(b) 当 $t=0$ 时，$y_0=28$; 当 $t=1$ 时，$y_1=22$. 用 y_1 代替 y_{t-2}, 用 y_0 代替 y_{t-3}.

$$8(22) - 2(28) = 120 \qquad 120 = 120$$

(c)　由于 $b=\frac{1}{4}$, $b>0$ 和 $|b|<1$, y_t 是非振荡的和发散的.

17.12　重新考虑问题 17.1, 设 $\Delta g_t = 14$.

解　☞ (a)　对 Δg_t, 把(17.1)代入,

$$g_{t+1} - g_t = 14 \qquad (17.18)$$

把时间向前调一个单位, 变换方程

$$g_t = g_{t-1} + 14$$

利用(17.4a), $g_t = g_0 + 14t = A + 14t$.

(b)　当 $t=0$ 时, $g_0 = A$; 当 $t=1$ 时, $g_1 = A+14$. 在(17.18)中用 g_1 代替 g_{t+1}, g_0 代替 g_t, $A+14-A=14$.

(c)　由于 $b=1$, g_t 是一个非振荡的. 若 $A\neq 0$, g_t 是发散的.

17.13　重新考虑问题 17.1, 设 $\Delta y_t = y_t + 13$, $y_0 = 45$.

解　☞ (a)　把(17.1)代入, 把时间向前调一个单位, 变换方程

$$y_t = 2y_{t-1} + 13 \qquad (17.19)$$

利用(17.4)

$$y_t = \left(45 - \frac{13}{1-2}\right)(2)^t + \frac{13}{1-2} = 58(2)^t - 13$$

(b)　当 $t=0$ 时, $y_0=45$; 当 $t=1$ 时, $y_1=103$. 代入(17.19), $103=2(45)+13$; $103=103$.

(c)　由于 $b=2$, $b>0$ 和 $|b|>1$, y_t 是非振荡的和发散的.

滞后的收入决定模型

17.14　给定数据如下:(a) 求国民收入的时间轨线;(b) 用 $t=0$ 和 $t=1$ 进行检验;(c) 讨论时间轨线的稳定性.

$$C_t = 90 + 0.8Y_{t-1} \qquad I_t = 50 \qquad Y_0 = 1200$$

解　☞ (a)　在平衡状态下, $Y_t = C_t + I_t$, 那么

$$Y_t = 90 + 0.8Y_{t-1} + 50 = 0.8Y_t + 140 \qquad (17.20)$$

利用(17.4),

$$Y_t = \left(1200 - \frac{140}{1-0.8}\right)(0.8)^t + \frac{140}{1-0.8} = 500(0.8)^t + 700$$

(b)　$Y_0 = 1200$, $Y_1 = 1100$, 代入(17.20)

$$1100 = 0.8(1200) + 140 \qquad 1100 = 1100$$

(c)　由于 $b=0.8$, $b>0$ 和 $|b|<1$, 时间轨线 Y_t 是非振动的和收敛的. Y_t 收敛到收入为 700 的平衡水平.

17.15　重新考虑问题 17.14, 设 $C_t = 200 + 0.75Y_{t-1}$, $I_t = 50 + 0.15Y_{t-1}$, $Y_0 = 3000$.

解　☞ (a)　$Y_t = 200 + 0.75Y_{t-1} + 50 + 0.15Y_{t-1} = 0.9Y_{t-1} + 250$.

应用(17.4), $Y_t = \left(3000 - \frac{250}{1-0.9}\right)(0.9)^t + \frac{250}{1-0.9} = 500(0.9)^t + 2500$

(b)　$Y_0 = 3000$; $Y_1 = 2950$, 代入上式, $2950 = 0.9(3000) + 250$; $2950 = 2950$.

(c)　由于 $b=0.9$, 时间轨线 Y_t 是非振荡的, 并且向 2500 收敛.

17.16　重新考虑问题 17.1, 设 $C_t = 300 + 0.87Y_{t-1}$, $I_t = 150 + 0.13Y_{t-1}$, $Y_0 = 6000$.

解　☞ (a)　$Y_t = 300 + 0.87Y_{t-1} + 150 + 0.13Y_{t-1} = Y_{t-1} + 450$. (17.21)

利用(17.4a), $Y_t = 6000 + 450t$.

(b)　$Y_0 = 6000$; $Y_1 = 6450$. 代入(17.21), $6450 = 6000 + 450$.

(c)　由于 $b=1$, $A\neq 0$, 时间轨线 Y_t 是非振荡的但是发散的. 见习题 17.5.

17.17　重新考虑问题 17.14, 设 $C_t = 0.92Y_{t-1}$, $I_t = 0.08Y_{t-1}$, $Y_0 = 4000$.

解　☞ (a)　$Y_t = 0.92Y_{t-1} + 0.08Y_{t-1} = Y_{t-1}$.

利用(17.4a)，$Y_t = 4000 + 0 = 4000$.

(b) $Y_0 - 4000 \quad Y_1$.

(c) 当 $b = 1, a = 0$ 时，Y_t 是一个稳定的轨线.

17.18 重新考虑问题 17.14. 设 $C_t = 400 + 0.6Y_t + 0.35Y_{t-1}$，$I_t = 240 + 0.15Y_{t-1}$，$Y_0 = 7000$.

解 ☞ (a) $Y_t = 400 + 0.6Y_t + 0.35Y_{t-1} + 240 + 0.15Y_{t-1} \quad 0.4Y_t = 0.5Y_{t-1} + 640$

除以 0.4，利用(17.4)

$$Y_t = 1.25Y_{t-1} + 1600 = \left(7000 - \frac{1600}{1-1.25}\right)(1.25)^t + \frac{1600}{1-1.25}$$
$$= 13\,400(1.25)^t - 6400$$

(b) $Y_0 = 7000$; $Y_1 = 10{,}350$，代入原始方程

$$10\,350 = 400 + 0.6(10\,350) + 0.35(7000) + 240 + 0.15(7000) = 10\,350$$

(c) 由于 $b = 1.25$，Y_t 是非振荡的和发散的.

17.19 重新考虑问题 17.14，设 $C_t = 300 + 0.5Y_t + 0.4Y_{t-1}$，$I_t = 200 + 0.2Y_{t-1}$，$Y_0 = 6500$.

解 ☞ (a) $Y_t = 300 + 0.5Y_t + 0.4Y_{t-1} + 200 + 0.2Y_{t-1} \quad 0.5Y_t = 0.6Y_{t-1} + 500$

除以 0.5，然后利用(17.4)

$$Y_t = 1.2Y_{t-1} + 1000 = \left(6500 - \frac{1000}{1-1.2}\right)(1.2)^t + \frac{1000}{1-1.2} = 11\,500(1.2)^t - 5000$$

(b) $Y_0 = 6500$; $Y_1 = 8800$，代入原始方程

$$8800 = 300 + 0.5(8800) + 0.4(6500) + 200 + 0.2(6500) = 8800$$

(c) 由于 $b = 1.2$，Y_t 是非震荡的和发散的.

17.20 重新考虑问题 17.14，设 $C_t = 200 + 0.5Y_t$，$I_t = 3(Y_t - Y_{t-1})$，$Y_0 = 10\,000$.

解 ☞ (a) $Y_t = 200 + 0.5Y_t + 3(Y_t - Y_{t-1}) \qquad -2.5Y_t = -3Y_{t-1} + 250$

除以 −0.25，然后利用(17.4)，

$$Y_t = 1.2Y_{t-1} - 80 = \left(10\,000 - \frac{80}{1-1.2}\right)(1.2)^t - \frac{80}{1.2} = 9600(1.2)^t + 400$$

(b) $Y_0 = 10\,000$; $Y_1 = 11\,920$，代入原始方程

$$11\,920 = 200 + 0.5(11\,920) + 3(11\,920 - 10\,000) = 11\,920$$

(c) 由于 $b = 1.2$，时间轨线 Y_t 是发散的但不振荡的.

蛛网模型

17.21 由如下所给数据求：(a)任意时期的市场价格；(b)平衡价格；(c)时间轨线的稳定性.

$$Q_{dt} = 180 - 0.75P_t \qquad Q_{st} = -30 + 0.3P_{t-1} \qquad P_0 = 220$$

解 ☞ (a) 使供求相等

$$\begin{aligned} 180 - 0.75P_t &= -30 + 0.3P_{t-1} \\ -0.75P_t &- 0.3P_{t-1} - 120 \end{aligned} \tag{17.22}$$

除以 −0.75，利用(17.4)

$$P_t = -0.4P_{t-1} + 280 = \left(220 - \frac{280}{1+0.4}\right)(-0.4)^t + \frac{280}{1+0.4} = 20(-0.4)^t + 200 \tag{17.23}$$

(b) 若市场是在均衡状态下，$P_t = P_{t-1}$. 在(17.22)中用 P_e 代替 P_t 和 P_{t-1}，

$$180 - 0.75P_e = -30 + 0.3P_e \qquad P_e = 200$$

这正是(17.23)式右边的第二项.

(c) 由于 $b = -0.4$，时间轨线 P_t 将振荡和收敛.

17.22 用 $t = 0$ 和 $t = 1$ 检验问题(17.21a).

解 ☞ 根据(17.23)，$P_0 = 20(-0.4)^0 + 200$，$P_1 = 20(-0.4) + 200 = 192$. 在(17.22)中用 P_1 代替 P_t，用 P_0 代替 P_{t-1}，

$$180-0.75(192)=-30+0.3(220)$$
$$36=36$$

17.23 重新考虑问题 17.1，设 $Q_{dt}=160-0.8P_t$，$Q_{st}=-20+0.4P_{t-1}$，$P_0=153$.

解 ☞ (a)
$$160-0.8P_t=-20+0.4P_{t-1} \tag{17.24}$$
$$-0.8P_t=0.4P_{t-1}-180$$

除以 -0.8，并利用(17.4)

$$P_t=-0.5P_{t-1}+225=\left(153-\frac{225}{1+0.5}\right)(-0.5)^t+\frac{225}{1+0.5}$$
$$=3(-0.5)^t+150 \tag{17.25}$$

(b) 如同问题 17.21(b)所示，$P_e=150$，见 17.5 节.

(c) 由于 $b=-0.5$，P_t 是振荡的和向 150 收敛的.

17.24 用 $t=0$ 和 $t=1$ 检验问题(17.23a).

解 ☞ 根据(17.25)，$P_0=3(-0.5)^0+150=153$，$P_1=3(-0.5)+150=148.5$，代入(17.24)

$$160-0.8(148.5)=-20+0.4(153)$$
$$41.2=41.2$$

17.25 重新考虑问题 17.1，设 $Q_{dt}=220-0.4P_t$，$Q_{st}=-30+0.6P_{t-1}$，$P_0=254$.

解 ☞ (a)
$$220-0.4P_t=-30+0.6P_{t-1}$$
$$-0.4P_t=0.6P_{t-1}-250$$

除以 -0.4，然后利用(17.4)

$$P_t=-1.5P_{t-1}+625=\left(254-\frac{625}{1+1.5}\right)(-1.5)^t+\frac{625}{1+1.5}=4(-1.5)^t+250$$

(b)
$$P_e=250$$

(c) 由于 $b=-1.5$，P_t 是振荡的和发散的.

HARROD 增长模型

17.26 根据以下数据，(a)求任一时期的收入水平，(b)保证增长率.

$$I_t=2.66(Y_t-Y_{t-1}) \quad S_t=0.16Y_t \quad Y_0=9000$$

解 ☞ (a) 在平衡状态下

$$2.66(Y_t-Y_{t-1})=0.16Y_t \qquad 2.5Y_t=2.66Y_{t-1}$$

除以 2.5，然后利用(17.4)，

$$Y_t=1.064Y_{t-1}=(9000-0)(1.064)^t+0=9000(1.064)^t$$

(b) 根据(17.16)，$G_w=0.16/(2.66-0.16)=0.064$.

17.27 重新考虑问题 17.1，设 $I_t=4.2(Y_t-Y_{t-1})$，$S_t=0.2Y_t$，$Y_0=5600$.

解 ☞ (a)
$$4.2(Y_t-Y_{t-1})=0.2Y_t$$
$$4Y_t=4.2Y_{t-1}$$
$$Y_t=1.05Y_{t-1}$$

利用(17.4)，$Y_t=5600(1.05)^t$

(b)
$$G_w=\frac{0.2}{4.2-0.2}=0.05.$$

在经济上的其他应用

17.28 求出以 P_0 为初始货币量，以 i 为利率，t 年后的价值，每年用复利计算.

解 ☞ 当用复利计算时，

$$P_{t+1}=P_t+iP_t=(1+i)P_t$$

把时期向前调整一个单位，以便和(17.3)相一致

$$P_t = (1+i)P_{t-1}$$

利用(17.4)，因为 $i \neq 0$，　$P_t = (P_0 + 0)(1+i)^t + 0 = P_0(1+i)^t$

17.29 假定 $Q_{dt} = c + zP_t$, $Q_{st} = g + hP_t$，且

$$P_{t+1} = P_t - a(Q_{st} - Q_{dt}) \tag{17.26}$$

也就是说价格不再单纯的由市场机制所决定，而是由存储水平 $Q_{st} - Q_{dt}$ 所决定．假定 $a > 0$，因为存储量($Q_{st} \geqslant Q_{dt}$)的增加将引发价格的降低．而存储量($Q_{st} \leqslant Q_{dt}$)的减少将导制价格的上涨．(a)求任一时期的价格．(b)讨论时间轨线的平稳条件．

解 ☞ (a) 把 Q_{st} 和 Q_{dt} 代入(17.26)

$$P_{t+1} = P_t - a(g + hP_t - c - zP_t)$$
$$= [1 - a(h-z)]P_t - a(g-c) = [1 + a(z-h)]P_t - a(g-c)$$

把时期向前调一个单位以便和(17.3)相一致，利用(17.4)，

$$\begin{aligned} P_t &= \left\{P_0 + \frac{a(g-c)}{1-[1+a(z-h)]}\right\}[1+a(z-h)]^t - \frac{a(g-c)}{1-[1+a(z-h)]} \\ &= \left(P_0 - \frac{g-c}{z-h}\right)[1+a(z-h)]^t + \frac{g-c}{z-h} \end{aligned} \tag{17.27}$$

代入(17.13a)

$$P_t = (P_0 - P_e)[1 + a(z-h)]^t + P_e \tag{17.28}$$

(b) 时间轨线的平稳性依赖于 $b = 1 + a(z-h)$，因为 $a > 0$，在正常的条件下 $z < 0$，$h > 0$，则

如果 $0 < |a(z-h)| < 1$，　$0 < b < 1$；　P_t 收敛且非振荡．

如果 $a(z-h) = -1$，　$b = 0$；　P_t 保持在平衡状态($P_t = P_0$)．

如果 $-2 < a(z-h) < -1$，　$-1 < b < 0$；　P_t 收敛且振荡．

如果 $a(z-h) = -2$，　$b = -1$；　一致收敛．

如果 $a(z-h) < -2$，　$B < -1$；　P_t 振荡并发散．

17.30 按所给数据求：(a)任一时期的价格；(b)用 $t=0$ 和 $t=1$ 检验；(c)讨论平稳条件．

$Q_{dt} = 120 - 0.5P_t$　$Q_{st} = -30 + 0.3P_t$　$P_{t+1} = P_t - 0.2(Q_{st} - Q_{dt})$　$P_0 = 200$

解 ☞ (a) 代入，$P_{t+1} = P_t - 0.2(-30 + 0.3P_t - 120 + 0.5P_t) = 0.84P_t - 30$

把时期向前调一个单位，利用(17.4)，

$$P_t = 0.845P_{t-1} + 30 + \left(200 - \frac{30}{1-0.84}\right)(0.84)^t + \frac{30}{1-0.84} = 12.5(0.84)^t + 30$$

(b) $P_0 = 200$；$P_1 = 198$．代入解的第一个方程，$198 = 200 - 0.2[-30 + 0.3(200) - 120 + 0.5(200)] = 198$．

(c) 由于 $b = 0.84$，P_t 向 187.5 收敛，但非振荡．

差分方程的相位图

17.31 (a)构造以下非线性差分方程的相位图；(b)通过它来验证动态稳定性；(c)通过求导来确定你的答案．

$$y_t = y_{t-1}^3$$

解 ☞ (a) 令 $y_t = y_{t-1} = \bar{y}$ 为暂时平衡点

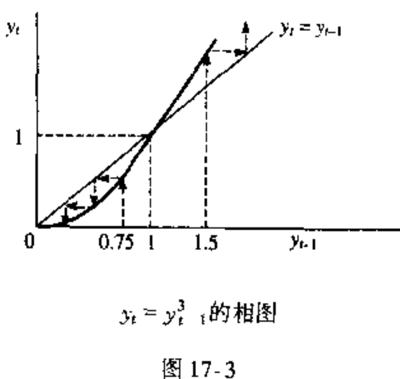
$$\bar{y} = \bar{y}^3$$
$$\bar{y}(1 - \bar{y}^2) = 0$$
$$\bar{y}_1 = 0 \qquad \bar{y}_2 = 1 \qquad \text{暂时均衡水平}$$

相位图在 $y=0$ 和 $y=1$ 处与 45°线相交．下面分别求一阶导数和二阶导数来确定相位线的斜率和凹凸性．

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}} = 3y_{t-1}^2 > 0 \qquad \text{正的斜率}$$

$$\frac{d^2y_t}{dy_{t-1}^2} = 6y_{t-1} > 0 \qquad \text{凸的}$$

由以上信息可以作出草图，见图 17-3.



$y_t=y_{t-1}^3$ 的相图

图 17-3

(b) 从 $y_t=0.75$ 开始沿着箭头所指的方向移动，可以看出函数向着 $\bar{y}_1=0$ 点收敛，而从 $\bar{y}_2=1$ 点发散出去. 若以 $y_t=1.5$ 点开始，函数也是从 $\bar{y}_2=1$ 点发散出去. 因此，无论从哪一边接近 $\bar{y}_2=1$，都是一个不稳定的平衡点. 而只要从一个正值接近，$\bar{y}_1=0$ 都是一个稳定的平衡点.

(c) 不考虑相位图，而通过求方程的一阶导数并且算出它在平衡状态点的值，也可以验证平稳条件

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}=3y_{t-1}^2$$

$$\left|\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(0)\right|=3(0)=0<1 \qquad \text{局部稳定}$$

$$\left|\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(1)\right|=|3|>1 \qquad \text{局部不稳定}$$

由于在 $\bar{y}_1=0$ 和 $\bar{y}_2=1$ 的导数是正的，可知它是非振荡的.

17.32 对于非线性差分方程，重复 7.31 的过程

$$y_t=y_{t-1}^{-0.25}=\frac{1}{\sqrt[4]{y_{t-1}}}$$

解 ☞ (a) 令 $y_t=y_{t-1}=\bar{y}$. 代入上式

$$\bar{y}=\bar{y}^{-0.25}$$

$$\bar{y}-\bar{y}^{-0.25}=0$$

$$\bar{y}(1-\bar{y}^{-0.25})=0$$

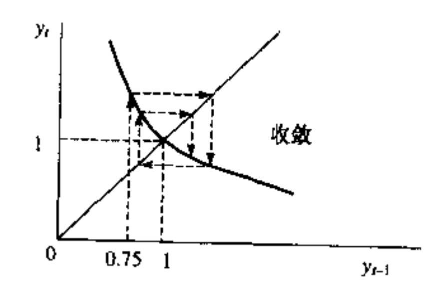
$$\bar{y}=0 \quad \bar{y}=1$$

因为在 $\bar{y}^{-1.25}$，$\bar{y}=0$ 是不确定的，所以只有一个暂时平衡点 $\bar{y}=1$，求导

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}=-0.25y_{t-1}^{-1.25}=\frac{-0.25}{y_{t-1}^{1.25}}<0 \qquad \text{负的斜率}$$

$$\frac{d^2y_t}{dy_{t-1}^2}=0.3125y_{t-1}^{-2.25}>0 \qquad \text{凸的}$$

作草图，见图 17-4.



$y_t=y_{t-1}^{-0.25}$ 的相图

图 17-4

(b) 从一个小于 1 的值开始，令 $y_{t-1}=0.75$ 函数将在大于和小于 1 之间震荡，但是它是收敛于 $\bar{y}=1$的.假如从一个大于 1 的数开始，可以得到同样的结果.

(c) 对于上述微分分别求它在平稳状态下平衡点处的值和绝对值，得到

$$\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}y_{t-1}}=0.25y_{t-1}^{-1.25}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}y_{t-1}}(0)\right|=|-0.25(1)|<1 \qquad 局部稳定$$

$$\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}y_{t-1}}(1)=-0.25(1)<0 \qquad 振荡$$

17.33 对方程重新考虑问题 17.31

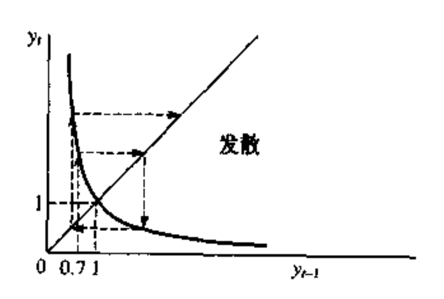
$$y_t=y_{t-1}^{-1.5}$$

解 ☞ (a) 暂态均衡解也是 $\bar{y}=1$.

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}=1.5y_{t-1}^{-2.5}<0 \qquad 负的斜率$$

$$\frac{d^2y_t}{dy_{t-1}^2}=3.75t_{t-1}^{-3.5}>0 \qquad 凸的$$

见图 17-5.



$y_t=y_{t-1}^{-1.5}$的相图

图 17－5

(b) 从一个小于 1 的值开始，设 $y_{t-1}=0.7$，函数将在大于 1 和小于 1 之间振荡，最终从 $\bar{y}=1$ 点发散出去.

(c) 求在均衡点处函数的微分值

$$\left|\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(1)\right|=|-1.5|>1 \qquad 局部不稳定$$

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(1)=-1.5<0 \qquad 振荡$$

第十八章　二阶微分方程和差分方程

18.1　二阶微分方程

二阶微分方程需要对余函数 y_c 和特殊积分 y_p 分别求解,通解是两者之和:$y(t)=y_c+y_p$,给出二阶线性微分方程

$$y''(t)+b_1y'(t)+b_2y(t)=a \tag{18.1}$$

这里 b_1,b_2 和 a 是常数,特殊积分是

$$y_p=\frac{a}{b_2}\qquad b_2\neq 0 \tag{18.2}$$

$$y_p=\frac{a}{b_1}t\qquad b_2=0\quad b_1\neq 0 \tag{18.2a}$$

$$y_p=\frac{a}{2}t^2\qquad b_1=b_2=0 \tag{18.2b}$$

余函数是

$$y_c=y_1+y_2 \tag{18.3}$$

其中

$$y_1=A_1e^{r_1t} \tag{18.3a}$$

$$y_2=A_2e^{r_2t} \tag{18.3b}$$

$$r_1,r_2=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-4b_2}}{2} \tag{18.4}$$

这里 A_1,A_2 是任意常数,且 $b_1^2\neq 4b_2$,r_1 和 r_2 是特征根,并且(18.4)就是特征方程 $r^2+b_1r+b_2=0$ 的解,见例 1~例 4 和习题 18.1~18.11.

例 1　下列方程的特殊积分按如下求得

(1)$y''(t)-5y'(t)+4y(t)=2$;　　(2)$y''(t)+3y'(t)=12$;　　(3)$y''=16$.

对于(1),利用(18.2)
$$y_p=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \tag{18.5}$$

对于(2),利用(18.2a)
$$y_p=\frac{12}{3}t=4t \tag{18.5a}$$

对于(3),利用(18.2b)
$$y_p=\frac{16}{2}t^2=8t^2 \tag{18.5b}$$

例 2　例 1 中方程(1)和(2)的余函数求解如下,方程(3)我们将在例 9 中计算

对于方程(1),根据(18.4)

$$r_1,r_2=\frac{+5\pm\sqrt{(5)^2-4(4)}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=1,4$$

把它代入(18.3a)和(18.3b)中,最后再代入(18.3)中

$$y_c=A_1e^{t}+A_2e^{4t} \tag{18.6}$$

对于方程(2)

$$r_1,r_2=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(0)}}{2}=\frac{-3\pm 3}{2}=0,\ -3$$

则

$$y_c=A_1e^{0}+A_2e^{-3t}=A_1+A_2e^{-3t} \tag{18.6a}$$

例 3　微分方程的通解是由余函数和特殊积分构成的(见 16.2 节),也就是 $y(t)=y_c+y_p$.应用到例 1 的方程中.

对于(1)，根据(18.6)和(18.5)，

$$y(t)=A_1e^t+A_2e^{4t}+\frac{1}{2} \tag{18.7}$$

对于(2)根据(18.6a)和(18.5a)，

$$y(t)=A_1+A_2e^{-3t}+4t \tag{18.7a}$$

例 4　例3中方程1的定解按如下方法计算，假定 $y(0)=5\frac{1}{2}$，$y'(0)=11$.

根据(18.7)，

$$y(t)=A_1e^t+A_2e^{4t}+\frac{1}{2} \tag{18.8}$$

因此

$$y'(t)=A_1e^t+4A_2e^{4t} \tag{18.8a}$$

根据初始条件把 $t=0$ 代入(18.8)和(18.8a)中，已知 $y(0)=5\frac{1}{2}$和 $y'(0)=11$，

$$y(0)=A_1e^0+A_2e^{4(0)}\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}\quad 则\quad A_1+A_2=5$$

$$y'(0)=A_1e^0+4A_2e^{4(0)}=11\quad 则\quad A_1+4A_2=11$$

解得 $A_1=3$ 和 $A_2=2$，代入(18.7)，

$$y(t)=3e^t+2e^{4t}+\frac{1}{2} \tag{18.9}$$

根据(18.9)检验这个解，

$$y(t)=3e^t+2e^{4t}+\frac{1}{2}$$

则

$$y'(t)=3e^t+8e^{4t}\qquad y''(t)=3e^t+32e^{4t}$$

把它代入初始方程[见例1(1)]，

$$(3e^t+32e^{4t})-5(3e^t+8e^{4t})+4\left(3e^t+2e^{4t}+\frac{1}{2}\right)=2$$

18.2　二阶差分方程

二阶差分方程的通解是由余函数和特解构成：$y(t)=y_c+y_p$. 下面给出一个二阶线性差分方程，

$$y_t+b_1y_{t-1}+b_2y_{t-2}=a \tag{18.10}$$

其中 b_1, b_2 和 a 都是常数，特解是

$$y_p=\frac{a}{1+b_1+b_2}\qquad b_1+b_2=\neq-1 \tag{18.11}$$

$$y_p=\frac{a}{2+b_1}t\qquad b_1+b_2=-1\qquad b_1\neq-2 \tag{18.11a}$$

$$y_p=\frac{a}{2}t^2\qquad b_1+b_2=-1\qquad b_1=-2 \tag{18.11b}$$

余函数是

$$y_c=A_1r_1^t+A_2r_2^t \tag{18.12}$$

这里 A_1 和 A_2 是任意常数，利用(18.4)求得特征根 r_1 和 r_2，假设 $b_1^2\neq4b_2$，见例5～例8，习题18.12～18.20.

例 5　求下列方程的特解

(1) $y_t-10y_{t-1}+16y_{t-2}=14$；　(2) $y_t-6y_{t-1}+5y_{t-2}=12$；　(3) $y_t-2y_{t-1}+y_{t-2}=8$.

求解如下：

对于(1)利用(18.11)，　$y_p=\frac{14}{1-10+16}=2$　(18.13)

对于(2)利用(18.11a)，　$y_p=\frac{12}{2-6}t=-3t$　(18.13a)

对于(3)利用(18.11b)，　$y_p=\frac{8}{2}t^2=4t^2$　(18.13b)

例6　根据例5，方程(1)和(2)的余函数计算如下，方程(3)的求解见例9.

对方程(1)，利用(18.4)，然后代入(18.12)式，

$$r_1,r_2=\frac{10\pm\sqrt{100-4(16)}}{2}=\frac{10\pm6}{2}=2,8$$

则

$$y_c=A_1(2)^t+A_2(8)^t \tag{18.14}$$

对方程(2)，

$$r_1,r_2=\frac{6\pm\sqrt{36-4(5)}}{2}=\frac{6\pm4}{2}=1,5$$

因此

$$y_c=A_1(1)^t+A_2(5)^t=A_1+A_2(5)^t \tag{18.14a}$$

例7　例5中方程(1)，(2)的通解计算如下.

对方程(1)，$y(t)=y_c+y_p$，根据(18.14)和(18.13)，

$$y(t)=A_1(2)^t+A_2(8)+2 \tag{18.15}$$

对方程(2)，根据(18.14a)和(18.13a)，

$$y(t)=A_1+A_2(5)^t-3t \tag{18.15a}$$

例8　给定 $y(0)=10$ 和 $y(1)=36$，下面求解例7中方程(1)的定解：在(18.15)中，令 $t=0$ 和 $t=1$，

$$Y(0)=A_1(2)^0+A_a(8)^0+2=A_1+A_2+2$$

$$y(1)=A_1(2)+A_2(8)+2=2A_1+8A_2+2$$

按照初始条件，令 $y(0)=10$ 和 $y(1)=36$，

$$A_1+A_2+2=10$$

$$2A_1+8A_2+2=36$$

联立方程求解 $A_1=5$ 和 $A_2=3$，最后把它们代入(18.15)，

$$y(t)=5(2)^t+3(8)^t+2 \tag{18.16}$$

我们可以分别把 $t=0$，$t=1$ 和 $t=2$ 代入(18.16)式用以检验结果的正确性.

$$y(0)=5+3+2=10 \qquad y(1)=10+24+2=36$$

$$y(2)=20+192+2=214$$

在例5中的方程(1)，即 $y_t-10y_{t-1}+16y_{t-2}=14$ 中分别用 $y(2)$ 代替 y_t，$y(1)$ 代替 y_{t-1}，$y(0)$ 代替 y_{t-2}.

18.3　特征根

一个特征方程可能有三种类型的根.

1. 不同实根，若 $b_1^2>4b_2$，则(18.4)中的平方根将是一个实数，并且 r_1 和 r_2 是不同的实数，如(18.6)和(18.6a)所示.

2. 重复实根，若 $b_1^2=4b_2$，则(18.4)中的平方根等于零，r_1 和 r_2 等于相同实数. 如果出现重复的实根，则公式(18.3)和(18.12)中的 y_c 必须换成

$$y_c=A_1e^{rt}+A_2te^{rt} \tag{18.17}$$

$$y_c=A_1r^t+A_2tr^t \tag{18.18}$$

3. 复根，若 $b_1^2<4b_2$，则(18.4)包含一个负数的平方根，这个平方根称作虚数．这时 r_1 和 r_2 是复数．复数包含虚部和实部，例如 $12+i$，这里 $i=\sqrt{-1}$．

[利用(18.4)作一个简单的计算来验证一下，若 $y''(t)$ 项的系数是 1，则 r_1+r_2 一定等于 $-b_1$，$r_1\times r_2$ 一定等于 b_2．]

例 9 按照如下方法求得例 1 中方程(3)的余函数，这里 $y''(t)=16$，根据(18.4)，

$$r_1, r_2 = \frac{0 \pm \sqrt{0-4(0)}}{2} = 0$$

因为 $r_1=r_2=0$，这是一个有重复实根的例子，利用 18.17 得，$y_c=A_1e^0+A_2te^0=A_1+A_2t$．

在例 5 的方程(3)中，$y_t-2y_{t-1}+y_{t-1}=8$，根据(18.4)求解余函数，$y_c=A_1e^0+A_2te^0=A_1+A_2t$，

$$r_1, r_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

利用(18.18)，因为 $r_1=r_2=1$，$y_c=A_1(1)^t+A_2t(1)^t=A_1+A_2t$．

18.4 共轭复数

若(18.4)式中 $b_1^2<4b_2$，提出 $\sqrt{-1}$ 得

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2} = \frac{-b_1 \pm i\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2}$$

更明确地

$$r_1, r_2 = g \pm hi$$

这里

$$g=-\frac{1}{2}b_1 \qquad h=\frac{1}{2}\sqrt{4b_2-b_1^2} \tag{18.19}$$

$g\pm hi$ 被称作共扼复数，因为它们总是成对出现的．把(18.19)代入(18.3)和(18.12)中，得到在复根的情况下的 y_c，

$$y_c = A_1e^{(g+hi)t}+A_2e^{(g-hi)t} = e^{gt}(A_1e^{hit}+A_2e^{-hit}) \tag{18.20}$$

$$y_c = A_1(g+hi)^t + A_2(g-hi)^t \tag{18.21}$$

见例 10 和习题 18.28～18.35 和 20.11～20.12．

例 10 求解 $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=18$ 的余函数如下，由于 $b_1^2<4b_2$，利用(18.19)，

$$g=-\frac{1}{2}(2)=-1 \qquad h=\frac{1}{2}\sqrt{4(5)-(2)^2}=\frac{1}{2}(4)=2$$

因此，$r_1, r_2=-1\pm 2i$，把它们代入(18.20)得，$y_c=e^{-t}(A_1e^{2it}+A_2e^{-2it})$．

18.5 三角函数

三角函数常和复数相联系．图 18-1 中角 θ 就是圆中半径 k 逆时针方向旋转而成的．θ 的三角函数是

$$\text{sine}(\sin)\theta=\frac{h}{k} \qquad \text{cosine}(\cos)\theta=\frac{g}{k}$$

$$\text{tangent}(\tan)\theta=\frac{h}{g} \qquad \text{cotangent}(\cot)\theta=\frac{g}{h}$$

$$\text{secant}(\sec)\theta=\frac{k}{g} \qquad \text{cosecant}(\csc)\theta=\frac{k}{h}$$

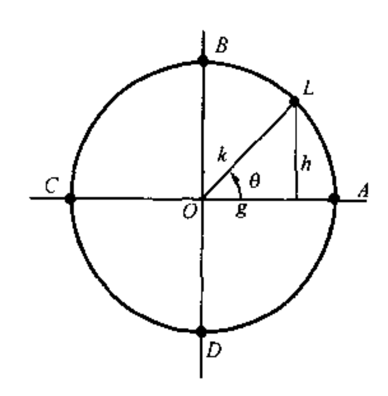
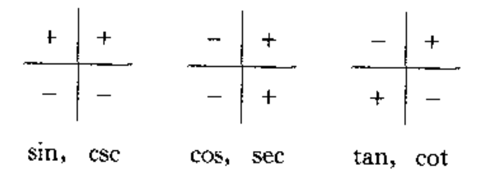


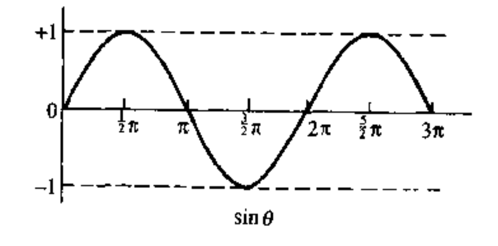
图 18-1

三角函数在坐标系的四个象限的符号为



角度 θ 常用弧度来度量. 因圆的一周是 2π 弧度, $1^\circ=\pi/180$ 弧度. 因此 $360^\circ=2\pi$ 弧度, $180^\circ=\pi$ 弧度, $90^\circ=\pi/2$ 弧度, $45^\circ=\pi/4$ 弧度.

例 11　如图 18-1. 若半径 OL 从 A 点开始, 逆时针方向旋转 360°, 则 $\sin\theta=h/k$, 从 A 点 0 值开始到 B 点时等于 1, 到 C 点时等于 0, 到 D 点时等于 -1, 再次返回到 A 点等于 0, 而 cosine$\theta=g/k$ 在 A 点时等于 1, 到 B 点时等于 0, 到 C 点时等于 -1, 到 D 点时等于 0, 再次返回 A 点时等于 1. 这些从表 18-1 和图 18-2 中可以看到. 注意这两个函数为以 2π 为周期的周期函数(也就是说每旋转 360° 或 2π, 它们就重复一次). 两者都以 1 为波动振幅, 不同之处只在于相位或者说最高峰所处的位置.



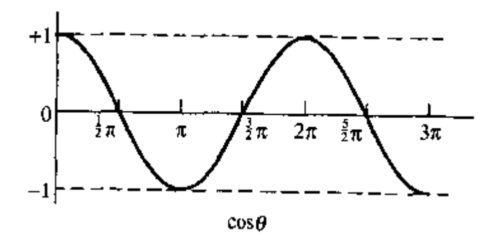


图 18-2

表 18-1

度数	0	90	180	270	360
弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1

18.6　三角函数的导数

设 u 是一个关于 x 的可微函数,

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin u)=\cos u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos u)=-\sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

(3) $\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\frac{du}{dx}$　　(4) $\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$

(5) $\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$　　(6) $\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

见例 12 和习题 18.21～18.27.

例 12　对以下三角函数进行求导

(1) $y=\sin(3x^2+6)$；　(2) $y=4\cos 2x$；　(3) $y=(1+\tan x)^2$.

解　☞ (1) $\frac{dy}{dx}=6x\cos(3x^2+6)$；　(2) $\frac{dy}{dx}=-8\sin 2x$；

(3) $\frac{dy}{dx}=2(1+\tan x)(\sec^2 x)=2\sec^2 x(1+\tan x)$.

18.7　虚部和复数的变换

这里有三条原则可以帮助我们把虚部和复数转化为三角函数.

1. 图 18－1 中，g 和 h 是笛卡尔系数，可用含有 θ 和 k 的项来表示，我们把它们叫做极坐标，简单公式为

$$g=k\cos\theta \qquad h=k\sin\theta \qquad k>0$$

因此对于共轭复数 $(g\pm hi)$，

$$g\pm hi=k\cos\theta\pm ik\sin\theta=k(\cos\theta\pm i\sin\theta) \tag{18.22}$$

2. 我们利用欧拉公式，

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta \tag{18.23}$$

把(18.23)代入(18.22)中，可以把 $g\pm hi$ 表示为

$$g\pm hi=ke^{\pm i\theta} \tag{18.23a}$$

3. 根据(18.23a)，把一个共轭复数推广到它的 n 次幂的形式，就是

$$(g\pm hi)^n=(ke^{\pm i\theta})^n=k^n e^{\pm in\theta} \tag{18.24}$$

或者利用(18.23)，注意当用 $n\theta$ 代替 θ 时，可以得到棣莫佛定理

$$(g\pm hi)^n=k^n(\cos n\theta\pm i\sin n\theta) \tag{18.25}$$

见例 13～15 和习题 18.28～18.35，20.11 和 20.12.

例 13　虚指数函数 $e^{2i\pi}$的值求解如下. 利用(18.23)，这里 $\theta=2\pi$

$$e^{2i\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

由表 18－1，$\cos 2\pi=1$，$\sin 2\pi=0$，则 $e^{2i\pi}=1+i(0)=1$.

例 14　在(18.20)和(18.21)中的虚指数表达式可以转化为如下的三角函数表示：

根据(18.20)，$y_c=e^{gt}(A_1e^{hit}+A_2e^{-hit})$. 利用(18.23)，这里 $\theta=ht$

$$\begin{aligned}y_c&=e^{gt}[A_1(\cos ht+i\sin ht)+A_2(\cos ht-i\sin ht)]\\&=e^{gt}[(A_1+A_2)\cos ht+(A_1+A_2)i\sin ht]\\&=e^{gt}(B_1\cos ht+B_2\sin ht)\end{aligned} \tag{18.26}$$

这里 $B_1=A_1+A_2$ 和 $B_2=(A_1-A_2)i$.

根据(18.21)，$y_c=A_1(g+hi)^t+A_2(g-hi)^t$. 利用(18.25)，用 t 代替 n

$$\begin{aligned}y_c&=A_1k^t(\cos t\theta+i\sin t\theta)+A_2k^t(\cos t\theta-i\sin t\theta)\\&=k^t[(A_1+A_2)\cos t\theta+(A_1+A_2)i\sin t\theta]\\&=k^t(B_1\cos t\theta+B_2\sin t\theta)\end{aligned} \tag{18.27}$$

这里 $B_1=A_1+A_2$ 和 $B_2=(A_1-A_2)^i$.

例 15　(18.26)和(18.27)的时间轨线如下. 考虑(18.26)中的每一项，

1. 这里 $B_1\cos ht$ 是 t 的余弦函数，如图 18-2，以 $2\pi/h$ 而不是 2π 为周期，以常数 B_1 而不是 1 为振幅.

2. 同理 $B_2\sin ht$ 就是一个以 $2\pi/h$ 为周期 B_2，为振幅的正弦函数.

3. 由于前两项持续波动，其稳定性就要依靠 e^{gt}.

若 $g>0$，e^{gt} 会随着 t 的增大而增大，振幅的增大导致 y_c 的发散，它排除了收敛的可能性.

若 $g=0$，$e^{gt}=1$，y_c 可表示为惟一的形式，它是由正弦和余弦函数所决定.它也排除了收敛的可能性.

若 $g<0$，e^{gt} 会随着 t 的增加趋近于 0.振幅的减少会导致函数收敛.见图 18-3.

因为在(18.27)这个差分方程中 t 只能在离散的区间内变化，y_c 是一个阶梯函数而不是连续函数(见图 17-1).和(18.26)一样，y_c 也波动，其稳定性取决于 k^t，若 $|k|<1$，y_c 将收敛，见图 18.8～18.11，18.18～18.20 和 18.31～18.35.

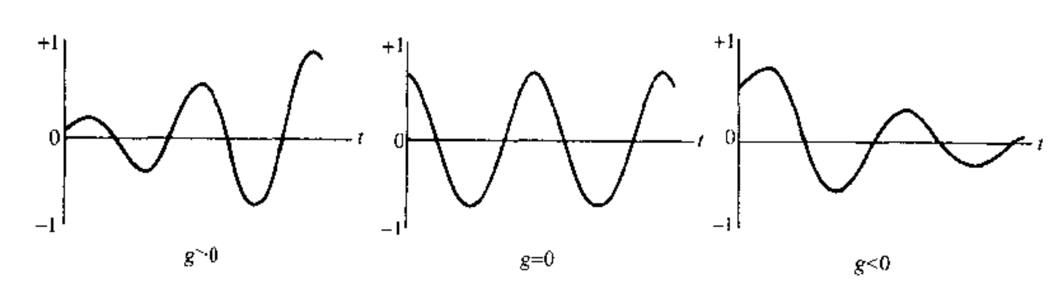


图 18-3 $y_c(t)$ 的时间轨迹

18.8 稳定条件

对于一个有不同或相同实根的二阶线性微分方程，若是收敛的，则两个根一定是负的，若其中一个根是正的，则这个正根的指数项随着 t 趋于无穷也将趋于无穷，因此是发散的，见习题 18.8～18.11. 若特征根是复根，(18.26)中 e^{gt} 中的 g 一定是负的，恰如例 15 中所述.

对于一个有不同或相同实根的二阶线性微分方程，具有最大绝对值的根被称作主根，因为它决定了时间轨线. 若是收敛的，主根的绝对值一定小于 1. 见问题 18.18～18.20. 若是复根，(18.27)中 k 的绝对值一定小于 1. 如例 15. 经济上的应用见习题 18.36～18.37.

习题解答

二阶线性微分方程

不同实根

18.1 以下方程，求(a)特解 y_p.(b)余函数 y_c.(c)通解 $y(t)$.

$$y''(t)+9y'(t)+14y(t)=7$$

解 ☞ (a) 利用(18.2)，$y_p=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

(b) 利用(18.4)

$$r_1,r_2=\frac{-9\pm\sqrt{81-4(14)}}{2}=\frac{-9\pm5}{2}=-2,-7$$

代入(18.3)，$y_c=A_1e^{-2t}+A_2e^{-7t}$.

(c)
$$y(t)=y_c+y_p=A_1e^{-2t}+A_2e^{-7t}+\frac{1}{2} \tag{18.28}$$

18.2 重新考虑问题 18.1，设 $y''(t)-12y'(t)+20y(t)=-100$.

解 ☞ (a) 根据(18.2)，$y_p=-\frac{100}{20}=-5$，

(b) 根据(18.4)，

$$r_1, r_2=\frac{12\pm\sqrt{144-4(20)}}{2}=\frac{12\pm 8}{2}=2,10$$

则，$y_c=A_1e^{2t}+A_2e^{10t}$.

(c)
$$y(t)=y_c+y_p=A_1e^{2t}+A_2e^{10t}-5 \tag{18.29}$$

18.3 重新考虑问题 18.1，设 $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=35$.

解 ☞ (a) 根据(18.2)，$y_p=\frac{35}{-5}=-7$,

(b) 根据(18.4)，

$$r_1, r_2=\frac{4\pm\sqrt{16-4(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=5,\ -1$$

则，$y_c=A_1e^{5t}+A_2e^{-t}$.

(c)
$$y(t)=A_1e^{5t}+A_2e^{-t}-7 \tag{18.30}$$

18.4 重新考虑问题 18.1，设 $y''(t)+7y(t)=28$.

解 ☞ (a) 根据(18.2a)，$y_p=\frac{28}{7}t=4t$,

(b) 根据(18.4)，

$$r_1, r_2=\frac{-7\pm\sqrt{49-4(0)}}{2}=\frac{-7\pm 7}{2}=0,\ -7$$

则 $y_c=A_1e^{(0)t}+A_2e^{-7t}=A_1+A_2e^{-7t}$.

(c)
$$y(t)=A_1+A_2e^{-7t}+4t \tag{18.31}$$

18.5 重新考虑问题 18.1，设 $y''(t)-\frac{1}{2}y'(t)=13$.

解 ☞ (a) 根据(18.2a)，$y_p=\frac{13}{-\frac{1}{2}}=-26t$,

(b)
$$r_1, r_2=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}-4(0)}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}{2}=0,\frac{1}{2}$$

则 $y_c=A_1+A_2e^{(1/2)t}$.

(c)
$$y(t)=y_c+y_p=A_1+A_2e^{(1/2)t}-26t \tag{18.32}$$

重复实根

18.6 求(a) 特解 y_p，(b) 余函数 y_c，(c) 通解 $y(t)$. 设 $y''(t)-12y'(t)+36y(t)=108$.

解 ☞ (a)
$$y_p=\frac{108}{36}=3,$$

(b)
$$r_1, r_2=\frac{12\pm\sqrt{144-4(36)}}{2}=\frac{12\pm 0}{2}=6$$

由(18.17)，因 $r_1=r_2=6$，$y_c=A_1e^{6t}+A_2te^{6t}$.

(c)
$$y(t)=A_1e^{6t}+A_2te^{6t}+3 \tag{18.33}$$

18.7 重新考虑问题 18.6，设 $y''(t)+y'(t)+\frac{1}{4}y(t)=9$.

解 ☞ (a)
$$y_p=\frac{9}{\frac{1}{4}}=36,$$

(b)
$$r_1, r_2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\left(\frac{1}{4}\right)}}{2}=\frac{-1\pm 0}{2}=-\frac{1}{2}$$

用(18.17)，因 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$，$y_c=A_1e^{-(1/2)t}+A_2te^{-(1/2)t}$.

(c)
$$y(t)=A_1e^{-(1/2)t}+A_2te^{-(1/2)t}+36 \tag{18.34}$$

定解和稳定条件

18.8 (a) 求以下方程的定解，(b) 检验，(c) 讨论时间路径的动力稳定性. 设 $y''(t)+9y'(t)+14y(t)=7$, $y(0)=-2\frac{1}{2}$, $y'(0)=31$.

解 ☞ (a)　根据(18.28)，

$$y(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-7t} + \frac{1}{2} \tag{18.35}$$

则

$$y'(t) = -2A_1 e^{-2t} - 7A_2 e^{-7t} \tag{18.35a}$$

把 $t=0$ 代入(18.35)和(18.35a)中

$$y(0) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \qquad y'(0) = -2A_1 - 7A_2$$

令 $y(0) = -2\frac{1}{2}$，$y'(0)=31$，根据初始条件

$$A_1 + A_2 + \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$$

$$-2A_1 - 7A_2 = 31$$

解得 $A_1=2$，$A_2=-5$，代入(18.35)得

$$y(t) = 2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \frac{1}{2} \tag{18.36}$$

(b)　根据(18.36)，$y(t) = 2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \frac{1}{2}$. 则

$$y'(t) = -4e^{-2t} + 35e^{-7t} \qquad y''(t) = 8e^{-2t} - 245e^{-7t}$$

把这些值代入初始问题，这里 $y''(t)+9y'(t)+14y(t)=7$.

$$8e^{-2t} - 245e^{-7t} + 9(-4e^{-2t} + 35e^{-7t}) + 14(2e^{-2t} - 5e^{-7t} + \frac{1}{2}) = 7$$

由于两个特征根均为负数，当 $t\to\infty$，(18.36)趋于$\frac{1}{2}$，因此 $y(t)$是收敛的. 任何时候两个特征根都是负数时，时间轨线都是收敛的.

18.9　重新考虑问题 18.8. 设 $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=35$，$y(0)=5$，$y'(0)=6$.

解 ☞ (a)　根据(18.30)，

$$y(t) = A_1 e^{5t} + A_2 e^{-t} - 7 \tag{18.37}$$

则

$$y'(t) = 5A_1 e^{5t} - A_2 e^{-t} \tag{18.37a}$$

把 $t=0$ 代入(18.37)和(18.37a)，设它们满足初始条件 $y(0)=5$，$y'(0)=6$

$$y(0) = A_1 + A_2 - 7 = 5 \qquad \text{因此 } A_1 + A_2 = 12$$

$$y'(0) = 5A_1 - A_2 = 6$$

解得 $A_1=3$，$A_2=9$，代入(18.37) 得

$$y(t) = 3e^{5t} + 9e^{-t} - 7 \tag{18.38}$$

(b)　根据(18.38)，$y(t)=3e^{5t}+9e^{-t}-7$，则 $y'(t)=15e^{5t}-9e^{-t}$，$y''(t)=75e^{5t}+9e^{t}$.
把这些值代入初始问题，这里 $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=35$.

$$75e^{5t} + 9e^{-t} - 4(15e^{5t} - 9e^{-t}) - 5(3e^{5t} + 9e^{-t} - 7) = 35$$

(c)　当一个特征根是正数，一个特征根是负数时，时间轨线是发散的. 正根主导负根，而不必考虑他们绝对值的大小，因为当 $t\to\infty$时，正根趋于无穷，而负根趋于 0.

18.10　重新考虑问题 18.8，设 $y''(t)-\frac{1}{2}y'(t)=13$，$y(0)=17$，$y'(0)=-19\frac{1}{2}$.

解 ☞ (a)　根据(18.32)，

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{(1/2)t} - 26t \tag{18.39}$$

则

$$y'(t) = \frac{1}{2}A_2 e^{(1/2)t} - 26 \tag{18.39a}$$

把 $t=0$ 代入(18.39) 和(18.39a)，并令它们满足初始条件

$$y(0) = A_1 + A_2 = 17$$

$$y'(0) = \frac{1}{2}A_2 - 26 = -19\frac{1}{2} \qquad A_2 = 13$$

得 $A_2 = 13, A_1 = 4$，代入(18.39)，调整各项位置

$$y(t) = 13e^{(1/2)t} - 26t - 4 \qquad (18.40)$$

(b)　根据(18.40)，$y(t) = 13e^{(1/2)t} - 26t - 4$，则

$$y'(t) = 6.5e^{(1/2)t} - 26 \qquad y''(t) = 3.25e^{(1/2)t}$$

把这些值代入初始方程

$$3.25e^{(1/2)t} - \frac{1}{2}(6.5e^{(1/2)t} - 26) = 13$$

(c)　由于两个特征根均为正数，时间轨线发散.

18.11　重新考虑问题 18.8，设 $y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 9, y(0) = 30$ 和 $y'(0) = 15$.

解　☞ (a)　根据(18.34)，

$$y(t) = A_1e^{-(1/2)t} + A_2te^{-(1/2)t} + 36 \qquad (18.41)$$

对第二项应用乘法法则进行求导

$$y'(t) = -\frac{1}{2}A_1e^{-(1/2)t} - \frac{1}{2}A_2te^{-(1/2)t} + A_2e^{-(1/2)t} \qquad (18.41a)$$

把 $t = 0$ 代入(18.41)、(18.41a)，满足初始条件

$$y(0) = A_1 + 36 \qquad A_1 = -6$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}A_1 + A_2 = 15$$

得 $A_1 = -6, A_2 = 12$．代入(18.41)，

$$y(t) = 12e^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36 \qquad (18.42)$$

(b)　根据(18.42)，$y(t) = 12te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36$，用乘法法则，

$$y'(t) = -6te^{-(1/2)t} + 12e^{-(1/2)t} + 3e^{-(1/2)t}$$

$$y''(t) = 3te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)} - 1.5e^{-(1/2)t} = 3te^{-(1/2)t} - 13.5e^{-(1/2)t}$$

代入原始方程

$$(3te^{-(1/2)t} - 13.5e^{-(1/2)t}) + (-6te^{-(1/2)t} + 15e^{-(1/2)t}) + \frac{1}{4}(12te^{-(1/2)t} - 6e^{-(1/2)t} + 36) = 9$$

(c)　由于重特征根是负的，而 te^{rt} 和 e^{rt} 有着类似的时间轨线，所以这条时间轨线是收敛的.

二阶线性差分方程

不同实根

18.12　求(a) 特征解；(b) 余函数；(c) 通解. 设 $y_t + 7y_{t-1} + 6y_{t-2} = 42$.

解　☞ (a)　根据(18.11)，

$$y_p = \frac{42}{1+7+6} = 3$$

(b)　根据(18.4)，

$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(6)}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2} = -1, -6$$

根据(18.12)，

$$y_c = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t$$

(c)

$$y(t) = y_c + y_p = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t + 3 \qquad (18.43)$$

18.13　重新考虑问题 18.12，设 $y_t + 12y_{t-1} + 11y_{t-1} = 6$.

解　☞ (a) 根据(18.11)，

$$y_p = \frac{6}{1+12+11} = \frac{1}{4}$$

(b)

$$r_1, r_2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(11)}}{2} = \frac{-12 \pm 10}{2} = -1, -11$$

则

$$y_c = A_1(-1)^t + A_2(-11)^t$$

(c)

$$y(t) = A_1(-1)^t + A_2(-11)^t + \frac{1}{4} \qquad (18.44)$$

18.14　重新考虑问题 18.12，设 $y_{t+2} - 11y_{t+1} + 10y_t = 27$.

解　☞ (a)　把时间倒退 2 个单位，以便和(18.10)相一致；$y_t - 11y_{t-1} + 10y_{t-2} = 27$. 根据(18.11a)

$$y_p = \frac{27}{2-11}t = -3t$$

(b)
$$r_1, r_2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4(10)}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} = 1, 10$$
$$y_c = A_1 + A_2(10)^t$$

(c)
$$y(t) = A_1 + A_2(10)^t - 3t \tag{18.45}$$

18.15　重新考虑问题 18.7，设 $y_t + 7y_{t-1} - 8y_{t-1} = 45$.

解 ☞ (a)　根据(18.11a)
$$y_p = \frac{45}{2+7}t = 5t$$

(b)
$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-8)}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = 1, -8$$
$$y_c = A_1 + A_2(-8)^t$$

(c)
$$y(t) = A_1 + A_2(-8)^t + 5t \tag{18.46}$$

重的实根

18.16　重新考虑问题 18.12，设 $y_t - 10y_{t-1} + 25y_{t-2} = 8$.

解 ☞ (a)
$$y_p = \frac{8}{1 - 10 + 25} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(25)}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

利用(18.18)，因为 $r_1 = r_2 = 5$，$y_c = A_1(5)^t + A_2 t(5)^t$

(c)
$$y(t) = A_1(5)^t + A_2 t(5)^t + \frac{1}{2} \tag{18.47}$$

18.17　重新考虑问题 18.12，设 $y_t + 14y_{t-1} + 49y_{t-2} = 128$.

解 ☞ (a)
$$y_p = \frac{128}{1 + 14 + 49} = 2$$

(b)
$$r_1, r_2 = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4(49)}}{2} = \frac{-14 \pm 0}{2} = -7$$

利用(18.18)，因为 $y_c = A_1(-7)^t + A_2 t(-7)^t$

(c)
$$y(t) = A_1(-7)^t + A_2 t(-7)^t + 2 \tag{18.48}$$

定解和稳定条件

18.18　求(a) 定解，(b) 检验，(c) 讨论动力稳定性，设 $y_t + 7y_{t-1} + 6y_{t-2} = 42$，$y(0) = 16$，$y(1) = -35$.

解 ☞ (a)　根据 (18.43)，
$$y(t) = A_1(-1)^t + A_2(-6)^t + 3 \tag{18.49}$$

在(18.49)中，设 $t = 0$ 和 $t = 1$，利用初始条件
$$y(0) = A_1 + A_2 + 3 = 16 \qquad y(1) = -A_1 - 6A_2 + 3 = -35$$

解得 $A_1 = 8$ 和 $A_2 = 5$. 代入(18.49)
$$y(t) = 8(-1)^t + 5(-6)^t + 3 \tag{18.50}$$

(b)　把 $t = 0, t = 1$ 和 $t = 2$ 代入(18.50)，检验
$$y(0) = 8 + 5 + 3 = 16 \quad y(1) = -8 - 30 + 3 = -35 \quad y(2) = 8 + 180 + 3 = 191$$

代入原始方程
$$y(2) = y_t \quad y(1) = y_{t-1} \quad y(0) = y_{t-2} \quad 191 + 7(-35) + 6(16) = 42$$

(c)　特征根是 -1 和 -6. 具有最大绝对值的特征根被称作主特征根，因为它主导了时间轨线，若时间轨线是收敛的，则主特征根一定小于 1. 因 $|-6| > 1$，故时间轨线是发散的.

18.19　(a) 求定解；(b) 讨论动力稳定性. 设
$$y_{t+2} - 11y_{t+1} + 10y_t = 27 \qquad y(0) = 2 \qquad y(1) = 53$$

解 ☞ (a)　根据(18.45)，
$$y(t) = A_1 + A_2(10)^t - 3t \tag{18.51}$$

令 $t = 0, t = 1$，利用初始条件
$$y(0) = A_1 + A_2 = 2 \qquad y(1) = A_1 + 10A_2 - 3 = 53$$

解得 $A_1 = -4$ 和 $A_2 = 6$，代入(18.51)
$$y(t) = 6(10)^t - 3t - 4$$

(b) 由于特征根 10 是大于 1 的,所以时间是发散的.

18.20 重新考虑问题 18.19,设 $y_t - 10y_{t-1} + 25y_{t-2} = 8$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$.

解 ☞ (a) 根据(18.47),

$$y(t) = A_1(5)^t + A_2 t(5)^t + \frac{1}{2} \tag{18.52}$$

设 $t = 0$ 和 $t = 1$, 利用初始条件

$$y(0) = A_1 + \frac{1}{2} = 1 \qquad A_1 = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = 5A_1 + 5A_2 + \frac{1}{2} = 5$$

得 $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{2}{5}$, 代入(18.52),

$$y(t) = \frac{1}{2}(5)^t + \frac{2}{5}t(5)^t + \frac{1}{2} \tag{18.53}$$

(b) 由于在第二项 $A_2 t r^t$ 中, r^t 的影响主导了 t 的影响,所以在具有重根的例子中,其收敛性依赖于 $|r| < 1$,这里 $r = 5 > 1$,时间是发散的.

三角函数的求导

18.21 求以下三角函数的一阶导数.注意它们也可以称作圆函数或者正弦函数.

(a) $y = \sin 7x$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = 7\cos 7x$

(b) $y = \cos(5x + 2)$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = -5\sin(5x + 2)$

(c) $y = \tan 11x$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = 11\sec^2 11x$

(d) $y = \csc(8x + 3)$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = -8[\csc(8x+3)\cot(8x+3)]$

(e) $y = \sin(3 - x^2)$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = -2x\cos(3 - x^2)$

(f) $y = \sin(5 - x)^2$

解 ☞ $\frac{dy}{dx} = -2(5 - x)\cos(5 - x)^2$(链式法则)

18.22 重新考虑问题 18.21,设 $y = x^2\tan x$.

解 ☞ 利用乘法法则, $\frac{dy}{dx} = x^2(\sec^2 x) + (\tan x)(2x) = x^2\sec^2 x + 2x\tan x$.

18.23 重新考虑问题 18.21,设 $y = x^3\sin x$.

解 ☞ $$\frac{dy}{dx} = x^3(\cos x) + (\sin x)(3x^2) = x^3\cos x + 3x^2\sin x$$

18.24 重新考虑问题 18.21,设 $y = (1 + \cos x)^2$.

解 ☞ 利用链式法则, $\frac{dy}{dx} = 2(1 + \cos x)(-\sin x) = (-2\sin x)(1 + \cos x)$

18.25 重新考虑问题 18.21,设 $y = (\sin x + \cos x)^2$.

解 ☞ $$\frac{dy}{dx} = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

18.26 设 $y = \sin^2 5x$, 这里 $\sin^2 5x = (\sin 5x)^2$

解 ☞ 利用链式法则, $\frac{dy}{dx} = 2\sin 5x\cos 5x(5) = 10\sin 5x\cos 5x$

18.27 重新考虑问题 18.21,设 $y = \csc^2 12x$.

解 ☞ $$\frac{dy}{dx} = (2\csc 12x)[-\csc 12x\cot 12x(12)] = -24\csc^2 12x\cot 12x$$

二阶微分方程中的复根

18.28 求二阶微分方程的(a)特解,(b)余函数,(c)通解.方程为 $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 80$.

解 ☞ (a) 根据(18.2), $y_p = \frac{80}{10} = 8$

(b) 利用(18.19),因为 $b_1^2 < 4b_2$,也就是 $(2)^2 < 4(10)$

$$g = -\frac{1}{2}(2) = -1 \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt{4(10)-(2)^2} = 3$$

则 $r_1, r_2 = -1 \pm 3\mathrm{i}$. 把 g 和 h 代入(18.26)

$$y_c = \mathrm{e}^{-t}(B_1\cos 3t + B_2\sin 3t)$$

(c)
$$y(t) = y_c + y_p = \mathrm{e}^{-t}(B_1\cos 3t + B_2\sin 3t) + 8 \tag{18.54}$$

18.29 重新考虑问题 18.28, 设 $y''(t) - 6y'(t) + 25y(t) = 150$.

解 ☞ (a)
$$y_p = \frac{150}{25} = 6$$

(b) 根据(18.19), $g = -\frac{1}{2}(-6) = 3$, $h = \frac{1}{2}\sqrt{4(25)-(-6)^2} = 4$, 代入(18.26)

$$y_c = \mathrm{e}^{3t}(B_1\cos 4t + B_2\sin 4t)$$

(c)
$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}(B_1\cos 4t + B_2\sin 4t) + 6 \tag{18.55}$$

18.30 重新考虑问题 18.28, 设 $y'' + 4y' + 40y(t) = 10$.

解 ☞ (a)
$$y_p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

(b) 根据(18.19), $g = -2$, $h = \frac{1}{2}\sqrt{160-16} = 6$, 则 $y_c = \mathrm{e}^{-2t}(B_1\cos 6t + B_2\sin 6t)$.

(c)
$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(B_1\cos 6t + B_2\sin 6t) + \frac{1}{4} \tag{18.56}$$

18.31 求以下方程(a)定解, (b)讨论它的动态稳定性.

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 80 \qquad y(0) = 10 \qquad y'(0) = 13$$

解 ☞ (a) 根据(18.54),
$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}(B_1\cos 3t + B_2\sin 3t) + 8 \tag{18.57}$$

应用乘法法则,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{-t}(-3B_1\sin 3t + 3B_2\cos 3t) + (B_1\cos 3t + B_2\sin 3t)(-\mathrm{e}^{-t}) \\ &= \mathrm{e}^{-t}(3B_2\cos 3t - 3B_1\sin 3t) - \mathrm{e}^{-t}(B_1\cos 3t + B_2\sin 3t) \end{aligned} \tag{18.57a}$$

把 $t=0$ 代入(18.57), (18.57a), 满足初始条件

$$y(0) = \mathrm{e}^0(B_1\cos 0 + B_2\sin 0) + 8 = 10$$

根据表 18-1, $\cos 0 = 1$ 和 $\sin 0 = 0$. 则

$$y(0) = B_1 + 0 + 8 = 10 \qquad B_1 = 2$$

类似的, $y'(0) = \mathrm{e}^0(3B_2\cos 0 - 3B_1\sin 0) - \mathrm{e}^0(B_1\cos 0 + B_2\sin 0) = 13$,

$$y'(0) = 3B_2 - B_1 = 13$$

因为 $B_1 = 2$, 得 $B_2 = 5$. 最后代入(18.57),

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}(2\cos 3t + 5\sin 3t) + 8$$

(b) 由 $g = -1$, 时间轨线收敛, 见图 18-3(见例 15).

18.32 重新考虑问题 18.31, 设 $y''(t) - 6y'(t) + 25y(t) = 150$, $y(0) = 13$ 和 $y'(0) = 25$.

解 ☞ (a) 根据(18.55),
$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}(B_1\cos 4t + B_2\sin 4t) + 6 \tag{18.58}$$

则

$$y'(t) = \mathrm{e}^{3t}(-4B_1\sin 4t + 4B_2\cos 4t) + 3\mathrm{e}^{3t}(B_1\cos 4t + B_2\sin 4t) \tag{18.58a}$$

把 $t=0$ 代入(18.58), (18.58a), 满足初始条件

$$y(0) = \mathrm{e}^0(B_1\cos 0 + B_2\sin 0) + 6 = 13$$

$$y(0) = B_1 + 0 + 6 = 13 \qquad B_1 = 7$$

$y'(0) = \mathrm{e}^0(-4B_1\sin 0 + B_2\cos 0) + 3\mathrm{e}^0(B_1\cos 0 + B_2\sin 0)$.

$$y'(0) = 4B_2 + 3B_1 = 25 \qquad B_2 = 1$$

带入(18.58)得, $y(t) = \mathrm{e}^{3t}(7\cos 4t + \sin 4t) + 6$.

(b) 由于 $g = 3$, 时间发散.

18.33 重新考虑问题 18.31, 设 $y''(t) + 4y'(t) + 40y(t) = 10$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 2\frac{1}{2}$.

解 ☞ (a) 根据(18.56),
$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(B_1\cos 6t + B_2\sin 6t) + \frac{1}{4} \tag{18.59}$$

则

$$y'(t) = e^{-2t}(-6B_1\sin6t + 6B_2\cos6t) - 2e^{-2t}(B_1\cos6t + B_2\sin6t) \quad (18.59a)$$

把 $t=0$ 代入(18.59),(18.59a),满足初始条件

$$y(0) = B_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad B_1 = \frac{1}{4}$$

$$y'(0) = 6B_2 - 2B_1 = 2\frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{2}$$

则 $y(t) = e^{-2t}(\frac{1}{4}\cos6t + \frac{1}{2}\sin6t) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{-2t}(\cos6t + 2\sin6t) + \frac{1}{4}$.

(b) 由于 $g=-2$, 时间发散.

二阶差分方程中的复根

18.34 求以下二阶差分方程的(a)特解,(b)余函数,(c)通解,(d)定解,(e)讨论动力稳定性.

$$y_t + 4y_{t-2} = 15 \qquad y(0) = 12 \qquad y(1) = 11$$

解 ☞ (a) 根据(18.11), $y_p = \frac{15}{1+0+4} = 3$

(b) 根据(18.19), $g = -\frac{1}{2}(0) = 0$, $h = \frac{1}{2}\sqrt{4(4)-0} = 2$. 对于二阶差分方程我们需要 k 和 θ,应用勾股定理,见图 18-1,

$$k^2 = g^2 + h^2 \qquad k = \sqrt{g^2 + h^2}$$

用(18.19)的参数代入, 以获得一般性

$$k = \sqrt{\frac{b_1^2 + 4b_2 - b_1^2}{4}} = \sqrt{b_2} \quad (18.60)$$

则 $k = \sqrt{4} = 2$, 根据 18.5 节的定义,

$$\sin\theta = \frac{h}{k} \qquad \cos\theta = \frac{g}{k} \quad (18.61)$$

根据初始问题代入值,

$$\sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \qquad \cos\theta = \frac{0}{2} = 0$$

根据表 8-1, $\sin\theta = 1$ 和 $\cos\theta = 0$ 的角是 $\pi/2$. 那么 $\theta = \pi/2$, 代入(18.27),

$$y_c = 2^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

(c)

$$y(t) = 2^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 3 \quad (18.62)$$

(d) 利用表 18-1,根据初始条件, 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处计算(18.62)的值,

$$y(0) = (B_1 + 0) + 3 = 12 \qquad B_1 = 9$$

$$y(1) = 2(0 + B_2) + 3 = 11 \qquad B_2 = 4$$

则

$$y(t) = 2^t\left(9\cos\frac{\pi}{2}t + 4\sin\frac{\pi}{2}t\right) + 3$$

(e) 由于 $k=2$,时间轨线是发散的, 见例 15.

18.35 重新考虑问题 18.34, 设 $y_t + 2y_{t-2} = 24$, $y(0) = 11$, $y(1) = 18$.

解 ☞ (a) 根据(18.11), $y_p = \frac{24}{1+0+2} = 8$

(b) 根据(18.60), $k = \sqrt{b_2} = \sqrt{2}$, 由(18.19),

$$g = -\frac{1}{2}(0) = 0 \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt{4(2)-0} = \sqrt{2}$$

由(18.61), $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \cos\theta = 0$

根据表 18-1, $\theta = \pi/2$. 代入(18.27),

$$y_c = (\sqrt{2})^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

(c)

$$y(t) = (\sqrt{2})^t\left[B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B_2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] + 8 \quad (18.63)$$

(d) $$y(0)=B_1+8=11 \qquad B_1=3$$

$$y(1)=\sqrt{2}B_2+8=18 \qquad B_2=7.07$$

则 $$y(t)=(\sqrt{2})^t\left(3\cos\frac{\pi}{2}t+7.07\sin\frac{\pi}{2}t\right)+8$$

(e) 由于 $k=\sqrt{2}>1$，时间轨线发散．

经济上的应用

18.36 在许多市场中，供求是受目前的价格和价格的趋势影响的(也就是说，是否价格上涨或下跌和是否价格以一个增加或降低的比率上涨或下跌)．因此，经济学家需要知道目前的价格 $P(t)$ 和一阶导数 $dP(t)/dt$，二阶导数 $d^2P(t)/dt^2$．假定

$$Q_s=c_1+w_1P+u_1P'+v_1P'' \quad Q_d=c_2+w_2P+u_2P'+v_2P'' \tag{18.64}$$

若在每一个时间点上市场的价格可以清楚的知道，讨论市场的动态稳定性．

解 在均衡状态下，$Q_d=Q_s$，因此，

$$c_1+w_1P+u_1P'+v_1P''=c_2+w_2P+u_2P'+v_2P''$$

$$(v_1-v_2)P''+(u_1-u_2)P'+(w_1-w_2)P=-(c_1-c_2)$$

令 $v+v_1-v_2$，$u=U_1-u_2$，$w=w_1-w_2$，$c=c_1-c_2$．除以 v，以便和(18.1)相一致

$$P''+\frac{u}{v}P'+\frac{w}{v}=-\frac{c}{v} \tag{18.65}$$

利用(18.2)，求得特解，它是一个暂态均衡价格 $\overline{P}$

$$\overline{P}=P_p=\frac{-c/v}{w/v}=-\frac{c}{w}$$

因为在通常的供给条件下，$c_1<0$，$w_1>0$ 和在通常的需求条件下，$c_2\geqslant 0$，$w_2\leqslant 0$，$-c/w\geqslant 0$，这是平衡价格 $\overline{P}$ 所要求的．其中 $c=c_1-c_2$ 和 $w=w_1-w_2$．利用(18.4)，求余函数的特征根，

$$r_1,r_2=\frac{-u/v\pm\sqrt{(u/v)^2-4w/v}}{2} \tag{18.66}$$

根据 w，u 和 v 的不同，可以得出三种解的形式．

1.若 $(u/v)^2>4w/v$，r_1 和 r_2 是形如(18.66)不同的实根，$P(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}-c/w$．

2.若 $(u/v)^2=4w/v$，r_1 和 r_2 是重复实根．那么，(18.66)式简化为 $-(u/v)/2$ 或 $-u/2v$，根据(18.17)，$P(t)=A_1e^{-(u/2v)t}+A_2te^{-(u/2v)t}-c/w$．

3.若 $(u/v)^2<4w/v$，r_1 和 r_2 是复根，根据(18.26)，$P(t)=e^{gt}(B_1\cos ht+B_2\sin ht)-c/w$，根据(18.19)，$g=-u/(2v)$，$h=\frac{1}{2}\sqrt{4w/v-(u/v)^2}$．

w，u，v 的确定依赖于不同的期望值．若人们受通货膨胀心理的干扰，希望价格上涨，(18.64)中的 u_2 将是正的．若他们希望价格最终下降，按照期望抑制购买，那么 u_2 将是负的，等等．

18.37 同 Samuelson 在增值和加速之间相互作用的模型相似，假定

$$Y_t=C_t+I_t+G_t \tag{18.67}$$

$$C_t=C_0+cY_{t-1} \tag{18.68}$$

$$I_t=I_0+w(C_t-C_{t-1}) \tag{18.69}$$

这里 $0<c<1$，$w>0$ 和 $G_t=G_0$．(a)求解国民收入的时间轨线 $Y(t)$．(b)讨论动态稳定性条件．

解 (a) 把(18.68)代入(18.69)，

$$I_t=I_0+cw(Y_{t-1}-Y_{t-2}) \tag{18.70}$$

把 $G_t=G_0$，(18.70)和(18.68)代入(18.67)，变换方程以便和(18.10)相一致

$$Y_t=C_0+cY_{t-1}+I_0+cw(Y_{t-1}-Y_{t-2})+G_0$$

$$Y_t-c(1+w)Y_{t-1}+cwY_{t-2}=C_0+I_0+G_0 \tag{18.71}$$

利用(18.11)求特解

$$Y_p=\frac{C_0+I_0+G_0}{1-c(1+w)+cw}=\frac{C_0+I_0+G_0}{1-c}$$

这是收入 $\overline{Y}$ 的暂时平衡水平，利用(18.4)求余函数的特征根

$$r_1, r_2 = \frac{c(1+w) \pm \sqrt{[-c(1+w)]^2 - 4cw}}{2} \tag{18.72}$$

所求解的三种形式取决于 c 和 w 的值：

1. 若 $c^2(1+w)^2 \geqslant 4cw$，若 $c(1+w)^2 \geqslant 4w$，r_1 和 r_2 将是形如(18.72)的不同的实数根，且

$$Y(t) = A_1 r_1^t + A_2 r_2^t + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

2. 若 $c(1+w)^2 = 4w$，r_1 和 r_2 将是相同的实数根，根据(18.72)，(18.18)，

$$Y(t) = A_1\left[\frac{1}{2}c(1+w)\right]^t + A_2 t\left[\frac{1}{2}c(1+w)\right]^t + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

3. 若 $c(1+w)^2 < 4w$，r_1 和 r_2 将是复根，根据(18.27)，

$$Y(t) = k^t(B_1\cos t\theta + B_2\sin t\theta) + \frac{C_0 + I_0 + G_0}{1-c}$$

根据(18.60)，$k = \sqrt{cw}$；根据(18.61)，θ 一定满足

$$\sin\theta = \frac{h}{k} \qquad \cos\theta = \frac{g}{k}$$

根据(18.19)，$g = \frac{1}{2}c(1+w)$，$h = \frac{1}{2}\sqrt{4cw - c^2(1+w)^2}$.

(b)　为了使模型在任何的初始条件下都是稳定的，充分和必要条件是(1) $c<1$ 和(2) $cw<1$. 因为，关于前一年的收入 $c=\text{MPC}$，c 一定小于1，对于 $cw<1$，MPC 的产出和边际资本-产出的比例也一定小于 1. 若特征根是共扼复数，时间将是振荡的.

第十九章　联立微分及差分方程

19.1　联立微分方程的矩阵解(1)

设有一个由 n 个一阶自控线性微分方程所组成的方程组，其中任何一个导数都不是其他导数的函数. 并且为了便于简化记号，这里我们限定 $n=2$.

自控简单地意指所有的 a_{ij}和 b_i 都是常数.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1 \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_2 + a_{22}y_2 + b_2\end{aligned} \tag{19.1}$$

用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1 \\ \dot{y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1 \\ b_2\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{B}$$

该系统的全部解包括 n 个方程. 每一个方程依次由(1)一个余解 y_c 和(2)一个特解 y_p 组成.

1. (a) 由前面的单一微分方程的工作，我们希望具有不同实根的方程组的余解有下列形式，

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{C}_i e^{r_i t} = k_1 C_1 e^{r_1 t} + k_2 C_2 e^{r_2 t} \tag{19.2}$$

其中 k_i 是一个标量或常数，$\boldsymbol{C}_i=(2\times 1)$是由常数组成的列向量，称为特征向量，$r_i$ 是一个标量，称为特征根. 参见 12.8 节.

(b) 正如在问题 19.13 中所证明的，特征根也称为特征值，他们可以通过解二次式

$$r_i = \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})]^2 - 4|\boldsymbol{A}|}}{2} \tag{19.3}$$

得到，其中$|\boldsymbol{A}|$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 迹. $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$等于 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上的元素之和. 这里，设 $\boldsymbol{A}=(2\times 2)$，

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22}$$

(c) 正如在问题 19.12 中所阐明的，要求联立方程组的解，需要求解

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = 0 \tag{19.4}$$

其中

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} - r_i\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} - r_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_i\end{bmatrix}$$

r_i 是一个标量，$\boldsymbol{I}$ 是单位阵，这里为 $\boldsymbol{I}_2$. 方程(19.4)称为特征值问题. 特征向量可通过解(19.4)中的 $\boldsymbol{C}_i$ 得到. 为避免只有零解，限定矩阵$(\boldsymbol{A}-r_i\boldsymbol{I})$为奇异阵.

2. 特解 y_p 是稳定状态的解. 正如在问题 19.14 中所证明的，

$$y_p = \bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{19.5}$$

其中，$\boldsymbol{A}^{-1}$是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是由常数组成的列向量.

模型的稳定性由特征根决定.

如果所有的 $r_i<0$，模型是动态稳定的.

如果所有的 $r_i>0$，模型是动态非稳定的.

如果 r_i 取不同符号，解处于鞍点平衡，而且除非沿鞍式路径，否则模型不稳定. 参见第 19.5 节和例题 10 及 12.

例 1　求解下列一阶自控线性微分方程组,

$$\dot{y}_1 = 5y_1 \quad 0.5y_2 - 12 \quad y_1(0) = 12$$
$$\dot{y}_2 = -2y_1 + 5y_2 - 24 \quad y_2(0) = 4$$

1. 为了便于计算,将上述方程组转化为矩阵形式.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -0.5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{B}$$

2. 然后求余函数.假设有不同的实根,由(19.2),有

$$y_c = k_1\boldsymbol{C}_1 e^{r_1 t} + k_2\boldsymbol{C}_2 e^{r_2 t}$$

再由(19.3),得特征根为

$$r_1 r_2 = \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})]^2 - 4|\boldsymbol{A}|}}{2}$$

其中,

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} = 5 + 5 = 10$$
$$|\boldsymbol{A}| = 25 - 1 = 24$$

代入,

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(24)}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2}$$

$r_1 = 4$　　$r_2 = 6$　是特征根或特征值.

3. 下面我们求解特征向量.因为$(\boldsymbol{A}\text{-}r_i\boldsymbol{I})$为奇异阵,由(19.4)得,

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = 0$$

其中

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} a_{11} - r_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

(a) 首先,将 $r_1 = 4$ 代入,得

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -0.5 \\ -2 & 5-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

然后通过简单的行与列相乘得到,

$$c_1 - 0.5c_2 = 0 \quad c_1 = 0.5c_2$$
$$-2c_1 + c_2 = 0 \quad c_1 = 0.5c_2$$

因为$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})$被限定为奇异阵,所以方程之间是线性相关的.选择任意一个方程即可.由于线性相关性,将有无穷多个特征向量满足方程.我们可通过选择一个长度为单位的向量使方程标准化,即,$c_1^2 + c_2^2 = 1$,该式被称为欧几里得距离条件.我们也可简单地为一个量选取一个任意值,然后通过方程解出其他量.选择后者,设 $c_1 = 1$.

如果 $c_1 = 1$,则 $c_2 = 1/0.5 = 2$.

因此,对应于 $r_1 = 4$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

通解中的余函数的第一部分是

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{4t} = \begin{bmatrix} k_1 e^{4t} \\ 2k_1 e^{4t} \end{bmatrix}$$

(b) 其次,将 $r_2 = 6$ 代入得,

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -0.5 \\ -2 & 5-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

行与列相乘得,

$$\begin{aligned} -c_1 - 0.5c_2 &= 0 \qquad c_1 = \ \ 0.5c_2 \\ -2c_1 - c_2 &= 0 \qquad c_1 = -0.5c_2 \end{aligned}$$

如果 $c_1 = 1$, 则 $c_2 = \dfrac{1}{-0.5} = -2$.

因此, 对应于 $r_2 = 6$ 的特征向量 $\boldsymbol{C}_2$ 为

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

通解中的余函数的第二部分是

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}e^{6t} = \begin{bmatrix} k_2e^{6t} \\ -2k_2e^{6t} \end{bmatrix}$$

将两部分合并得方程组的补解,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1e^{4t} + k_2e^{6t} \\ y_2(t) &= 2k_1e^{4t} - 2k_2e^{6t} \end{aligned}$$

4. 我们现在求稳定状态解 y_p. 由(19.5)知

$$y_p = \bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -12 \\ -24 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -0.5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad |\boldsymbol{A}| = 25 - 1 = 24,$$

余因子阵为 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0.5 & 5 \end{bmatrix}$, 伴随阵为 $\text{Adj}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$,

因此, 逆矩阵是

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

代入(19.5)得

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

行与列相乘得

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 72 \\ 144 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

于是通解 $y(t) = y_c + y_p$ 是

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1e^{4t} + k_2e^{6t} + 3 \\ y_2(t) &= 2k_1e^{4t} - 2k_2e^{6t} + 6 \end{aligned} \tag{19.6}$$

由于 $r_1 = 4 > 0$ 且 $r_2 = 6 > 0$, 均衡不稳定. 参见问题 19.1～19.3.

例 2　为了求例 1 的定解, 我们简单地利用初始条件: $y_1(0) = 12$, $y_2(0) = 4$. 将 $t = 0$ 代入(19.6)得

$$\begin{aligned} y_1(0) &= k_1 + k_2 + 3 = 12 \\ y_2(0) &= 2k_2 - 2k_2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

联立求解得

$$k_1 = 4, k_2 = 5$$

将其代入(19.6), 得定解

$$y_1(t) = 4e^{4t} + 5e^{6t} + 3$$
$$y_2(t) = 8e^{4t} - 10e^{6t} + 6$$

由于都是正根,此特解仍然是动态不稳定的.

19.2 联立微分方程的矩阵解(Ⅱ)

设有一个由 n 个一阶自控线性微分方程所组成的方程组,其中一个或多个导数是其他导数的函数.并且为了便于简化记号,这里我们限定 $n=2$.

$$a_{11}\dot{y}_1 + a_{12}\dot{y}_2 = a_{13}y_1 + a_{14}y_2 + b_1$$
$$a_{21}\dot{y}_1 + a_{22}\dot{y}_2 = a_{23}y_1 + a_{24}y_2 + b_2 \tag{19.7}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_1\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{B}$$

通解由一个余函数 y_c 和一个特解 y_p 组成.如同前面的例子,对于不同的实根,我们假设余函数具有一般形式

$$y_c = k_1\boldsymbol{C}_1e^{r_1t} + k_2\boldsymbol{C}_2e^{r_2t} \tag{19.8}$$

如在问题 19.15 和 19.16 中所阐明的,这里的特征值问题为

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{C}_i = 0 \tag{19.9}$$

其中

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1) = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} - r_i\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} - a_{11}r_i & a_{14} - a_{12}r_i \\ a_{23} - a_{21}r_i & a_{24} - a_{22}r_i \end{bmatrix}$$

特征方程是

$$|\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1| = 0 \tag{19.10}$$

特解是

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{B} \tag{19.11}$$

稳定条件与 9.1 节中相同.

例 3 求解下列一阶自控非线性微分方程组.

$$\dot{y}_1 = -3y_1 + 1.5y_2 - 2.5\dot{y}_2 + 2.4 \qquad y_1(0) = 14$$
$$\dot{y}_2 = 2y_1 - 5y_2 + 16 \qquad y_2(0) = 15.4$$

1. 首先将方程写成(19.7)的形式,然后用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1.5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2. 假设具有不同的实根,求余函数.

$$y_c = k_1\boldsymbol{C}_1e^{r_1t} + k_2\boldsymbol{C}_2e^{r_2t}$$

(a) 从特征方程开始,求特征根.由(19.10)

$$|\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1| = 0$$

(b) 代入并且为了简化省略下标 i,

$$|\boldsymbol{A}_2 - r\boldsymbol{A}_1| = \left|\begin{bmatrix} -3 & 1.5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -3-r & 1.5-2.5r \\ 2 & -5-r \end{vmatrix} = 0$$
$$(-3-r)(-5-r) - 2(1.5-2.5r) = 0$$
$$r^2 + 13r + 12 = 0$$

得特征根 $r_1 = -1 \quad r_2 = -12$

3. 求特征向量 $\boldsymbol{C}_i$.由(19.9),

$$(A_2 - r_i A_1)C_i = 0$$

其中

$$(A_2 - r_i A_1)C_i = \begin{bmatrix} -3-r_1 & 1.5-2.5r_i \\ 2 & -5-r_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

(a) 首先，将 $r_1 = -1$ 代入，

$$\begin{bmatrix} -3-(-1) & 1.5-2.5(-1) \\ 2 & -5-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

通过简单的矩阵相乘得，

$$-2c_1 + 4c_2 = 0 \qquad c_1 = 2c_2$$
$$2c_1 - 4c_2 = 0 \qquad c_1 = 2c_2$$

如果设 $c_1 = 2, c_2 = 1$，有

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对应于 $r_1 = -1$ 的余函数的第一部分是

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} = \begin{bmatrix} 2k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}e^{-t}$$

(b) 现在将 $r_2 = -12$ 代入得，

$$\begin{bmatrix} -3-(-12) & 1.5-2.5(-12) \\ 2 & -5-(-12) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 31.5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

行与列相乘

$$9c_1 + 31.5c_2 = 0 \qquad c_1 = -3.5c_2$$
$$2c_1 + 7c_2 = 0 \qquad c_1 = -3.5c_2$$

设 $c_1 = -3.5, \quad c_2 = 1$，有

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对应于 $r_2 = -12$ 的余函数的第二部分是

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix} -3.5 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-12t} = \begin{bmatrix} -3.5k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}e^{-12t}$$

将两部分相加得余函数

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2k_1e^{-t} - 3.5k_2e^{-12t} \\ y_2(t) &= k_1e^{-t} + k_2e^{-12t} \end{aligned} \tag{19.12}$$

4. 求特解 y_p，它不过是暂态的均衡解 $\bar{Y}$. 由(19.11)，

$$\bar{Y} = -A_2^{-1}B$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1.5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \ |A_2| = 15 - 3 = 12$$

余因子阵为 $C = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -1.5 & -3 \end{bmatrix}$，伴随阵为 $\text{Adj}.A = C' = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

因此，逆矩阵是

$$A_2^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

代入(19.11)得

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.4 \end{bmatrix}$$

5. 将特解或稳定状态解加到(19.12)中的余函数上，得通解

$$y_1(t) = 2k_1 e^{-t} - 3.5k_2 e^{-12t} + 3$$

$$y_2(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-12t} + 4.4 \tag{19.13}$$

由于 $r_1 = -1 < 0, r_2 = -12 < 0$，方程组动态稳定. 也可参见问题 19.4～19.6.

例 4　为了求例 3 的定解，我们简单地给定初始条件：$y_1(0) = 14, y_2(0) = 15.4$. 将 $t = 0$ 代入(19.13)得

$$y_1(0) = 2k_1 - 3.5k_2 + 3 = 14$$

$$y_2(0) = k_1 + k_2 + 4.4 = 15.4$$

联立求解得

$$k_1 = 9, k_2 = 2$$

将其代入(19.13)，得定解

$$y_1(t) = 18e^{-t} - 7e^{-12t} + 3$$

$$y_2(t) = 9e^{-t} + 2e^{-12t} + 4.4$$

19.3 联立差分方程的矩阵解(Ⅰ)

设有一个由 n 个一阶线性差分方程所组成的方程组，其中任何一个差分都不是其他差分的函数，并且所有系数都是常数. 为了便于简化记号，这里我们仍限定 $n = 2$.

$$x_t = a_{11}x_{t-1} + a_{12}y_{t-1} + b_1$$

$$y_t = a_{21}x_{t-1} + a_{22}y_{t-1} + b_2$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

设 $\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y}_{t-1} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ = 系数矩阵，则

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{B} \tag{19.14}$$

全解包括 n 个方程，每一个方程依次由余解 y_c 和特解 y_p 组成. 基于前面有关单个差分方程的工作并且假设不同的实根，我们假设余函数具有一般形式

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{C}_i r_i^t = k_1 \boldsymbol{C}_1 r_1^t + k_2 \boldsymbol{C}_2 r_2^t \tag{19.15}$$

如在问题 19.17 中所阐明的，特征值问题转化为

$$(\boldsymbol{A} - r_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = 0 \tag{19.16}$$

通过使用与问题 19.13 和 19.14 解中的类似的步骤得特征方程

$$|\boldsymbol{A} - r_i \boldsymbol{I}| = 0$$

其中特征根可由(19.3)求得，且特解得

$$y_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{19.17}$$

稳定条件要求每一个 n 个根中的绝对值都小于 1. 如果即使有一个根的绝对值大于 1，他将会控制其他的根而且时间轨迹将发散.

例 5　求解下列一阶线性差分方程组，

$$\begin{aligned} x_t &= -4x_{t-1} + y_{t-1} + 12 \qquad x_0 = 16 \\ y_t &= 2x_{t-1} - 3y_{t-1} + 6 \qquad y_0 = 8 \end{aligned} \tag{19.18}$$

1. 将方程写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{B}$$

2. 下面求余函数.假设具有不同的实根,

$$y_c = k_1 \boldsymbol{C}_1 r_1^t + k_2 \boldsymbol{C}_2 r_2^t$$

而且特征根为

$$r_1, r_2 = \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})]^2 - 4 \mid \boldsymbol{A} \mid}}{2}$$

其中

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = -4 - 3 = -7 \quad 且 \quad \mid \boldsymbol{A} \mid = 12 - 2 = 10$$

代入后得

$$r_1, r_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(10)}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$r_1 = -2$, $r_2 = -5$ 为特征根或特征值.

3. 求特征向量.由(19.16)且注意到$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})$是奇异的,

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} a_{11} - r_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

(a) 首先,将 $r_1 = -2$ 代入,

$$\begin{bmatrix} -4-(-2) & 1 \\ 2 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

然后通过行与列相乘得,

$$-2c_1 + c_2 = 0 \qquad c_2 = 2c_1$$
$$2c_1 - c_2 = 0 \qquad c_2 = 2c_1$$

设 $c_1 = 1$,则 $c_2 = 2$.

对应于 $r_1 = -2$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

而且余函数中的元素 a_{i1}是

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (-2)^t = \begin{bmatrix} k_1(-2)^t \\ 2k_1(-2)^t \end{bmatrix}$$

(b) 将 $r_2 = -5$ 代入得

$$\begin{bmatrix} -4-(-5) & 1 \\ 2 & -3-(-5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

行与列相乘得

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad c_2 = -c_1$$
$$2c_1 + 2c_2 = 0 \qquad c_2 = -c_1$$

如果 $c_1 = 1$,则 $c_2 = -1$.

对应于 $r_2 = -5$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

而且余函数中的元素 a_{i1}是

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-5)^t = \begin{bmatrix} k_2(-5)^t \\ -k_2(-5)^t \end{bmatrix}$$

将两部分相加得余函数

$$x_c = k_1(-2)^t + k_2(-5)^t$$
$$y_c = 2k_1(-2)^t - k_2(-5)^t$$

4. 现在求稳定状态解 $\bar{x}, \bar{y}$ 的特解. 由(19.17)得,

$$y_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

仿照例 3 中一些类似的步骤得

$$y_p = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

从而有全解

$$x_t = k_1(-2)^t + k_2(-5)^t + 3$$
$$y_t = 2k_1(-2)^t - k_2(-5)^t + 3$$

由于$|-2|>1$且$|-5|>1$,时间轨迹发散. 也可参见问题 19.7 和 19.8.

例 6 为了求定解,我们只需给定初始条件. 设在 $t=0$ 时 $x_0=16, y_0=8$, 于是通解化为

$$k_1 + k_2 + 3 = 16$$
$$2k_1 - k_2 + 3 = 8$$

联立求解得

$$k_1 = 6, k_2 = 27$$

简单地代入得特解,

$$x_t = 6(-2)^t + 7(-5)^t + 3$$
$$y_t = 12(-2)^t - 7(-5)^t + 3 \tag{19.19}$$

为验证答案的正确性, 将 $t=1$ 和 $t=0$ 代入(19.19)得

$$x_1 = 6(-2)^1 + 7(-5)^1 + 3 = -44 \qquad x_0 = 6(-2)^0 + 7(-5)^0 + 3 = 16$$
$$y_1 = 12(-2)^1 - 7(-5)^1 + 3 = 14 \qquad y_0 = 12(-2)^0 - 7(-5)^0 + 3 = 8$$

然后回到(19.18)并且用 x_1, y_1 代替 x_t, y_t, 用 x_0, y_0 代替 x_{t-1}, y_{t-1}有

$$-44 = -4(16) + 8 + 12 = -44$$
$$14 = 2(16) - 3(8) + 6 = 14$$

19.4 联立差分方程的矩阵解(Ⅱ)

设有一个由 n 个一阶线性差分方程所组成的方程组, 其中一个或多个差分是其他差分的函数. 并且所有系数都是常数. 为了便于简化记号, 这里我们仍限定 $n=2$.

$$a_{11}x_t + a_{12}y_t = a_{13}x_{t-1} + a_{14}y_{t-1} + b_1$$
$$a_{21}x_t + a_{22}y_t = a_{23}x_{t-1} + a_{24}y_{t-1} + b_2 \tag{19.20}$$

或

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{B}$$

从前面的章节我们可认为通解 y_t 由余函数 y_c 和特解 y_p 组成. 其中对于不同实根的余函数具有一般形式

$$y_c = k_1\mathbf{C}_1(r_1)^t + k_2\mathbf{C}_2(r_2)^t$$

如在问题 19.18 和 19.19 中所阐明的, 这里的特征值问题化为

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{C}_i = 0 \tag{19.21}$$

其中

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1) = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} - r_i\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} - a_{11}r_i & a_{14} - a_{12}r_i \\ a_{23} - a_{21}r_i & a_{24} - a_{22}r_i \end{bmatrix}$$

且特解是

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B} \tag{19.22}$$

稳定条件与19.3节中的条件相同.

例7　求解下列一阶线性差分方程组.

$$\begin{aligned} x_t &= 4x_{t-1} - 2y_{t-1} + y_t - 10 \qquad x_0 = 20 \\ y_t &= 3x_{t-1} + 6y_{t-1} - 4 \qquad y_0 = 3 \end{aligned} \tag{9.23}$$

1. 将方程写成(19.20)的形式,然后用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2. 为了求余函数,首先,从(19.21)导出的特征方程

$$|\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1| = 0$$

然后将问题的参数代入,

$$|\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1| = \begin{vmatrix} 4-r & -2+r \\ 3 & 6-r \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-r)(6-r) - 3(-2+r) = 0$$

$$r^2 - 13r + 30 = 0$$

$$r_1 = 3 \qquad r_2 = 10$$

3. 求特征向量 c_i 的非平凡解.由(19.21)得,

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{C}_i = 0$$

其中

$$(\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} 4-r & -2+r \\ 3 & 6-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

(a) 将 $r_1 = 3$ 代入,

$$\begin{bmatrix} 4-3 & -2+3 \\ 3 & 6-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

行与列相乘得,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \qquad c_1 = -c_2 \\ 3c_1 + 3c_2 &= 0 \qquad c_1 = -c_2 \end{aligned}$$

如果 $c_1 = 1$,则 $c_2 = -1$,特征向量是

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对应于 $r_1 = 3$ 的余函数中的元素 a_{i1} 是

$$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(3)^t = \begin{bmatrix} k_1(3)^t \\ -k_1(3)^t \end{bmatrix}$$

(b) 将 $r_2 = 10$ 代入得,

$$\begin{bmatrix} 4-10 & -2+10 \\ 3 & 6-10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

通过矩阵相乘得

$$-6c_1+8c_2=0 \qquad c_2=0.75c_1$$
$$3c_1-4c_2=0 \qquad c_2=0.75c_1$$

设 $c_1=1$，则 $c_2=0.75$，对应的特征向量是

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}1\\0.75\end{bmatrix}$$

而且对应于 $r_2=10$ 余函数中的元素 a_{i1}是

$$k_2\begin{bmatrix}1\\0.75\end{bmatrix}(10)^t=\begin{bmatrix}k_2(10)^t\\0.75k_2(10)^t\end{bmatrix}$$

将两部分相加得完全余函数

$$\begin{aligned}x_c&=k_1(3)^t+k_2(10)^t\\y_c&=-k_1(3)^t+0.75k_2(10)^t\end{aligned}\tag{19.24}$$

4. 现在求特解或稳定状态解 $y_p=\bar{\boldsymbol{Y}}$. 由(19.22)，

$$\bar{\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\-3&-5\end{bmatrix}$$

得

$$\bar{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&-1\\3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

5. 因此通解 $y_0=y+y_p$ 为

$$\begin{aligned}x_t&=k_1(3)^t+k_2(10)^t+3\\y_t&=-k_1(3)^t+0.75k_2(10)^t-1\end{aligned}\tag{19.25}$$

由于 $r_1=3, r_2=10>|1|$，方程组动态不稳定. 也可参见问题 19.9 和 19.10.

例 8　通过给定初始条件可求出定解. 设在 $t=0$ 时 $x_0=20, y_0=3$，于是(19.24)化为

$$k_1+k_2+3=20$$
$$-k_1+0.75k_2-1=3$$

联立求解得

$$k_1=5, k_2=12$$

代入(19.25)得特解

$$\begin{aligned}x_t&=5(3)^t+12(10)^t+3\\y_t&=-5(3)^t+9(10)^t-1\end{aligned}\tag{19.26}$$

为验证答案的正确性，将 $t=1$ 和 $t=0$ 代入(19.26)得

$$x_1=5(3)+12(10)+3=138 \qquad x_0=5+12+3=20$$
$$y_1=-5(3)+9(10)-1=74 \qquad y_0=-5+9-1=3$$

然后在(19.23)中用 x_1, y_1 代替 x_t, y_t 用 x_0, y_0 代替 x_{t-1}, y_{t-1} 有

$$138=4(20)-2(3)+74-10=138$$
$$74=3(20)+6(3)-4=74$$

19.5　联立微分方程的稳定性及相图

给定线性自控微分方程组，暂态均衡水平将是渐进稳定的，即当 $t\to\infty$ 时，$y(t)$将趋于 $\bar{y}$ 的充分必要条件是所有的特征根都为负数. 对于复根的情况，实部必须是负数. 如果所有的根都是正数，系统将是不稳定的. 在鞍点均衡时，根具有不同的符号. 则鞍点平衡一般是不稳定的. 然而，如果 y_1 和 y_2 的初始条件满足条件

$$y_2=\left(\frac{r_1-a_{11}}{a_{12}}\right)(y_1-\bar{y}_1)+\bar{y}_2$$

其中 r_1 = 负根，我们得到所谓的鞍式路径，且 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 将收敛于它们的暂态均衡水平（参见例 10），

对于由两个线性或非线性微分方程组成的方程组而言，将纵轴表示 y_2，横轴表示 y_1 得相图．y_1, y_2 平面称为相平面．一个相图的构造可用例子来简单地解释．

例 9　给定线性自控微分方程组

$$\dot{y}_1=-4y_1+16$$
$$\dot{y}_2=-5y_2+15$$

下面的相图用于检验模型的稳定性．由于在这个简单的模型中，两个变量中的任何一个都不是另一个的函数，方程的图像可分别画出．

1．求暂态均衡水平 $\bar{y}_1$，即 $\dot{y}_1=0$ 的轨迹．

$$\dot{y}_1=-4y_1+16=0 \qquad \bar{y}_1=4$$

$\bar{y}_1=4$ 的图像是竖直直线，称之为 y_1 等倾线．y_1 等倾线将相平面分为两个区域，称为等扇区．一个扇区在 y_1 等倾线的左边，另一个在其右边．

2．求稳定平衡标准 $\bar{y}_2$，即 $\dot{y}_2=0$ 的轨迹．

$$\dot{y}_2=-5y_2+15=0 \qquad \bar{y}_2=3$$

$\bar{y}_2=3$ 的图像是水平直线，称之为 y_2 等倾线．y_1 等倾线将相平面分为两个等扇区，一个扇区在 y_2 等倾线的之上，另一个在其之下．参见图 19-1．

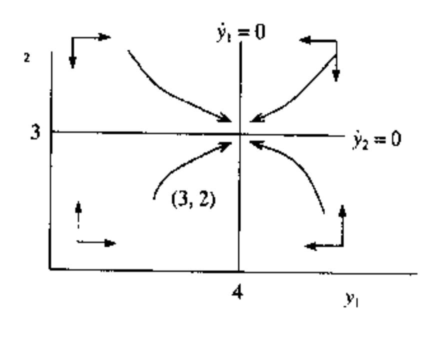


图 19-1

等倾线的相交勘定暂态均衡水平，

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2)=(4,3)$$

3．用水平移动的箭头确定 y_1 等倾线周围的运动．

(a) 在 y_1 等倾线的左边，$y_1<4$．　(b) 在 y_1 等倾线的右边，$y_1>4$．

将这些值依次代入 $y_1=-4y_1+16$，可得

如果 $y_1<4$，则 $\dot{y}_1>0$，出现向右运动；　如果 $y_1>4$，则 $\dot{y}_1<0$，出现向左运动．

4．用竖直移动的箭头确定 y_2 等倾线周期的运动．

(a) 在 y_2 等倾线的上方，$y_2>3$．　(b) 在 y_1 等倾线的下方，$y_2<3$．

将这些值依次代入 $y_2=-5y_2+15$，可得

如果 $y_2>3$，则 $\dot{y}_2<0$，出现向下运动；　如果 $y_2<3$，则 $\dot{y}_2>0$，出现向上运动．

图 19-1 中表示最终运动方向的箭头都指向稳定平衡，说明方程组收敛．然而，由于箭头自身可能失误，轨线会被画出，如图 19-2 所示．从任意一点开始，例如西南象限中的(3,2)，或任何象限中的任意点，我们可看到模型的动态将导致稳定状态解(4,3)．因此，时间轨迹收敛到稳定状态解，使该解稳定．

因为方程是线性的，答案可以通过第 16 或 19 章中的方法检验．解得

$$y_1(t)=k_1e^{-4t}+4$$

$$y_2(t) = k_2 e^{-5t} + 3$$

由于两个特征根都是负数，系统必定稳定.

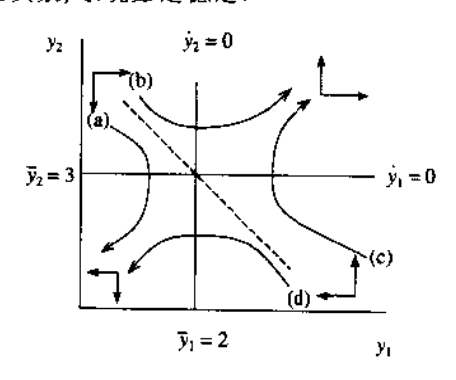


图 19-2

例 10　在图 19-2 中作出了一个相图，并用于下面对方程组的一个鞍点的动态稳定性的检验.

$$\dot{y}_1 = 2y_2 - 6$$
$$\dot{y}_2 = 8y_1 - 16$$

1. 求满足 $\dot{y}_1=0$ 的 y_1 等倾线.

$$\dot{y}_1 = 2y_2 - 6 = 0 \quad \bar{y}_2 = 3$$

这里 y_1 等倾线是过 y_2 轴上的点 $\bar{y}_2=3$ 的水平直线.

2. 求满足 $\dot{y}_2=0$ 的 y_2 等倾线.

$$\dot{y}_2 = 8y_1 - 16 \quad \bar{y}_1 = 2$$

这里 y_2 等倾线是过 y_1 轴上的点 $\bar{y}_1=2$ 的竖直直线. 参见图 19-2.

3. 用水平移动的箭头确定 y_1 等倾线周围的运动.

(a) 在 y_1 等倾线的上方，$y_2>3$.　　(b) 在 y_1 等倾线的下方，$y_2<3$.

将这些值依次代入 $y_1=-2y_2-6$，可得

如果 $y_2>3$，则 $\dot{y}_1>0$，运动箭头指向右；　　如果 $y_2<3$，则 $\dot{y}_1<0$，运动箭头指向左.

4. 用竖直移动的箭头确定 y_2 等倾线周围的运动.

(a) 在 y_2 等倾线的左边，$y_1<2$.　　(b) 在 y_2 等倾线的右边，$y_1>2$.

将这些值依次代入 $y_2=-8y_1-16$，可得

如果 $y_1<2$，则 $\dot{y}_2<0$，出现向下运动；　　如果 $y_1>2$，则 $\dot{y}_2>0$，出现向上运动.

不管图 19-2 中的表面现象，即使在西北和东南象限系统是不稳定的. 正如例 11 中所解释的，我们可通过简单地画出轨迹来证实，无论从 a，b，c 或 d 哪一点开始时间轨迹都发散.

例 11　图 19-2 中模型的不稳定性可通过从任何象限画轨迹变得显而易见. 我们画两个轨迹，一个从 a 开始，另一个从 b 开始，另外两个留给你们作为练习. 在每一种情况下，可用 4 步将轨线很好地画出.

1. 从 a 出发.
   (a) 轨线沿东南方向移动.
   (b) 但当时间轨线接近满足 $\dot{y}_1=0$ 的 y_1 等倾线时，y_1 向东方向的运动变慢，而 y_2 向南方向的运动仍不减弱.
   (c) 在 y_1 等倾线上，$\dot{y}_1=0$. 因此，轨线一定垂直穿过 y_1 等倾线.
   (d) 在 y_1 等倾线的下方，运动箭头指向西南方向，使时间轨迹远离平衡，从而显示出不稳定平衡.
2. 从 b 出发.

(a) 轨线再次沿东南方向移动.

(b) 但当时间轨线接近满足 $\dot{y}_2=0$ 时 y_2 等倾线时, y_2 向南方向的运动减弱, 而 y_1 向东方向的运动仍不变.

(c) 因为在 y_2 等倾线上, $\dot{y}_2=0$. 因此, 时间轨迹线一定水平穿过 y_2 等倾线.

(d) 在 y_2 等倾线的右方, 运动箭头指向东北方向, 使时间轨迹远离平衡. 从而显示出不稳定平衡.

例 12　图中 19-2 的虚线是鞍式路径, 只有当初始条件落在鞍式路径上时稳定状态平衡将是稳定的. 鞍式路径的方程是

$$y_2=\left(\frac{r_1-a_{11}}{a_{12}}\right)(y_1-\bar{y}_1)+\bar{y}_2$$

这里除负根 r_1 之外的所有项都是已知的. 由最初的方程知

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 8 & 0\end{vmatrix}=-16$$

任何情况 $|A|<0$, 我们得到一个鞍点平衡. 代入(19.3),

$$r_i=\frac{\mathrm{Tr}(A)\pm\sqrt{[\mathrm{Tr}(A)]^2-4|A|}}{2}$$

$$r_1,r_2=\frac{0\pm\sqrt{0-4(-16)}}{2}=-4,4$$

再代入上面的鞍式路径方程得

$$y_2=\left(\frac{-4-0}{2}\right)(y_1-2)+3$$

$$y_2=7-2y_1\quad 鞍式路径$$

注意暂态均衡(2,3)落在鞍式路径上. 只有当初始条件满足鞍式路径条件时暂态均衡将才是稳定的.

习 题 解 答

联立微分方程组

19.1　求解下列一阶自控线性微分方程组.

$$\dot{y}_1=-8y_1+5y_2+4\qquad y_1(0)=7$$

$$\dot{y}_2=3.25y_1-4y_2+22\qquad y_2(0)=21.5$$

解　1. 为便于计算将方程组写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 3.25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ 22\end{bmatrix}$$

$$\dot{Y}=AY+B$$

2. 然后求余函数. 假设具有不同的实根,

$$y_c=k_1C_1e^{r_1t}+k_2C_2e^{r_2t}$$

其中

$$r_1,r_2=\frac{\mathrm{Tr}(A)\pm\sqrt{[\mathrm{Tr}(A)]^2-4|A|}}{2}$$

$\mathrm{Tr}(A)=-12$, 且 $|A|=15.75$.

$$r_1,r_2=\frac{-12\pm\sqrt{(12)^2-4(15.75)}}{2}=\frac{-12\pm9}{2}$$

$r_1=-1.5\quad r_2=-10.5$.

3. 再由

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} a_{11} - r_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

求特征向量 c_i.

(a) 对 $r_1 = -1.5$,

$$\begin{bmatrix} -8-(-1.5) & 5 \\ 3.25 & -4-(1.5) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.5 & 5 \\ 3.25 & -2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

通过简单的行与列相乘得

$$-6.5c_1 + 5c_2 = 0 \qquad c_2 = 1.3c_1$$

$$3.25c_1 - 2.5c_2 = 0 \qquad c_2 = 1.3c_1$$

如果 $c_1 = 1$, 则 $c_2 = 1.3$. 于是对应于 $r_1 = -1.5$ 的特征向量 c_1 是

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

而且通解中余函数的第一部分的元素是

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1.3 \end{bmatrix}e^{-1.5t} = \begin{bmatrix} k_1e^{-1.5t} \\ 1.3k_1e^{-1.5t} \end{bmatrix}$$

(b) 再将 $r_2 = -10.5$ 代入

$$\begin{bmatrix} -8-(-10.5) & 5 \\ 3.25 & -4-(-10.5) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 5 \\ 3.25 & 6.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

由于矩阵$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})$的奇异性,任意一行与列相乘所得的最后结果都是一样的.简单地将第一行与列相乘得

$$2.5c_1 + 5c_2 = 0 \qquad c_1 = -2c_2$$

如果 $c_2 = 1$, 则 $c_1 = -2$; 对应于 $r_2 = -10.5$ 的特征向量 C_2 是

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

而且余函数的第二部分的元素是

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-10.5t} = \begin{bmatrix} -2k_2e^{-10.5t} \\ k_2e^{-10.5t} \end{bmatrix}$$

最终得全函数

$$y_1(t) = k_1e^{-1.5t} - 2k_2e^{-10.5t}$$

$$y_2(t) = 1.3k_1e^{-1.5t} + k_2e^{-10.5t}$$

4. 现在求暂态均衡解 y_p,

$$y_p = \overline{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3.25 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -4 & -3.25 \\ -5 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\text{Adj.}\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3.25 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{15.75}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3.25 & -8 \end{bmatrix}$$

代入上式,

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15.75}\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3.25 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

于是通解 $y(t) = y_c + y_p$ 为

$$y_1(t) = k_1e^{-1.5t} - 2k_2e^{-10.5t} + 8$$

$$y_2(t) = 1.3k_1e^{-1.5t} + k_2e^{-10.5t} + 12 \tag{19.27}$$

5. 为求定解,在 $t = 0$ 时利用初始条件, $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 21.5$, 简单计算上述方程,

$$y_1(0) = k_1 - 2k_2 + 8 = 7$$

$$y_2(0) = 1.3k_1 + k_2 + 12 = 21.5$$

联立解得，　$k_1=5 \quad k_2=3$

代入(12.27)，

$$y_1(t)=5e^{1.5t}-6e^{-10.5t}+8$$
$$y_2(t)=6.5e^{-1.5t}+3e^{-10.5t}+12$$

由于 $r_1=-1.5<0, r_2=-10.5<0$，平衡是动态稳定的.

19.2 求解下列微分方程组.

$$\dot{y}_1=2y_2-6 \qquad y_1(0)=1$$
$$\dot{y}_2=8y_1-16 \qquad y_2(0)=4$$

解 ☞ 1. 用矩阵形式表示，

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6\\ -16\end{bmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{Y}}=\mathbf{AY}+\mathbf{B}$$

2. 求特征根，

$$r_1,r_2=\frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{A})\pm\sqrt{[\mathrm{Tr}(\mathbf{A})]^2-4|\mathbf{A}|}}{2}$$
$$r_1,r_2=\frac{0\pm\sqrt{(0)^2-4(-16)}}{2}=\frac{\pm 8}{2}$$
$$r_1=-4 \qquad r_2=4$$

3. 确定特征向量.

a) 对 $r_1=-4$，

$$\begin{bmatrix}0-(-4) & 2\\ 8 & 0-(-4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$
$$4c_1+2c_2=0 \quad c_2=-2c_1$$

如果 $c_1=1$，则 $c_2=-2$，且余函数的第二部分的元素是

$$y_c^1=k_1\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}e^{-4t}=\begin{bmatrix}k_1e^{-4t}\\ -2k_1e^{-4t}\end{bmatrix}$$

b) 对 $r_2=4$，

$$\begin{bmatrix}0-4 & 2\\ 8 & 0-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 8 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$
$$-4c_1+2c_2=0 \qquad c_2=2c_1$$

如果 $c_1=1$，则 $c_2=2$，且余函数的第二部分的元素是

$$y_c^2=k_2\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}e^{4t}=\begin{bmatrix}k_2e^{4t}\\ 2k_2e^{4t}\end{bmatrix}$$

故余函数是

$$y_1(t)=k_1e^{-4t}+k_2e^{4t}$$
$$y_2(t)=-2k_1e^{-4t}+2k_2e^{4t}$$

4. 对于稳定状态解 y_p，

$$y_p=\bar{\mathbf{Y}}=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$
$$\bar{\mathbf{Y}}=\begin{bmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{bmatrix}=-\frac{1}{-16}\begin{bmatrix}0 & -2\\ -8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\ -16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

于是通解 $y(t)=y_c+y_p$ 为

$$y_1(t)=k_1e^{-4t}+k_2e^{4t}+2$$
$$y_2(t)=-2k_1e^{-4t}+2k_2e^{4t}+3 \tag{19.28}$$

5. 由初始条件，$y_1(0)=1, y_2(0)=4$ 求定解.

$$y_1(0)=k_1+k_2+2=1$$

$$y_2(0) = -2k_1 + 2k_2 + 3 = 4$$

联立解得

$$k_1 = -0.75 \qquad k_2 = -0.25$$

代入(19.28),我们得到最后的结果.

$$y_1(t) = -0.75e^{-4t} - 0.25e^{4t} + 2$$
$$y_2(t) = 1.5e^{-4t} + 0.5k_2e^{4t} + 3$$

由于 $r_1 = -4 < 0$, $r_2 = 4 > 0$,我们得到一个鞍点解.鞍点解一般是不稳定的,除非初始条件落在鞍式路径

$$y_2 = \left(\frac{r_1 - a_{11}}{a_{12}}\right)(y_1 - \bar{y}_1) + \bar{y}_2$$

上.代入后得,

$$y_2 = \left(\frac{-4-0}{2}\right)(y_1 - 2) + 3$$
$$y_2 = 7 - 2y_1$$

这就是鞍式路径的方程,其图形在例 10 中的图 19-2 中给出.将初始条件 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 4$ 代入,我们看到

$$4 \neq 7 - 2(1) = 5$$

由于初始条件没有落在鞍式路径上,方程组不稳定.

19.3 求解下列方程组.

$$\dot{y}_1 = 4y_1 + 7y_2 + 3 \qquad y_1(0) = 7$$
$$\dot{y}_2 = y_1 - 2y_2 + 4 \qquad y_2(0) = 10$$

解 ☞ 1. 转化为矩阵形式,

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}31\\ 4\end{bmatrix}$$
$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{B}$$

2. 特征根是

$$r_1, r_2 = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-15)}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$
$$r_1 = -3 \qquad r_2 = 5$$

3. 对应于 $r_1 = -3$ 特征向量,

$$\begin{bmatrix}4-(-3) & 7\\ 1 & -2-(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 7\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = 0$$
$$7c_1 + 7c_2 = 0 \qquad c_1 = -c_2$$

如果 $c_2 = 1$,则 $c_1 = -1$,且

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}e^{-3t} = \begin{bmatrix}-k_1e^{-3t}\\ k_1e^{-3t}\end{bmatrix}$$

对 $r_2 = 5$,

$$\begin{bmatrix}4-5 & 7\\ 1 & -2-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 7\\ 1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = 0$$
$$-c_1 + 7c_2 = 0 \qquad c_1 = 7c_2$$

如果 $c_2 = 1$,则 $c_1 = 7$,且

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix}7\\ 1\end{bmatrix}e^{5t} = \begin{bmatrix}7k_2e^{5t}\\ k_2e^{5t}\end{bmatrix}$$

故余函数是

$$y_1(t) = -k_1e^{-3t} + 7k_2e^{5t}$$
$$y_2(t) = k_1e^{-3t} + k_2e^{5t}$$

4. 稳定状态解 y_p 是

$$y_p = \bar{Y} = -A^{-1}B$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{-15}\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 31 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

于是通解是

$$y_1(t) = -k_1 e^{-3t} + 7k_2 e^{5t} - 6$$

$$y_2(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{5t} - 1 \qquad (19.29)$$

5. 给定 $y_1(0)=7, y_2(0)=10$,定解是

$$y_1(0) = -k_1 + 7k_2 - 6 = 7$$

$$y_2(0) = k_1 + k_2 - 1 = 10$$

$$k_1 = 8 \qquad k_2 = 3$$

代入(19.29),得最后结果

$$y_1(t) = -8e^{-3t} + 21e^{5t} - 6$$

$$y_2(t) = 8e^{-3t} + 3e^{5t} - 1$$

由于 $r_1=-3<0, r_2=5>0$,我们再次得到一个鞍点解,此鞍点解将是不稳定的,除非初始条件满足鞍式路径方程:

$$y_2 = \left(\frac{r_1 - a_{11}}{a_{12}}\right)(y_1 - \bar{y}_1) + \bar{y}_2$$

代入后得

$$y_2 = \left(\frac{-3-4}{7}\right)[y_1 - (-6)] + (-1)$$

$$y_2 = -7 - y_1$$

利用初始条件 $y_1(0)=7, y_2(0)=10$,

$$10 \neq -7 - (7) = -14$$

由于初始条件不满足鞍式路径方程,方程组不稳定.

19.4 求解下列非线性自控一阶微分方程组,其中一个或多个导数是另外导数的函数.

$$\dot{y}_1 = 4y_1 + y_2 + 6 \qquad y_1(0) = 9$$

$$\dot{y}_2 = 8y_1 + 5y_2 - \dot{y}_1 - 6 \qquad y_2(0) = 10$$

解 ☞ 1. 将方程写成(19.7)的形式,然后用矩阵形式表示,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A_1\dot{Y} = A_2 Y + B$$

2. 从特征方程

$$|A_2 - r_i A_1| = 0$$

出发求特征根,这里为简化省略下标 i,

$$|A_2 - rA_1| = \left|\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 4-r & 1 \\ 8-r & 5-r \end{vmatrix} = 0$$

$$r^2 - 8r + 12 = 0$$

$$r_1 = 2 \qquad r_2 = 6$$

3. 求特征向量 C_i,这里

$$(A_2 - r_i A_1)C_i = 0$$

$$(A_2 - r_i A_1)C_i = \begin{bmatrix} 4-r_i & 1 \\ 8-r_i & 5-r_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

将 $r_1=2$ 代入,

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 8-2 & 5-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2c_1 + c_2 = 0 \qquad c_2 = -2c_1$$

如果设 $c_1=1$，则 $c_2=-2$，且

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}e^{2t} = \begin{bmatrix}k_1\\-2k_1\end{bmatrix}e^{2t}$$

现在将 $r_2=6$ 代入，

$$\begin{bmatrix}4-6 & 1\\8-6 & 5-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = 0$$

$$-2c_1 + c_2 = 0 \qquad c_2 = 2c_1$$

如果 $c_1=1$，则 $c_2=2$，且

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{6t} = \begin{bmatrix}k_2\\2k_2\end{bmatrix}e^{6t}$$

将余函数的两部分相加得

$$y_1(t) = k_1e^{2t} + k_2e^{6t}$$
$$y_2(t) = -2k_1e^{2t} + 2k_2e^{6t}$$

4. 对于特解 y_p，

$$\bar{Y} = -A_2^{-1}B$$

其中

$$B = \begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix}4 & 1\\8 & 5\end{bmatrix}, |A_2| = 20-8 = 12, 且\ A_2^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -1\\-8 & 4\end{bmatrix}.$$

代入

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix}\bar{y}_1\\\bar{y}_2\end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix}5 & -1\\-8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$$

将特解加到余函数上，

$$y_1(t) = k_1e^{2t} + k_2e^{6t} - 3$$
$$y_2(t) = -2k_1e^{2t} + 2k_2e^{6t} + 6 \tag{19.30}$$

5. 对于定解，在(19.30)中设 $t=0$ 并利用 $y_1(0)=9, y_2(0)=10$.

$$y_1(0) = k_1 + k_2 - 3 = 9$$
$$y_2(0) = -2k_1 + 2k_2 + 6 = 10$$
$$k_1 = 5 \quad k_2 = 7$$

然后代回到(19.30)，

$$y_1(t) = 5e^{2t} + 7e^{6t} - 3$$
$$y_2(t) = -10e^{2t} + 14e^{6t} + 6$$

由于 $r_1=2>0, r_2=6>0$，方程组将是动态不稳定的.

19.5　求解下列微分方程组：

$$\dot{y}_1 = -y_1 + 4y_2 - 0.5\dot{y}_2 - 1 \qquad y_1(0) = 4.5$$
$$\dot{y}_2 = 4y_1 - 2y_2 - 10 \qquad y_2(0) = 16$$

解 ☞ 1. 将方程改写形式并用矩阵表示，

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\\dot{y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 4\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-10\end{bmatrix}$$

$$A_1\dot{Y} = A_2Y + B$$

2. 从特征方程

$$|A_2 - rA_1| = \begin{vmatrix}-1-r & 4-0.5r\\4 & -2-r\end{vmatrix} = 0$$

出发求特征根，

$$r^2 + 5r - 14 = 0$$
$$r_1 = -7 \qquad r_2 = 2$$

3. 由特征值问题

$$(A_2 - r_i A_1)C_i = \begin{bmatrix} -1-r & 4-0.5r \\ 4 & -2-r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

求特征向量 C_i.

将 $r_i = -7$ 代入

$$\begin{bmatrix} -1-(-7) & 4-0.5(-7) \\ 4 & -2-(-7) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7.5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$6c_1 + 7.5c_2 = 0 \quad c_1 = -1.25c_2$$

如果 $c_2 = 1$,则 $c_1 = -1.25$,且

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-7t} = \begin{bmatrix} -1.25k_1e^{-7t} \\ k_1e^{-7t} \end{bmatrix}$$

将 $r_1 = 2$ 代入

$$\begin{bmatrix} -1-2 & 4-0.5(2) \\ 4 & -2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-3c_1 + 3c_2 = 0 \quad c_1 = c_2$$

如果 $c_2 = 1$,则 $c_1 = 1$,且

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} = \begin{bmatrix} k_2e^{2t} \\ k_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

故余函数为

$$y_1(t) = -1.25k_1e^{-7t} + k_2e^{2t}$$
$$y_2(t) = k_1e^{-7t} + k_2e^{2t}$$

4. 求特解,

$$\bar{Y} = -A_2^{-1}B,$$

其中 $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $A_2^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$,且

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将特解加到余函数上,我们得到

$$y_1(t) = -1.25k_1e^{-7t} + k_2e^{2t} + 3$$
$$y_2(t) = k_1e^{-7t} + k_2e^{2t} + 1 \tag{19.31}$$

5. 对于定解,在(19.31)中设 $t = 0$ 并利用 $y_1(0) = 4.5$, $y_2(0) = 16$.

$$y_1(0) = -1.25k_1 + k_2 + 3 = 4.5$$
$$y_2(0) = k_1 + k_2 + 1 = 16$$
$$k_1 = 6 \quad k_2 = 9$$

最后,代入到(19.31),

$$y_1(t) = -7.5e^{-7t} + 9e^{2t} + 3$$
$$y_2(t) = 6e^{-7t} + 9e^{2t} + 1$$

由于特征根具有不同的符号,我们得到一个鞍点均衡.该鞍点均衡将不稳定,除非初始条件与鞍式路径上的一点重合.

19.6 求解下列微分方程组:

$$\dot{y}_1 = -3y_1 - y_2 - 0.5\dot{y}_2 + 5 \qquad y_1(0) = 22.2$$
$$\dot{y}_2 = -2y_1 - 4y_2 - \dot{y}_1 + 10 \qquad y_2(0) = 3.9$$

解 1. 用矩阵形式表示,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A_1\dot{Y} = A_2Y + B$$

2. 特征方程是

$$|A_2 - rA_1| = \begin{vmatrix} -3-r & -1-0.5r \\ -2-r & -4-r \end{vmatrix} = 0$$

$$0.5r^2 + 5r + 10 = 0$$

乘以 2 并利用二次公式得特征根

$$r_1 = -7.235 \qquad r_2 = -2.765$$

3. 对应于 $r_1 = -7.235$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix} -3-(-7.235) & -1-0.5(-7.235) \\ -2-(-7.235) & -4-(-7.235) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.235 & 2.6175 \\ 5.235 & 3.235 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$4.235c_1 + 2.6175c_2 = 0 \quad c_2 \approx -1.62c_1$$

如果 $c_1 = 1$, 则 $c_2 = -1.62$, 且

$$y_c^1 = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1.62 \end{bmatrix}e^{-7.235t} = \begin{bmatrix} k_1e^{-7.235t} \\ -1.62k_1e^{-7.235t} \end{bmatrix}$$

对 $r_2 = -2.765$,

$$\begin{bmatrix} -3-(-2.765) & -1-0.5(-2.765) \\ -2-(-2.765) & -4-(-2.765) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.235 & 0.3825 \\ 0.765 & -1.235 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-0.235c_1 + 0.3825c_2 = 0 \quad c_1 \approx 1.62c_2$$

如果 $c_1 = 1$, 则 $c_2 = 1.62$, 且

$$y_c^2 = k_2\begin{bmatrix} 1.62 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2.765t} = \begin{bmatrix} 1.62k_2e^{-2.765t} \\ k_2e^{-2.765t} \end{bmatrix}$$

因此, 余函数为

$$y_1(t) = k_1e^{-7.235t} + 1.62k_2e^{-2.765t}$$
$$y_2(t) = -1.62k_1e^{-7.235t} + k_2e^{-2.765t}$$

4. 特解 $\bar{Y} = -A_2^{-1}B$ 是

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故通解为

$$y_1(t) = k_1e^{-7.235t} + 1.62k_2e^{-2.765t} + 1$$
$$y_2(t) = -1.62k_1e^{-7.235t} + k_2e^{-2.765t} + 2 \tag{19.32}$$

5. 利用 $y_1(0) = 22.2$, $y_2(0) = 3.9$ 求解 k_1, 和 k_2,

$$k_1 + 1.62k_2 + 1 = 22.2$$
$$-1.62k_1 + k_2 + 2 = 3.9$$
$$k_1 = 5 \qquad k_2 = 10$$

代入到(19.32)得定解

$$y_1(t) = 5e^{-7.235t} + 16.2e^{-2.765t} + 1$$
$$y_2(t) = -8.1e^{-7.235t} + 10e^{-2.765t} + 2$$

由于两个特征根都是负数均态均衡是稳定的.

联立差分方程

19.7 求解下列一阶线性差分方程组, 其中任何一个差分都不是另一个差分的函数.

$$x_t = 0.4x_{t-1} + 0.6y_{t-1} + 6 \qquad x_0 = 14$$
$$y_t = 0.1x_{t-1} + 0.3y_{t-1} + 5 \qquad y_0 = 23$$

解 ☞ 1. 写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Y_t = AY_{t-1} + B$$

2. 将(19.3)用于特征方程 $|A - r_iI| = 0$ 求特征根.

$$r_1, r_2=\frac{0.7\pm\sqrt{(0.7^2)-4(0.06)}}{2}=\frac{0.7\pm0.5}{2}$$

$$r_1=0.6 \qquad r_2=0.1$$

3．对应于 $r_1=0.6$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix}0.4-0.6 & 0.6\\ 0.1 & 0.3-0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.6\\ 0.1 & -0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$

$$-0.2c_1+0.6c_2=0 \qquad c_1=3c_2$$

如果 $c_2=1$，则 $c_1=3$，而且有

$$k_1\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}(0.6)^t=\begin{bmatrix}3k_1(0.6)^t\\ k_1(0.6)^t\end{bmatrix}$$

对 $r_2=0.1$，

$$\begin{bmatrix}0.4-0.1 & 0.6\\ 0.1 & 0.3-0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.6\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$

$$0.3c_1+0.6c_2=0 \qquad c_1=-2c_2$$

如果 $c_2=1$，则 $c_1=-2$，且

$$k_2\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}(0.1)^t=\begin{bmatrix}-2k_2(0.1)^t\\ k_2(0.1)^t\end{bmatrix}$$

将两部分相加得余函数

$$x_c=3k_1(0.6)^t-2k_2(0.1)^t$$

$$y_c=k_1(0.6)^t+k_2(0.1)^t$$

4．对于特解，

$$y_p=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & -0.6\\ -0.1 & 0.7\end{bmatrix}$$

故

$$y_p=\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{0.36}\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 10\end{bmatrix}$$

于是通解是

$$x_t=3k_1(0.6)^t-2k_2(0.1)^t+20$$

$$y_t=k_1(0.6)^t+k_2(0.1)^t+10 \tag{19.33}$$

5．利用初始条件 $x_0=14, y_0=23$，(19.33)化为

$$3k_1-2k_2+20=14$$

$$k_1+k_2+10=23$$

联立解得

$$k_1=4 \quad k_2=9$$

代入(19.33)，

$$x_t=12(0.6)^t-18k_2(0.1)^t-20$$

$$y_t=4(0.6)^t+9(0.1)^t+10$$

由于 $|0.6|<1, |0.1|<1$，时间路径收敛．由于两个根都是正数，不会有振动出现．

19.8　求解下列一阶线性差分方程组．

$$x_t=-0.6x_{t-1}+0.1y_{t-1}+9 \qquad x_0=7.02$$

$$y_t=0.5x_{t-1}-0.2y_{t-1}+42 \qquad y_0=57.34$$

解 ☞ 1．用矩阵形式表示，

$$\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.6 & 0.1\\ 0.5 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\ 42\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{B}$$

2. 特征根是

$$r_1, r_2 = \frac{-0.8 \pm \sqrt{-(0.8)^2 - 4(0.07)}}{2} = \frac{-0.8 \pm 0.6}{2}$$

$$r_1 = -0.1 \qquad r_2 = -0.7$$

3. 对应于 $r_1 = -0.1$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix} -0.6-(-0.1) & 0.1 \\ 0.5 & -0.2-(-0.1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-0.5c_1 + 0.1c_2 = 0 \quad c_2 = 5c_1$$

如果 $c_1 = 1$,则 $c_2 = 5$,且

$$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}(-0.1)^t = \begin{bmatrix} k_1(-0.1)^t \\ 5k_1(-0.1)^t \end{bmatrix}$$

对 $r_2 = 0.7$,

$$\begin{bmatrix} -0.6-(-0.7) & 0.1 \\ 0.5 & -0.2-(-0.7) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$0.1c_1 + 0.1c_2 = 0 \quad c_1 = -c_2$$

如果 $c_2 = 1$,则 $c_1 = -1$,且

$$k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(-0.7)^t = \begin{bmatrix} -k_2(-0.7)^t \\ k_2(-0.7)^t \end{bmatrix}$$

故有余函数

$$x_c = k_1(-0.1)^t - k_2(-0.7)^t$$

$$y_c = 5k_1(-0.1)^t + k_2(-0.7)^t$$

4. 对于特解,

$$y_p = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.6 & 0.1 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.1 \\ -0.5 & 1.2 \end{bmatrix}$$

故

$$y_p = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{1.87}\begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.5 & 1.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.02 \\ 38.34 \end{bmatrix}$$

于是通解是

$$x_t = k_1(-0.1)^t - k_2(-0.7)^t + 8.02$$
$$y_t = 5k_1(-0.1)^t + k_2(-0.7)^t + 38.34 \qquad (19.34)$$

5. 利用 $x_0 = 7.02, y_0 = 57.34$,(19.34)化为

$$k_1 - k_2 + 8.02 = 7.02$$

$$5k_1 + k_2 + 38.34 = 57.34$$

联立解得

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 4$$

代入(19.34),

$$x_t = 3(-0.1)^t - 4(-0.7)^t + 8.02$$

$$y_t = 15(-0.1)^t + 4(-0.7)^t + 38.34$$

由于两个特征根的绝对值都小于1,方程组趋于稳定的暂态均衡解.由于根是负数,有振动出现.

19.9 求解下列一阶线性差分方程组,其中没有一个差分是另一个差分的函数.

$$x_t = -0.7x_{t-1} - 0.4y_{t-1} + 40 \qquad x_0 = 24$$

$$y_t = -0.575x_{t-1} - 0.5y_{t-1} - x_t + 6 \qquad y_0 = -32$$

解 ☞ 1. 整理并将方程改写形式并用矩阵表示,

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.7 & -0.4\\-0.575 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{t-1}\\y_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}40\\6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}_{t-1}+\boldsymbol{B}$$

2. 然后从特征方程出发求特征根,

$$|\boldsymbol{A}_2-r_t\boldsymbol{A}_1|=0$$

$$\begin{bmatrix}-0.7 & -0.4\\-0.575 & -0.5\end{bmatrix}-r_t\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.7-r_t & -0.4\\-0.575-r_t & -0.5-r_t\end{bmatrix}=0$$

$$r^2+0.8r-0.12=0$$

$$r_1=-0.6 \quad r_2=-0.2$$

3. 对应于 $r_1=-0.6$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix}-0.7-(-0.6) & -0.4\\-0.575-(-0.6) & -0.5-(-0.6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.4\\0.025 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=0$$

$$-0.1c_1-0.4c_2=0 \qquad c_1=-4c_2$$

如果 $c_2=1$,则 $c_1=-4$,且特征向量是

$$k_1\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}(-0.6)^t=\begin{bmatrix}-4k_1(-0.6)^t\\k_1(-0.6)^t\end{bmatrix}$$

对 $r_2=-0.2$,

$$\begin{bmatrix}-0.7-(-0.2) & -0.4\\-0.575-(-0.2) & -0.5-(-0.2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.4\\-0.375 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=0$$

$$-0.5c_1-0.4c_2=0 \qquad c_2=-1.25c_1$$

如果 $c_1=1$,则 $c_2=-1.25$,且对应于 $r_2=-0.2$ 的特征向量是

$$k_2\begin{bmatrix}1\\-1.25\end{bmatrix}(-0.2)^t=\begin{bmatrix}k_2(-0.2)^t\\-1.25k_2(-0.2)^t\end{bmatrix}$$

将两个特征向量相加,得余函数

$$x_c=-4k_1(-0.6)^t+k_2(-0.2)^t$$

$$y_c=k_1(-0.6)^t-1.25k_2(-0.2)^t$$

4. 对于特解 $y_p=\bar{\boldsymbol{Y}}$,

$$\bar{\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-0.7 & -0.4\\-0.575 & -0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.7 & 0.4\\1.575 & 1.5\end{bmatrix}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{1.92}\begin{bmatrix}1.5 & 0.4\\-1.575 & 1.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\-27.5\end{bmatrix}$$

将 y_c 和 y_p 相加,我们得到通解

$$\begin{aligned}x_t&=-4k_1(-0.6)^t+k_2(-0.2)^t+30\\y_t&=k_1(-0.6)^t-1.25k_2(-0.2)^t-27.5\end{aligned}\tag{19.35}$$

5. 最后,将初始条件 $x_0=24$, $y_0=-32$ 用于(19.35),

$$-4k_1+k_2+30=24$$

$$k_1-1.25k_2-27.5=-32$$

$$k_1=3 \qquad k_2=6$$

并将这些值代回(19.35)便可得到

$$x_t=-12(-0.6)^t-6(-0.2)^t+30$$

$$y_t=3(-0.6)^t-7.5(-0.2)^t-27.5$$

由于两个特征根的绝对值都小于1,解稳定.

19.10　求解下列一阶线性差分方程组.

$$x_t = 0.6x_{t-1} + 0.85y_{t-1} - y_t + 15 \qquad x_0 = 27$$
$$y_t = 0.2x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + 6 \qquad y_0 = 38$$

解 1. 写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.85 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{B}$$

2. 求特征根, $|\boldsymbol{A}_2 - r_i\boldsymbol{A}_1| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0.6 & 0.85 \\ 0.2 & 0.4 \end{vmatrix} - r_i\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 - r_i & 0.85 - r_i \\ 0.2 & 0.4 - r_i \end{bmatrix} = 0$$
$$r^2 - 0.8r + 0.07 = 0$$
$$r_1 = 0.7 \qquad r_2 = 0.1$$

3. 对应于 $r_1 = 0.7$,

$$\begin{bmatrix} 0.6 - 0.7 & 0.85 - 0.7 \\ 0.2 & 0.4 - 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.15 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$-0.1c_1 + 0.15c_2 = 0 \qquad c_1 = 1.5c_2$$

如果 $c_2 = 1$, 则 $c_1 = 1.5$, 且特征向量是

$$k_1\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}(0.7)^t = \begin{bmatrix} 1.5k_1(0.7)^t \\ k_1(0.7)^t \end{bmatrix}$$

对 $r_2 = 0.1$,

$$\begin{bmatrix} 0.6 - 0.1 & 0.85 - 0.1 \\ 0.2 & 0.4 - 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$0.5c_1 + 0.75c_2 = 0 \qquad c_1 = -1.5c_2$$

如果 $c_2 = 1$, 则 $c_1 = -1.5$, 且特征向量是

$$k_2\begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}(0.1)^t = \begin{bmatrix} -1.5k_2(0.1)^t \\ k_2(0.1)^t \end{bmatrix}$$

4. 对于特解,

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B}$$

其中

$$(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 & 0.85 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.15 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

故

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.27}\begin{bmatrix} 0.6 & -0.15 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

将 y_c 和 y_p 相加,

$$\begin{aligned} x_t &= 1.5k_1(0.7)^t - 1.5k_2(0.1)^t + 30 \\ y_t &= k_1(0.7)^t + k_2(0.1)^t + 20 \end{aligned} \tag{19.36}$$

5. 对于定解, 将 $x_0 = 27$ 和 $y_0 = 33$ 用于(19.36)得

$$1.5k_1 - 1.5k_2 + 30 = 27$$
$$k_1 + k_2 + 20 = 38$$
$$k_1 = 8 \qquad k_2 = 10$$

代回到(19.36),

$$x_t = 12(0.7)^t - 15(0.1)^t + 30$$
$$y_t = 8(0.7)^t + 10(0.1)^t + 20$$

由于两个特征根的绝对值都小于 1, 解稳定.

联立微分方程的相图

19.11　用相图检验方程组

$$\dot{y}_1 = 3y_1 - 18$$
$$\dot{y}_2 = -2y_2 + 16$$

的稳定性.

解 ☞ 1. 确定满足 $\dot{y}_1 = 0$ 的稳定状态解 $\bar{y}_1$ 以求等倾线.

$\dot{y}_1 = 3y_1 - 18 = 0$　　　$\dot{y}_2 = -2y_2 + 16 = 0$

$\bar{y}_1 = 6$　　y_1 等倾线　　　$\bar{y}_2 = 8$　　y_2 等倾线.

如在图 19-3 所看到的,等倾线的相交勘定暂定均衡解$(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (6, 8)$.

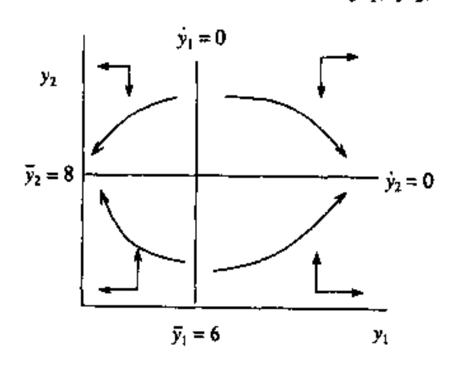


图 19-3

2. 用水平移动的箭头确定 y_1 等倾线周围的运动.

(a) 在 y_1 等倾线的左边, $y_1 < 6$.　　　(b) 在 y_1 等倾线的右边, $y_1 > 6$.

将这些值依次代入 $y_1 = -3y_1 - 18$ 可得

如果 $y_1 < 6$, 则 $\dot{y}_1 < 0$, 出现向左运动;　　如果 $y_1 > 6$, 则 $\dot{y}_1 > 0$, 出现向右运动.

3. 用竖直移动的箭头确定 y_2 等倾线周围的运动.

(a) 在 y_2 等倾线的上方, $y_2 > 8$.　　　(b) 在 y_1 等倾线的下方, $y_2 < 8$.

将这些值依次代入 $y_2 = -2y_2 + 16$ 可得

如果 $y_2 > 8$, 则 $\dot{y}_2 < 0$, 运动向下;　　　如果 $y_2 < 8$, 则 $\dot{y}_2 > 0$, 运动向上.

图 19-3 中表示最终运动方向的箭头都远离稳定平衡,说明方程组发散.画轨线以确信系统确实发散.

证明及说明

19.12　给定

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{AY} + \boldsymbol{B} \tag{19.37}$$

根据第 19.1 节以及例 1 证明

$$(\boldsymbol{A} - r_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}_i = 0$$

证 ☞ 从方程组的齐次式出发,即 $\boldsymbol{B} = 0$,或零向量,并假设有不同的实根,我们可希望解具有

$$\boldsymbol{Y} = k_i\boldsymbol{C}_i e^{r_i t} \tag{19.38}$$

形式,其中 k_i = 标量, C_i = 数值的(2×1)列向量, r_i = 标量.将(19.38)的两边对 t 求导,可得

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = r_i k_i \boldsymbol{C}_i e^{r_i t} \tag{19.39}$$

将(19.38)和(19.39)代入(19.37)的齐次形式,这里 $\boldsymbol{B} = 0$,

$$r_i k_i \boldsymbol{C}_i e^{r_i t} = \boldsymbol{A} k_i \boldsymbol{C}_i e^{r_i t}$$

消去公因式 k_i 和 $e^{r_i t}$, 得

$$r_i \boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_i$$

$$AC_i - r_iC_i = 0$$

提出 C_i 并注意到 A 是一个(2×2)矩阵且 r_i 是标量,用(2×2)单位矩阵 I_2,或简单地用 I,乘以 r_i 便可得到

$$(A - r_iI)C_i = 0 \quad \text{Q.E.D.} \tag{19.40}$$

19.13　继续问题 19.12 中的模型,
证明

$$r_1, r_2 = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{[\text{Tr}(A)]^2 - 4|A|}}{2}$$

证 ☞ 如果(19.40)中的$(A - r_iI)$是非奇异的,这就意味着它线性不相关,于是 C_i 一定是零列向量.出现平凡解.为了求非平凡解,$(A - r_iI)$必须是奇异的.有非平凡解($C_i \neq 0$)的必要条件是

$$|A - r_iI| = 0 \tag{19.41}$$

其中方程(19.41)称为矩阵 A 的特征方程或特征多项式.为简单起见省略下标并代入得

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}r - a_{22}r + r^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

重写为

$$r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

或,用矩阵形式表示

$$r^2 - \text{Tr}(A)r + |A| = 0$$

这个二次方程可通过二次式

$$r_1, r_2 = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{[\text{Tr}(A)]^2 - 4|A|}}{2} \quad \text{Q.E.D.}$$

求解出 r_i.

19.14　继续问题 19.13 中的模型,证明特解

$$y_p = \bar{Y} = -A^{-1}B \tag{19.42}$$

是暂态或稳定状态解 $\bar{Y}$.

证 ☞ 为求稳定状态解,我们简单地设导数构成的列向量等于零,即 $\dot{Y} = 0$.当 $\dot{Y} = 0$ 时,$\dot{Y}$ 不变且 $Y = \bar{Y}$.代入(19.37)中得

$$\dot{Y} = A\bar{Y} + B = 0$$

$$A\bar{Y} = -B$$

$$\bar{Y} = -A^{-1}B \quad \text{Q.E.D.}$$

19.15　给定

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

或

$$A_1\dot{Y} = A_2Y + B \tag{19.43}$$

证 ☞ 根据第 19.2 节以及例 3 证明要求余函数,必须求解特殊的特征值问题

$$(A_2 - r_iA_1)C_i = 0$$

从(19.43)的齐次式出发,即 $B = 0$,或零向量,并假设有不同的实根,我们希望解及其导数具有

$$Y = k_iC_ie^{r_it} \quad \dot{Y} = r_ik_iC_ie^{r_it} \tag{19.44}$$

形式.

将(19.44)代入(19.43)的齐次形式,这里 $B = 0$,

$$A_1r_ik_iC_ie^{r_it} = A_2k_iC_ie^{r_it}$$

消去公因式 k_i 和 e^{r_it},得

$$A_1r_iC_i = A_2C_i$$

$$(A_2 - r_i A_1) C_i = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

19.16 根据问题 19.15 中的模型,证明特解是

$$y_p = \bar{Y} = -A_2^{-1} B \tag{19.45}$$

证 ☞ 特解是满足 $\dot{Y} = 0$ 的稳定状态解 $\bar{Y}$. 代入(19.43)中得,

$$A_1 \dot{Y} = A_2 \bar{Y} + B = 0$$

$$A_2 \bar{Y} = -B$$

$$\bar{Y} = -A_2^{-1} B \quad \text{Q.E.D.}$$

19.17 给定

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

或

$$Y_t = A Y_{t-1} + B \tag{19.46}$$

证 ☞ 根据第 19.3 节以及例 5 证明当没有一个差分是另外一个差分的函数时,联立一阶线性差分方程组的特征值问题是

$$(A - r_i I) C_i = 0$$

从方程组的齐次式出发,即 $B = 0$,并假设有不同的实根,从单个的差分方程的知识,我们可希望

$$Y_t = k_i C_i (r_i)^t \qquad Y_{t-1} = k_i C_i (r_i)^{t-1} \tag{19.47}$$

其中 k_i 和 r_i 是标量,C_i = 数值的(2×1)列向量. 代入(19.46),其中 $B = 0$,

$$k_i C_i (r_i)^t = A k_i C_i (r_i)^{t-1}$$

消去公因式 k_i 并重写得

$$A C_i (r_i)^{t-1} - C_i (r_i)^t = 0$$

在 $t = 1$ 时解得

$$(A - r_i I) C_i = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

19.18 给定

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

或

$$A_1 Y_t = A_2 Y_{t-1} + B \tag{19.48}$$

证 ☞ 根据第 19.4 节以及例 9 证明当没有一个或多个差分是另外一个差分的函数时,联立一阶线性差分方程组的特征值问题是

$$(A_2 - r_i A_1) C_i = 0$$

从前面的工作,并假设有不同的实根,我们可希望

$$Y_t = k_i C_i (r_i)^t \qquad Y_{t-1} = k_i C_i (r_i)^{t-1} \tag{19.49}$$

代入(19.48)的齐次形式中,其中 $B = 0$,可得

$$A_1 k_i C_i (r_i)^t = A_2 k_i C_i (r_i)^{t-1}$$

$$A_2 C_i (r_i)^{t-1} - A_1 C_i (r_i)^t = 0$$

在 $t = 1$ 时解得

$$(A_2 - r_i A_1) C_i = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

19.19 与问题 19.18 中的模型相同,证明特解是

$$y_p = \bar{Y} = (A_1 - A_2)^{-1} B \tag{19.50}$$

证 ☞ 对于特解或稳定状态解,

$$x_t = x_{t-1} = \bar{x} \quad y_t = y_{t-1} = \bar{y}$$

写成矩阵形式,

$$Y_t = Y_{t-1} = \bar{Y}$$

代入(19.48)中得

$$\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{B}$$

求解 $\bar{\boldsymbol{Y}}$,

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)^{-1}\boldsymbol{B} \quad \text{Q.E.D.}$$

第二十章 变 分 法

20.1 动态最优化

在第四章和第五章的静态最优化问题研究中，我们寻找在一个特定的时间点或区域上使一个给定的函数最大化和最小化的一个点或一些点．给定一个函数 $y=y(x)$，最优点 x^* 的一阶条件为 $y'(x^*)=0$．在动态最优化中，我们寻找使一个给定的积分最大化或最小化的曲线 $x^*(t)$．这个最大化的积分定义为独立变量 t，函数 $x(t)$ 及它的导数 dx/dt 的函数 F 下的面积．简单地，假设时间区域从 $t_0=0$ 到 $t_1=T$，且用 $\dot{x}$ 表示 dx/dt，我们寻找最大化或最小化

$$\int_0^T F[t,x(t),\dot{x}(t)]dt \tag{20.1}$$

这里假定 F 对 t，$x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 是连续的、且具有对 x 和 $\dot{x}$ 的连续偏导数．将形如(20.1)，对每一个函数 $x(t)$ 对应着一个数值的积分称为泛函．一个使泛函达到最大或最小值的曲线称为极值曲线．极值可接受的"候选"极值曲线是在定义域上连续可微且特别地满足一些固定端点条件的函数类 $x(t)$．在极值曲线的研究中，我们首先用称为变分法的古典方法进行，这个方法的奠基人是17世纪末的艾萨克·牛顿，詹姆斯·伯努利和约翰·伯努利．

例1 一家公司当希望获得从时间 $t=0$ 到 $t=T$ 的最大利润时发现，产品的需求不仅依赖于产品的价格 p，而且也依赖于价格关于时间的变化率 dp/dt．假设成本是固定的，并且每个 p 和 dp/dt 是时间的函数，$\dot{p}$ 代表 dp/dt，公司的目标可以作如下数学表示

$$\text{Max}\int_0^T \pi[t,p(t),\dot{p}(t)]dt.$$

另一家公司发现它的总成本依赖于生产水平 $x(t)$ 和生产的变化率 $dx/dt=\dot{x}$．假设这个公司希望最小化成本，且 x 和 $\dot{x}$ 是时间 t 的函数，公司的目标可以写成

$$\min\int_{t_0}^{t_1} C[t,x(t),\dot{x}(t)]dt$$

满足

$$x(t_0)=x_0,\ \text{且}\ x(t_1)=x_1$$

这些初始和终值约束称为端点条件．

20.2 平面上两点间的距离

在平面上，连接两点的任意非线性曲线的长度 S，如在图20-1(a)中连接两点 (t_0,x_0) 和 (t_1,x_1) 的曲线，能做如下数学近似．细分曲线成小区间，如图20-1(b)，回忆毕达哥拉斯定理，在直角三角形斜边长度的平方等于两个直角边的平方和．因此，单个子段的长度是

$$(ds)^2=(dt)^2+(dx)^2$$

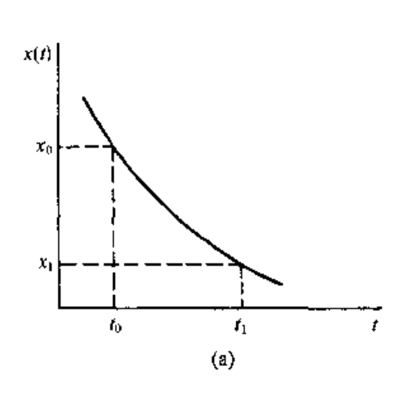
简化

$$ds=\sqrt{(dt)^2+(dx)^2}$$

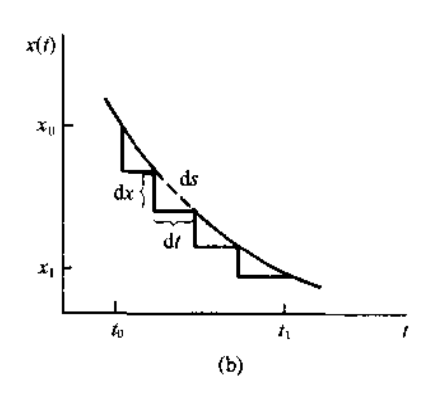
每边用 $\sqrt{(dt)^2}$ 或 dt 除，然后乘

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt$$



(a)



(b)

图 20-1

或用更简单的符号

$$ds = \sqrt{1+(\dot{x})^2}dt$$

从 t_0 到 t_1 的总曲线的长度能用积分形式估计

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+(\dot{x})^2}dt$$

见问题 20.1～20.3.

20.3　欧拉方程：动态最优化的必要条件

对于一个泛函，

$$\int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$$

连接点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)的曲线 $x^* = x^*(t)$是一个极值曲线(即最优化)的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \tag{20.2a}$$

称之为欧拉方程.尽管它等价于静态最优化的一阶必要条件，但是由式中稍微不同的记号可以容易了解,欧拉方程实际上是一个二阶微分方程. 用下标表示偏导数，并列出其自变"量"，它们本身也可能是函数.(20.2a)的欧拉方程表示为

$$F_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt}[F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})] \tag{20.2b}$$

然后，用链式法则求 $F_{\dot{x}}$ 关于 t 的导数，并且省略自变"量",有得

$$F_x = F_{\dot{x}t} + F_{\dot{x}x}(\dot{x}) + F_{\dot{x}\dot{x}}(\ddot{x}) \tag{20.2c}$$

这里，$\ddot{x} = d^2x/dt^2$

例 2 给出有关欧拉方程是极值曲线的必要条件的证明,也见问题 20.26～20.33.

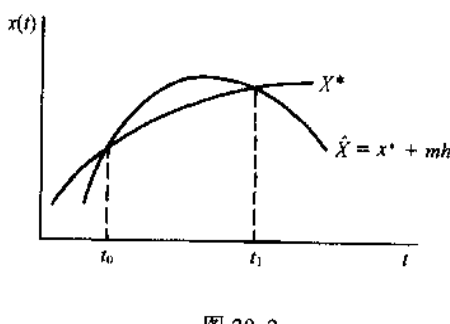


图 20-2

例 2　证明:设 $x^* = x^*(t)$是图 20-2 中连接点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)的曲线,并且它使下面泛函

取得最大值

$$\int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)] \mathrm{d}t \tag{20.3}$$

即 $x^* = x^*(t)$ 为极值曲线，欧拉方程(20.2a)是 $x^* = x^*(t)$ 为极值曲线的一个必要条件. 设 $\hat{X} = x^*(t) + mh(t)$ 是这些点的邻曲线，这里 m 是任意常数，$h(t)$ 是一个任意函数. 为了使曲线 $\hat{X}$ 也通过点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)，则 $\hat{X}$ 也满足端点条件

$$h(t_0) = 0 \qquad h(t_1) = 0 \tag{20.4}$$

使 $x^*(t)$和 $h(t)$固定，则这个积分值仅为 m 的函数，可以写成

$$g(m) = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x^*(t) + mh(t)\ \dot{x}^*(t) + m\dot{h}(t)] \mathrm{d}t \tag{20.5}$$

由于 $x^*(t)$由(20.3)中的最优化泛函定义，所以(20.5)中的函数 $g(m)$仅当 $m=0$ 时最优化，且

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m}\Big|_{m=0} = 0 \tag{20.6}$$

在(20.5)的积分记号下求微分，对给定的状态用莱布尼兹法则

$$g(m) = \int_{t_1}^{t_1} f(t, m) \mathrm{d}t$$

这里，t_0 和 t_1 是 m 的可微函数

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial m} \mathrm{d}t + f(t_1, m)\frac{\partial t_1}{\partial m} - f(t_0, m)\frac{\partial t_0}{\partial m} \tag{20.7}$$

由于目前的例子中积分边界 t_0 和 t_1 是固定的，$\partial t_0/\partial m = \partial t_1/\partial m = 0$. 则我们仅考虑莱布尼兹法则的第一项. 对(20.5)用链式法则求$\partial F/\partial m$. 由于 F 是 x 和 $\dot{x}$ 的函数，依次是 m 的函数，代入(20.7)得

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial(x^* + mh)}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\partial(\dot{x}^* + m\dot{h})}{\partial m}\right] \mathrm{d}t$$

由于$\partial(x^* + mh)/\partial m = h$ 且$\partial(\dot{x}^* + m\dot{h})/\partial m = \dot{h}$，用(20.6)，

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m}\Big|_{m=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} h(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h}(t)\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{20.8}$$

方括号中的第一项不动，第二项的积分用分部积分，

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m}\Big|_{m=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial x} h(t) \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h(t)\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) h(t) \mathrm{d}t = 0$$

由(20.4)，$h(t_0) = h(t_1) = 0$，上式第二项去掉，合并其他两项，

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}m}\Big|_{m=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right] h(t) \mathrm{d}t = 0 \tag{20.9}$$

由于 $h(t)$是不必为零的任意函数，因此推出对于极值曲线的必要条件为方括号中式子为零，即

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)$$

这就是欧拉方程. 也见问题 20.26～20.33.

20.4 求候选极值曲线

在动态最优化问题中，求满足固定端点条件的最大化或最小化一个给定积分的侯选极值曲线由如下五步来完成：

1. 设被积函数为 F，即 $F = F(t, x, \dot{x})$.
2. 求 F 对 x 和 $\dot{x}$ 的偏导数，记$\partial F/\partial x = F_x, \partial F/\partial \dot{x} = F_{\dot{x}}$.

3. 代入欧拉方程(20.2a)或(20.2b).

4. 求 $F_{\dot{x}}$ 关于 t 的导数. 由于 $F_{\dot{x}}$ 是 t, x 和 $\dot{x}$ 的函数, 且 x 和 $\dot{x}$ 是 t 的函数, 因此,需要用链式法则.

5. 如果没有导数项($\dot{x}$ 或 $\ddot{x}$), 立即解出 x; 如果有 $\dot{x}$ 或 $\ddot{x}$ 项, 直到作出所有导数的积分, 然后求出 x.

在例 3, 例 4 和问题 20.4～20.18 中, 给出了这个方法的例子.

例 3　设 $\int_0^T (6x^2e^{3t}+4t\dot{x})\mathrm{d}t$

用(20.4)中所列程序及(20.2a)的记号最优化这个泛函如下:

1. 设　$F=6x^2e^{3t}+4t\dot{x}$

2. 则　$\dfrac{\partial F}{\partial x}=12xe^{3t}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}=4t$

3. 代入欧拉方程(20.2a), $12xe^{3t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t)$

4. 但 $\mathrm{d}(4t)/\mathrm{d}t=4$, 代入上式, $12xe^{3t}=4$

5. 由于没有 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 项, 所以可直接求出 x, 将这个解表示成 $x(t)$,

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{-3t}$$

这个解满足动态最优化的必要条件, 只能说明它是一个候选极值曲线. 所以有必要使用充分条件, 见 20.5 节.

例 4　泛函

$$\int_0^2(4\dot{x}^2+12xt-5t)\mathrm{d}t$$

满足

$$x(0)=1\qquad x(2)=4$$

求上述泛函的候选极值曲线, 现在用(20.2b)的记号.

1. 设　$F=4\dot{x}^2+12xt-5t$

2. 则　$F_x=12t$ 且 $F_{\dot{x}}=8\dot{x}$

3. 代入欧拉方程(20.2b),

$$12t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(8\dot{x})$$

4. 记 $\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}$,

$$12t=8\ddot{x}$$

5. 由于有 $\ddot{x}$, 对这个方程两边进行两次积分, 积分的每一步仅有一个常数.

$$\int 12t\,\mathrm{d}t=\int 8\ddot{x}\,\mathrm{d}t$$

$$6t^2+c_1=8\dot{x}$$

再积分,

$$\int(6t^2+c_1)\mathrm{d}t=\int 8\dot{x}\,\mathrm{d}t$$

$$2t^3+c_1t+c_2=8x$$

解出 x,

$$x(t)=\frac{1}{4}t^2+\frac{c_1}{8}t+\frac{c_2}{8}$$

代入边值条件,

$$x(0)=\frac{c_1}{8}\quad c_2=8$$

$$x(2)=\frac{1}{4}(2)^2+\frac{1}{8}(2)c_1+1=4\quad c_1=4$$

代入式中

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t+1$$

20.5　变分法的充分条件

假设对于极值曲线，必要条件是满足的.

1. 如果泛函 $F[t,x(t),\dot{x}(t)]$ 在 $x(t)$ $\dot{x}$ 是联合凹的，则对于最大值情况，必要条件是充分的.

2. 如果泛函 $F[t,x(t),\dot{x}(t)]$ 在 $x(t)$ $\dot{x}$ 是联合凸的，则对于最小值情况，必要条件是充分的.

联合凹性和联合凸性由泛函的二阶导数二次型的符号很容易确定. 给定判别式

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{x\dot{x}}\\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}}\end{vmatrix}$$

1. (a) 如果 $|\boldsymbol{D}_1|=F_{xx}<0$，且 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|>0$，$|\boldsymbol{D}|$ 是负定的，F 是严格凹的，得到一个全局最大的极值曲线.

(b) 如果 $|\boldsymbol{D}_1|=F_{xx}\leqslant 0$，且 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|\geqslant 0$，检验变量所有可能的次序，$|\boldsymbol{D}|$ 是半负定的，F 是简单凹的，则得到局部最大的极值曲线.

2. (a) 如果 $|\boldsymbol{D}_1|=F_{xx}>0$，且 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|>0$，$|\boldsymbol{D}|$ 是正定的，F 是严格凸的，从而得到一个全局最小的极值曲线.

(b) 如果 $|\boldsymbol{D}_1|=F_{xx}\geqslant 0$，且 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|\geqslant 0$，检验变量所有可能的次序，$|\boldsymbol{D}|$ 是半正定的，F 是简单凸的，则得到局部最小的极值曲线. 见例 5 和问题 20.4～20.18.

例 5　下面是例 3 的充分条件的例子，这里泛函是 $F=6x^2e^{3t}+4t\dot{x}$，$F_x=12xe^{3t}$，$F_{\dot{x}}=4t$

$$|\boldsymbol{D}^1|=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{x\dot{x}}\\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12e^{3t} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1|=12e^{3t}>0\qquad |\boldsymbol{D}_2^1|=0$$

$|\boldsymbol{D}^1|$ 不符合对于全局最优的正定准则，但可以证明，如果这个判别式对于变量的倒序也是半正定时，则对于局部最小，它是半正定的.

$$|\boldsymbol{D}^2|=\begin{vmatrix}F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x}\\ F_{x\dot{x}} & F_{xx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 12e^{3t}\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^2|=0,\qquad |\boldsymbol{D}_2^2|=0$$

对每个变量的两种可能的顺序，$|\boldsymbol{D}^1|\geqslant 0$，$|\boldsymbol{D}^2|\geqslant 0$，$|\boldsymbol{D}|$ 是半正定的，泛函达到局部最小的，充分条件. 用完全的相似的方式，检验出例 4 的充分条件.

20.6　泛函约束的动态优化

求一个极值曲线使最大或最小化一个给定积分

$$\int_0^T F[t,\ x(t),\dot{x}]\mathrm{d}t \tag{20.10}$$

满足积分约束

$$\int_0^T G[t,\ x(t),\dot{x}]\mathrm{d}t=k \tag{20.11}$$

这里，k 是一个常数，利用拉格朗日乘子方法. 将约束(20.11)乘以 λ，然后与目标函数相加，形成拉格朗日函数：

$$\int_0^T(F+\lambda G)\mathrm{d}t \tag{20.12}$$

对于动态最优化，下面欧拉方程是有极值曲线的必要条件，而非充分条件

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)\text{这里}H=F+\lambda G \tag{20.13}$$

见例 6 和问题 20.25.

例 6 泛函约束优化通常用于确定一条曲线，使之满足给定的周长且所围的面积最大.这样的问题称为**等周问题**，且通常将泛函记为 $y(t)$，而不是 $x(t)$.调整这个记号，求包含最大区域 A 的给定长度 k 的曲线 Y，这里

$$A=\frac{1}{2}\int(x\dot{y}-y)\mathrm{d}x$$

曲线的长度是

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\dot{y}^2}\mathrm{d}x=k$$

像 20.6 节解释的，建立拉格朗日函数

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{2}(x\dot{y}-y)+\lambda\sqrt{1+\dot{y}^2}\right]\mathrm{d}x \tag{20.14}$$

设 H 等于(20.14)的被积函数，则欧拉方程是

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\right)$$

从(20.14)，

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{1}{2}\quad \text{且}\quad \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}=\frac{1}{2}x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

代入欧拉方程，

$$-\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)$$

$$-1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)$$

两边直接积分，然后整理，

$$\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=-(x-c_1)$$

方程的两边平方，解出 $\dot{y}$，

$$\lambda^2\dot{y}^2=(x-c_1)^2(1+\dot{y}^2)$$

$$\lambda^2\dot{y}^2-(x-c_1)^2\dot{y}^2=(x-c_1)^2$$

$$\dot{y}^2=\frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2-(x-c_1)^2}$$

$$\dot{y}=\pm\frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}$$

两边积分得

$$\dot{y}-c_2=\pm\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}$$

两边平方，然后整理，可以表示成一个圆

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2$$

这里，c_1,c_2 和 λ 由 x_0,x_1 和 k 决定.

20.7 变分记号

一个特殊的符号 δ 是用在变分法中，它的性质类似于积分中的微分 d.

给定一个函数 $F[t,x(t),\dot{x}(t)]$，并且考虑 t 作为常数，设

$$\Delta F = F[t,x(t)+mh(t),\ \dot{x}(t)+m\dot{h}(t)] - F[t,x(t),\dot{x}(t)] \qquad (20.15)$$

这里，m 是任意常数，同例 2 一样，$h(t)$为任意函数，为了简洁，自变"量"常被省略. 用泰勒展开，通过求各阶导数，然后按顺序相加，逼近一个函数 $x(t)$

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)(t-t_0)^2}{2!} + \cdots$$

我们有

$$F(t,x+mh,\ \dot{x}+m\dot{h}) = F(t,x,\dot{x}) + \frac{\partial F}{\partial x}mh + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}m\dot{h} + \cdots \qquad (20.16)$$

将(20.16)代入(20.15)，直接相减，

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}mh + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}m\dot{h} + \cdots \qquad (20.17)$$

这里，前两个式子的和称为 F 的变分，由 δF 表示. 则

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}mh + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}m\dot{h} \qquad (20.18)$$

由(20.18)立即看出，如果 $F=x$，用 x 代替F，有

$$\delta x = mh \qquad (20.19)$$

类似地，如果 $F=\dot{x}$

$$\delta\dot{x} = m\dot{h} \qquad (20.20)$$

因此，(20.18)的可表示为

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} \qquad (20.21)$$

在动态最优化中寻求一个极值曲线的必要条件也可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} F[t,x(t),\dot{x}(t)]\mathrm{d}t = 0$$

证明见问题 20.34 和 20.35.

20.8 经济学中的应用

一个公司希望在时间 t_1 交付的 N 单位订单在折现利率 i 下的现值最小. 公司的成本由生产成本 $a[\dot{x}(t)]^2$ 和存储成本 $bx(t)$构成. 这里，a 和b 是正的常数；$x(t)$是到 t 时的累积存货；存货的变化率是生产率 $\dot{x}(t)$，这里，$\dot{x}(t)\geqslant 0$；$a\dot{x}(t)$是单位生产成本. 假设 $x(t_0)=0$，且公司希望达到 $x(t_1)=N$，公司希望

$$\min\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{-it}(a\dot{x}^2+bx)\mathrm{d}t$$

满足

$$x(t_0)=0 \qquad x(t_1)=N$$

候选极值曲线为求公司成本最小的，设

$$F[t,x(t),\dot{x}(t)] = \mathrm{e}^{-it}(a\dot{x}^2+bx)$$

则

$$F_x = b\mathrm{e}^{-it} \quad \text{且} \quad F_{\dot{x}} = 2a\mathrm{e}^{-it}\dot{x}$$

代入欧拉方程(20.2b)，

$$b\mathrm{e}^{-it} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2a\mathrm{e}^{-it}\dot{x})$$

由于 $\dot{x}$ 是t 的函数，则对右端用乘法法则和链式法则求导数，有

$$b\mathrm{e}^{-it} = 2a\mathrm{e}^{-it}\ddot{x} + \dot{x}(-i2a\mathrm{e}^{-it})$$

$$= 2ae^{-it}x - 2aie^{-it}\dot{x}$$

消去 e^{-it}，整理并解 x，

$$x(t) - i\dot{x}(t) = \frac{b}{2a} \tag{20.22}$$

由(20.22)，$x = i\dot{x} + \frac{b}{2a}$且由假设$\dot{x}(t) \geqslant 0$，在(20.22)中，$x(t)$一定是正的，表明公司在整个时间上保持严格生产增长率.

方程(20.22)是一个二阶线性微分方程，可以用 18.1 节中所列方法求解. 用方程(18.2a)求特殊积分，由于(18.1)中，$b_1 = -i$，$b_2 = 0$，且 $a = b/2a$，将泛函符号调整为 $x = x(t)$，而不是 $y = y(t)$，有

$$x_p = \frac{b/2a}{-i}t = -\frac{b}{2ai}t$$

用(18.4)求 r_1, r_2

$$r_1, r_2 = \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4(0)}}{2} = \frac{i \pm i}{2}$$

$$r_1 = i \qquad r_2 = 0$$

代入(18.3)求 x_c，并且与 x_p 相加，

$$x(t) = A_1e^{it} + A_2 - \frac{b}{2ai}t \tag{20.23}$$

设 $t_0 = 0$，$t_1 = T$，由边值条件得

$$x(0) = A_1 + A_2 = 0 \qquad A_2 = -A_1$$

$$x(T) = A_1e^{iT} + (-A_1) - \frac{b}{2ai}T = N$$

由 $x(T)$解出 A_1，

$$A_1(e^{iT} - 1) = N + \frac{b}{2ai}T$$

$$A_1 = \frac{N + [b/(2ai)]T}{e^{iT} - 1} \tag{20.24}$$

最后代入(20.23)，且 $A_2 = -A_1$，得到一个候选极值曲线：

$$x(t) = \left(\frac{N + [b/(2ai)]T}{e^{iT} - 1}\right)e^{it} - \left(\frac{N + [b/(2ai)]T}{e^{iT} - 1}\right) - \frac{b}{2ai}t$$

$$x(t) = \left(N + \frac{b}{2ai}T\right)\frac{e^{it} - 1}{e^{iT} - 1} - \frac{b}{2ai}t \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

然后，检验充分条件，这里 $F_x = be^{-it}$，$F_{\dot{x}} = 2ae^{-it}x$，

$$|\boldsymbol{D}^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2ae^{-it} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1| = 0 \qquad |\boldsymbol{D}_2^1| = 0$$

$$|\boldsymbol{D}^2| = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x} \\ F_{x\dot{x}} & F_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2ae^{-it} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^2| = 2ae^{-it} > 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^2| = 0$$

由于当检验变量两种顺序时，泛函的二阶微分的二次型的判别式为半正定的，局部最小化充分条件成立. 至于进一步的经济学应用，见问题 20.19～20.24.

习题解答

平面上两点间的距离

20.1 最小化第 20.2 节图 20-1 中连接点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)的曲线 S 的长度，即

$$\min\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t$$

满足

$$x(t_0)=x_0 \qquad x(t_1)=x_1$$

用 20.4 节中列出的步骤，求使泛函最小化的候选极值曲线.

解 ☞ 1. 设 $F=\sqrt{1+\dot{x}^2}=(1+\dot{x}^2)^{1/2}$

2. 求偏导数 F_x 和 $F_{\dot{x}}$，注意 F 中没有 x 项，仅有 $\dot{x}$ 项，对 $F_{\dot{x}}$ 用链式法则或幂函数法则

$$F_x=0 \quad F_{\dot{x}}=\frac{1}{2}(1+\dot{x}^2)^{-1/2}\cdot 2\dot{x}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

3. 代入欧拉方程

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)$$

4. 由于左边没有变量，则两边对 t 积分. 右边导数的积分得到原函数. 由于 $\int 0\mathrm{d}t=c$，一个常数，则

$$c=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

两边平方，整理，解出 $\dot{x}$，

$$c^2(1+\dot{x}^2)=\dot{x}^2$$

$$c^2=\dot{x}^2-c^2\dot{x}^2=(1-c^2)\dot{x}^2$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}=k_1 \qquad \text{一个常数}$$

5. 由于有 $\dot{x}$ 项，再积分得

$$x(t)=k_1t+k_2 \tag{20.25}$$

6. 由于在泛函中仅有变量 $\dot{x}$，则凹性或凸性的充分条件能惟一地由二阶微分的符号决定，利用乘法法则，由 $F_{\dot{x}}=\dot{x}(1+\dot{x}^2)^{-1/2}$，有

$$F_{\dot{x}\dot{x}}=(1+\dot{x}^2)^{-1/2}-\dot{x}(1+\dot{x}^2)^{-3/2}$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}}=(1+\dot{x}^2)^{-3/2}[(1+\dot{x})-\dot{x}^2]$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}}=(1+\dot{x}^2)^{-3/2}=\frac{1}{\sqrt{(1+\dot{x}^2)^3}}$$

由于距离的平方根不会为负，则 $F_{\dot{x}\dot{x}}>0$. 泛函是凸的，且对于最小的充分条件是满足的.

注意 (20.25)中的解是线性的，意味着两点间的最短距离为直线. 参数 k_1(斜率)和 k_2(垂直截距)由边值条件惟一确定，见问题 20.2.

20.2 最小化 $\int_0^2\sqrt{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t$，满足

$$x(0)=3 \quad x(2)=8$$

解 ☞ 由(20.25)， $x(t)=k_1t+k_2$

用边值条件，

$$x(0)=k_1(0)+k_2=3 \qquad k_2=3$$

$$x(2)=k_1(2)+3=8 \qquad k_1=2.5$$

代入得

$$x(t)=2.5t+3$$

20.3 (a) 用泛函由两点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)间的距离估计问题(20.2)；(b) 画出图像，从几何上检验答案.

解 ☞ (a) 设 $\int_0^2\sqrt{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t$ 及 $x(t)=2.5t+3$

求导数 $\dot{x}(t)=2.5$. 代入得

$$\int_0^2\sqrt{1+(2.5)^2}\mathrm{d}t=\int_0^2\sqrt{7.25}\mathrm{d}t=\sqrt{7.25}t\Big|_0^2$$

$$=2.69258(2)-2.69258(0)=5.385$$

(b) 将毕达哥拉斯定理用到图 20-3 中，

$$x^2 = 5^2 + 2^2$$

$$x = \sqrt{29} = 5.385$$

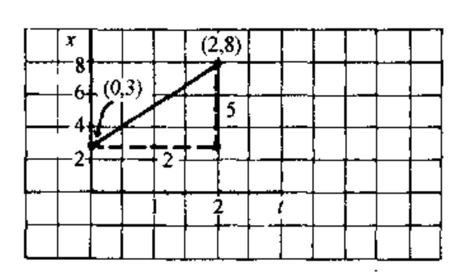


图 20-3

求候选极值曲线

20.4 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(2\dot{x}^2 - 42xt + 11t)\mathrm{d}t$$

满足 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

用所熟悉的六步求候选极值曲线.

解 ☞ 1.
$$F = 2\dot{x}^2 - 42xt + 11t$$

2.
$$F_x = -42t \quad F_{\dot{x}} = 4\dot{x}$$

3. 代入欧拉方程，

$$-42t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4\dot{x})$$

$$-42t = 4\ddot{x}$$

4. 两边积分消去 $\ddot{x}$ 项，每一次积分仅有一个积分常数，

$$-21t^2 + c_1 = 4\dot{x}$$

再积分消去 $\dot{x}$，

$$-7t^3 + c_1t + c_2 = 4x$$

5. 解 x

$$x(t) = -1.75t^3 + 0.25c_1t + 0.25c_2$$

6. 检验充分条件，

$$|\boldsymbol{D}^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1| = 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^1| = 0$$

$$|\boldsymbol{D}^2| = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x} \\ F_{x\dot{x}} & F_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^2| = 4 > 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^2| = 0$$

对两种变量顺序，泛函的二阶导数的判别式是半正定的，局部最小的充分条件满足.

20.5 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}^2 + 60t^3x)\mathrm{d}t$$

满足 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

解 ☞ 1.
$$F = \dot{x}^2 + 60t^3x$$

2.
$$F_x = 60t^3 \quad F_{\dot{x}} = 2\dot{x}$$

3. 代入欧拉方程，

$$60t^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x})$$

$$60t^3 = 2\ddot{x}$$

4. 两边积分消去 x 项，每一次积分有一个积分常数，

$$15t^4 + c_1 = 2\dot{x}$$

再积分解 x，

$$3t^5 + c_1 t + c_2 = 2x$$

5.
$$x(t) = -1.5t^4 + 0.5c_1 t + 0.5c_2$$

6. 与前面问题第 6 步一样进行检验时，泛函取得局部极小的充分条件成立.

20.6 最优化

$$\int_0^1 (13t - 3\dot{x}^2 + 36xt)\mathrm{d}t$$

满足 $x(0)=2 \quad x(1)=4$

解 ☞ 1.
$$F = 13t - 3\dot{x}^2 + 36xt$$

2.
$$F_x = 36t \quad F_{\dot{x}} = -6\dot{x}$$

3.
$$36t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-6\dot{x})$$

$$36t = -6\ddot{x}$$

4. 积分两次，每一次积分仅有一个积分常数，

$$18t^2 + c_1 = -6\dot{x}$$

$$6t^3 + c_1 t + c_2 = -6x$$

5.
$$x(t) = -t^3 - \frac{c_1}{6}t - \frac{c_2}{6}$$

用初始条件，

$$x(0) = -\frac{c_2}{6} = 2 \quad c_2 = -12$$

$$x(1) = -1 - \frac{c_1}{6} - 2 \quad c_1 = -18$$

然后代入上式，

$$x(t) = -t^3 + 3t + 2$$

6. 最后，检验充分条件，

$$|\boldsymbol{D}^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1| = 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^1| = 0$$

$$|\boldsymbol{D}^2| = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x} \\ F_{x\dot{x}} & F_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^2| = -6 < 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^2| = 0$$

当检验变量两种顺序时，二阶导数的判别式是半负定的，所以局部最大的充分条件满足.

20.7 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1} (3x^2 e^{5t} + 4t^3\dot{x})\mathrm{d}t$$

满足 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

解 ☞ 1.
$$F = 3x^2 e^{5t} + 4t^3\dot{x}$$

2.
$$F_x = 6xe^{5t} \quad F_{\dot{x}} = 4t^3$$

3. 代入欧拉方程，

$$6xe^{5t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4t^3)$$

$$6xe^{5t} = 12t^2$$

4.
$$6xe^{5t} = 12t^2$$

5. 左端没有 $\dot{x}$ 项，容易解出 x

$$x(t)=2t^2e^{-5t}$$

6. 检验充分条件，

$$|D^1|=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{x\dot{x}}\\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6e^{5t} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\qquad |D^2|=\begin{vmatrix}F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x}\\ F_{x\dot{x}} & F_{xx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 6e^{5t}\end{vmatrix}$$

$$|D_1^1|=6e^{5t}>0\qquad |D_2^1|=0\qquad |D_1^2|=0\qquad |D_2^2|=0$$

对变量两种顺序，泛函的二阶导数的判别式是半正定的，局部最小的充分条件满足.

20.8　最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{3\dot{x}^2}{8t^3}dt$$

满足 $x(t_0)=x_0\qquad x(t_1)=x_1$

解 ☞ 1.

$$F=\frac{3\dot{x}^2}{8t^3}$$

2.

$$F_x=0\quad F_{\dot{x}}=\frac{6\dot{x}}{8t^3}=\frac{3\dot{x}}{4t^3}$$

3. 代入欧拉方程，

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{3\dot{x}}{4t^3}\right)$$

4. 由于 $F_x=0$，积分

$$c_1=\frac{3\dot{x}}{4t^3}$$

$$3\dot{x}=4c_1t^3$$

由于有 $\dot{x}$，再积分得

$$3x=c_1t^4+c_2$$

5.

$$x(t)=\frac{c_1}{3}t^4+\frac{c_2}{4}=k_1t^4+k_2\ \text{这里},k_1=\frac{c_1}{3}\quad k_2=\frac{c_2}{3}$$

6. 当像上面的检验时，充分条件显示 $x(t)$ 是一个局部最小极值曲线.

20.9　最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(5t^2\dot{x}-4x^{2e^{-0.7t}})dt$$

满足 $x(t_0)=x_0\quad x(t_1)=x_1$

解 ☞ 1.

$$F=5t^2\dot{x}-4x^{2e^{-0.7t}}$$

2.

$$F_x=-8xe^{-0.7t}\quad F_{\dot{x}}=5t^2$$

3.

$$-8xe^{-0.7t}=\frac{d}{dt}(5t^2)=10t$$

$$-8xe^{-0.7t}=10t$$

4. 由于没有导数，不需要积分，直接解出 x.

5.

$$x(t)=-1.25te^{0.7t}$$

6. 检验充分条件，

$$|D^1|=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{x\dot{x}}\\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8e^{-0.7t} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\qquad |D^2|=\begin{vmatrix}F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x}\\ F_{x\dot{x}} & F_{xx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -8e^{-0.7t}\end{vmatrix}$$

$$|D_1^1|=-8e^{-0.7t}<0\qquad |D_2^1|=0\qquad |D_1^2|=0\qquad |D_2^2|=0$$

对变量两种顺序，$|D|$ 是半负定的，则 F 为凹的，从而 $x(t)$ 是一个局部最大的极值曲线.

20.10　最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(7t^2+2\dot{x}^2t)dt$$

满足 $x(t_0)=x_0\quad x(t_1)=x_1$

解 ☞ 1.

$$F=7t^2+2\dot{x}^2t$$

2. $$F_x = 0 \quad F_{\dot{x}} = 4\dot{x}t$$

3. $$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(4\dot{x}t)$$

4. 积分

$$c_1 = 4\dot{x}t \quad \dot{x} = \frac{c_1}{4t}$$

再积分得

$$x = \frac{c_1}{4}\ln t + c_2$$

5. $$x(t) = k_1\ln t + k_2 \quad \text{这里 } k_1 = \frac{c_1}{4} \quad k_2 = c_2$$

6. 相对最小化的充分条件满足.

20.11　最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(15x^2 - 132x + 19x\dot{x} + 12\dot{x}^2)\mathrm{d}t$$

满足 $x(t_0) = x_0$,　$x(t_1) = x_1$.

解 ☞ 1. $$F = 15x^2 - 132x + 19x\dot{x} + 12\dot{x}^2$$

2. $$F_x = 30x - 132 + 19\dot{x} \quad F_{\dot{x}} = 19x + 24\dot{x}$$

3. $$30x - 132 + 19\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(19x + 24\dot{x})$$

4. $$30x - 132 + 19\dot{x} = 19\dot{x} + 24\ddot{x}$$

代数解

$$\ddot{x} - 1.25x = -5.5 \tag{20.26}$$

5. 方程(20.26)是一个二阶微分方程,可由18.1节的方法求解. 用方程(18.2)求特殊积分 x_p,这里,$b_1 = 0$,$b_2 = -1.25$,且 $a = -5.5$

$$x_p = \frac{a}{b_2} = \frac{-5.5}{-1.25} = 4.4$$

然后用(18.4)求特征根,

$$r_1, r_2 = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-1.25)}}{2} = \pm\sqrt{1.25}$$

代入(18.3)中,求余函数 x_c

$$x_c = A_1 e^{\sqrt{1.25}t} + A_2 e^{-\sqrt{1.25}t}$$

最后,x_c 和 x_p 相加得

$$x(t) = A_1 e^{\sqrt{1.25}t} + A_2 e^{-\sqrt{1.25}t} + 4.4$$

6. 检验充分条件,

$$|\boldsymbol{D}^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 19 \\ 19 & 24 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1| = 30 > 0 \quad |\boldsymbol{D}_2^1| = 359 > 0$$

由于$|\boldsymbol{D}_1| > 0$,$|\boldsymbol{D}_2| > 0$时,$|\boldsymbol{D}|$是正定的,这意味着 F 是严格凸的,从而 $x(t)$为绝对最小值的极值曲线. 不需用相反顺序$|\boldsymbol{D}^2|$检验.

20.12　最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(-16x^2 + 144x + 11x\dot{x} - 4\dot{x}^2)\mathrm{d}t$$

满足 $x(0) = 8$,　$x(1) = 8.6$.

解 ☞ 1. $$F = -16x^2 + 144x + 11x\dot{x} - 4\dot{x}^2$$

2. $$F_x = -32x + 144 + 11\dot{x} \quad F_{\dot{x}} = 11x - 8\dot{x}$$

3. $$-32x + 144 + 11\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(11x - 8\dot{x})$$

$$-32x + 144 + 11\dot{x} = 11\dot{x} - 8\ddot{x}$$

简化、整理，

$$\ddot{x}-4x=-18$$

4.由(18.2)，特殊积分是

$$x_p=\frac{-18}{-4}=4.5$$

由(18.4)，特征根是

$$r_1,r_2=\frac{0\pm\sqrt{0-4(-4)}}{2}=\pm\sqrt{1.25}$$

$$r_1=2\quad x_2=-2$$

这样

$$x(t)=A_1e^{2t}+A_2e^{-2t}+4.5$$

由初值条件，$x(0)=8$，$x(1)=8.6$

$$x(0)=A_1+A_2+4.5=8$$

$$x(1)=7.3891A_1+0.1353A_2+4.5=8.6$$

5.代入　$x(t)=0.5e^{2t}+3e^{-2t}+4.5$

6. 应用充分条件，

$$|\boldsymbol{D}^1|=\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{x\dot{x}}\\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}}\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}-32 & 11\\ 11 & -8\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{D}_1^1|=-32<0\qquad|\boldsymbol{D}_2^1|=135>0$$

由于$|\boldsymbol{D}_1|<0$，$|\boldsymbol{D}_2|>0$时，$|\boldsymbol{D}|$是负定的，F是严格凹的，有绝对最大值．不需要检验$|\boldsymbol{D}^2|$．

20.13 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(16x^2+9x\dot{x}+8\dot{x}^2)dt$$

满足 $x(0)=x_0\quad x(1)=x_1$

解 ☞ 1.　$F=16x^2+9x\dot{x}+8\dot{x}^2$

2.　$F_x=32x+9\dot{x}\quad F_{\dot{x}}=9x+16\dot{x}$

3.　$32x+9\dot{x}=\frac{d}{dt}(19x+16\dot{x})$

4.　$32x+9\dot{x}=9\dot{x}+16\ddot{x}$

$$\ddot{x}-2x=0$$

5. 用(18.2)，这里 $b_1=0$，$b_2=-2$，且 $a=0$，求 x_p

$$x_p=\frac{a}{b_2}=\frac{0}{2}=0$$

用(18.4)求 r_1,r_2，

$$r_1,r_2=\frac{\pm\sqrt{-4(-2)}}{2}=\pm\sqrt{2}$$

代入(18.3)中，求函数 x_c

$$x_c=A_1e^{\sqrt{2}t}+A_2e^{-\sqrt{-2}t}$$

则因 $x_p=0$，

$$x(t)=x_c=A_1e^{\sqrt{2}t}+A_2e^{-\sqrt{2}t}$$

6. 充分条件显示 $x(t)$一个绝对最小的极值曲线．

20.14 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(7\dot{x}^2+4x\dot{x}-63x^2)dt$$

满足 $x(t_0)=x_0\quad x(t_1)=x_1$

解 ☞ 1.　$F=7\dot{x}^2+4x\dot{x}-63x^2$

2.　$F_x-4\dot{x}-126x\quad F_{\dot{x}}=14\dot{x}+4x$

3.
$$4\dot{x} - 126x = \frac{d}{dt}(14\dot{x} + 4x)$$

4.
$$4\dot{x} - 126x = 14\ddot{x} + 4\dot{x}$$
$$\ddot{x} + 9x = 0$$

这里，在(18.1)里，$b_1 = 0$，$b_2 = 9$，且 $a = 0$

5. 对 x_p，用(18.2)，

$$x_p = \frac{0}{9} = 0$$

因 $b_1{}^2 < 4b_2$，则用(18.19)，

$$r_1, r_2 = g \pm hi$$

这里

$$g = -\frac{1}{2}b_1 = -\frac{1}{2}(0) = 0 \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4b_2 - b_1{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$$

则

$$r_1, r_2 = 0 \pm 3i = \pm 3i$$

代入(18.26)

$$x_c = B_1\cos 3t + B_2\sin 3t$$

因 $x_p = 0$，

$$x(t) = x_c = B_1\cos 3t + B_2\sin 3t$$

6. 充分条件显示 $x(t)$是一个绝对最小的极值曲线.

20.15 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1}(5x^2 + 27x - 8x\dot{x} - \dot{x}^2)dt$$

满足 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

解析 1.
$$F = 5x^2 + 27x - 8x\dot{x} - \dot{x}^2$$

2.
$$F_x = 10x + 27 - 8\dot{x} \quad F_{\dot{x}} = -8x - 2\dot{x}$$

3.
$$10x + 27 - 8\dot{x} = \frac{d}{dt}(-8x - 2\dot{x})$$

4.
$$10x + 27 - 8\dot{x} = -8\dot{x} - 2\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + 5x = -13.5$$

5. 用(18.2)，

$$x_p = \frac{-13.5}{5} = -2.7$$

用(18.19)

$$g = -\frac{1}{2}(0) = 0 \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4(5)} = \sqrt{5}$$
$$r_1, r_2 = 0 \pm \sqrt{5}i = \pm\sqrt{5}i$$

代入(18.26)

$$x_c = B_1\cos\sqrt{5}t + B_2\sin\sqrt{5}t$$

则 $x(t) = B_1\cos\sqrt{5}t + B_2\sin\sqrt{5}t - 2.7$

6. 对于二阶条件，

$$|D^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|D_1^1| = 10 > 0 \quad |D_2^1| = -84 < 0$$

由于$|D_2| < 0$时，$|D|$无法检验出凹凸性，F既不能最大化，也不能最小化．它是在一个鞍点上．

20.16 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{0.12t}(5\dot{x}^2 - 18x)dt$$

满足 $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

解 ☞ 1. $$F = e^{0.12t}(5\dot{x}^2 - 18x)$$

2. $$F_x = -18e^{0.12t} \quad F_{\dot{x}} = 10\dot{x}e^{0.12t}$$

3. $$-18e^{0.12t} = \frac{d}{dt}(10\dot{x}e^{0.12t})$$

4. 用乘法法则,

$$-18e^{0.12t} = 10\dot{x}(0.12e^{0.12t}) + e^{0.12t}(10\ddot{x})$$

消去 $e^{0.12t}$项, 整理

$$\ddot{x} + 0.12\dot{x} = -1.8$$

5. 用(18.2a)和(18.4)

$$x_p = \left(\frac{-1.8}{0.12}\right)t = -15t$$

$$r_1, r_2 = \frac{-0.12 \pm \sqrt{(0.12^2 - 0)}}{2} = -0.12,\ 0$$

$$x_c = A_1e^{-0.12t} + A_2$$

则 $x(t) = A_1e^{-0.12t} + A_2 - 15t$

6. 检验充分条件,

$$|D^1| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{x\dot{x}} \\ F_{\dot{x}x} & F_{\dot{x}\dot{x}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10e^{0.12t} \end{vmatrix} \qquad |D^2| = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}\dot{x}} & F_{\dot{x}x} \\ F_{x\dot{x}} & F_{xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10e^{0.12t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|D_1^1| = 0 \quad |D_2^1| = 0 \qquad |D_1^2| = 10e^{0.12t} > 0 \quad |D_2^2| = 0$$

$|D|$是半正定的, F 是凸的则有局部最小.

20.17 最优化

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-0.05t}(4\dot{x}^2 + 15x)dt$$

满足 $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

解 ☞ 1. $$F = e^{-0.05t}(4\dot{x}^2 + 15x)$$

2. $$F_x = 15e^{-0.05t} \quad F_{\dot{x}} = 8\dot{x}e^{-0.05t}$$

3. $$15e^{-0.05t} = \frac{d}{dt}(8\dot{x}e^{-0.05t})$$

4. $$15e^{-0.05t} = 8\dot{x}(-0.05e^{-0.05t}) + e^{-0.05t}(8\ddot{x})$$

消去 $e^{-0.05t}$项, 整理

$$\ddot{x} - 0.05\dot{x} = 1.875$$

5. 用(18.2a)和(18.4)

$$x_p = \left(\frac{1.875}{-0.05}\right)t = -37.5t$$

$$r_1, r_2 = \frac{-0.05 \pm \sqrt{(-0.05)^2 - 0}}{2} = 0.05,\ 0$$

$$x_c - A_1e^{0.05t} + A_2$$

则

$$x(t) = A_1e^{0.05t} + A_2 - 37.5t$$

6. 充分条件显示局部最小.

20.18 求连接点(t_0, x_0)和(t_1, x_1)曲线, 使其绕 t 轴旋转生成最小表面

$$\text{Minimize} \quad 2\pi\int_{t_0}^{t_1} x(1 + \dot{x}^2)^{1/2}dt$$

满足 $x(t_0) = x_0 \qquad x(t_1) = x_1$

解 ☞ 1. $$F = x(1 + \dot{x}^2)^{1/2}$$

2. 对 $F_{\dot{x}}$ 用链式法则,

$$F_x = (1 + \dot{x}^2)^{1/2} \quad F_{\dot{x}} = x\dot{x}(1 + \dot{x}^2)^{-1/2}$$

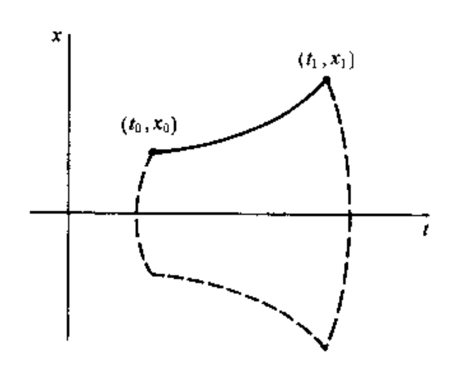


图 20-4

3. $$(1+\dot{x}^2)^{1/2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x\dot{x}(1+\dot{x}^2)^{-1/2}]$$

4. 用乘法法则和链式法则,

$$(1+\dot{x}^2)^{1/2}=x\dot{x}\left[-\frac{1}{2}(1+\dot{x}^2)^{-3/2}\cdot 2\dot{x}\ddot{x}\right]+(1+\dot{x}^2)^{-1/2}(x\ddot{x}+\dot{x}\dot{x})$$

$$=-x\dot{x}^2\ddot{x}(1+\dot{x}^2)^{-3/2}+(x\ddot{x}+\dot{x}\dot{x})(1+\dot{x}^2)^{-1/2}$$

两边乘以$(1+\dot{x}^2)^{3/2}$,

$$(1+\dot{x}^2)^2=-x\dot{x}^2\ddot{x}+(x\ddot{x}+\dot{x}\dot{x})(1+\dot{x}^2)$$

$$1+2\dot{x}^2+\dot{x}^4=-x\dot{x}^2\ddot{x}+x\ddot{x}+\dot{x}^2+x\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{x}^4$$

$$\ddot{x}-\frac{\dot{x}^2}{x}=\frac{1}{x} \tag{20.27}$$

5. 设 $\dot{x}=u=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, 则

$$\ddot{x}=\dot{u}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot u=u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入(20.27)

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{u^2}{x}=\frac{1}{x}$$

分离变量, 取积分

$$u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}(1+u^2)$$

$$\int\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+c_1=\ln x$$

解 u,

$$\mathrm{e}^{\ln\sqrt{1+u^2}+c_1}=\mathrm{e}^{\ln x}$$

$$c_2\sqrt{1+u^2}=x$$

这里 $c_2=e^{c_1}$, 两边平方, 整理

$$1+u^2=\frac{x^2}{{c_2}^2}$$

$$u=\frac{\sqrt{x^2-{c_2}^2}}{c_2}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

再分离变量, 积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-c_2^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{c_2} \tag{20.28}$$

左边用积分表,

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-c_2^2}\right)=\frac{t+c_3}{c_2} \tag{20.29}$$

或对(20.28)直接用三角代换,

$$\cosh^{-1}\frac{x}{c_2}=\frac{t+c_3}{c_2}$$

$$x(t)=c_2\cosh\frac{t+c_3}{c_2} \tag{20.30}$$

(20.30)的曲线称为**悬链线**，是自拉丁文中字链的意思，因为它描绘悬挂于点(t_0,x_0)和(t_1,x_1)间的链的形状．常数c_1和c_2能通过用初始条件$x(t_0)=x_0$和$x(t_1)=x_1$从(20.29)或(20.30)求得．

经济应用

20.19　对于垄断产品的需求量$x(t)$依赖于这个产品的销售价格和价格的变化率$\dot{p}(t)$：

$$x(t)=ap(t)+b\dot{p}+c \tag{20.31}$$

产量x时的生产成本为

$$z(x)=mx^2+nx+k \tag{20.32}$$

假设$p(0)=p_0$，T时刻的价格为$p(T)=p_1$，求在$0\leqslant t\leqslant T$上最大利润的价格政策．即

$$\max\int_0^T[p(t)x(t)-z(t)]\mathrm{d}t$$

解　将(20.31)和(20.32)代入，

$$\int_0^T[p(t)x(t)-z(x)]\mathrm{d}t=\int_0^T[p(ap+b\dot{p}+c)-(mx^2+nx+k)]\mathrm{d}t$$

再将(20.31)代入

$$\begin{aligned}\int_0^T[p(t)x(t)-z(x)]\mathrm{d}t&=\int_0^T[ap^2+bp\dot{p}+cp-m(ap+b\dot{p}+c)^2-n(ap+b\dot{p}+c)-k]\mathrm{d}t\\&=\int_0^T(ap^2+bp\dot{p}+cp-ma^2p^2-mabp\dot{p}-macp-mabp\dot{p}-mb^2\dot{p}^2\\&\quad-mbc\dot{p}-macp-mbc\dot{p}-mc^2-nap-nb\dot{p}-nc-k)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T[a(1-ma)p^2+(c-2mac-na)p+(b-2mab)p\dot{p}\\&\quad-(2mbc+nb)\dot{p}-mb^2\dot{p}^2-mc^2-nc-k]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{20.33}$$

设F等于(20.33)中的被积函数，

$$F_p=2a(1-ma)p+c-2mac-na+(b-2mab)\dot{p}$$

且

$$F_{\dot{p}}=(b-2mab)p-2mac-nb-2mb^2\dot{p}$$

用欧拉方程，

$$2a(1-ma)p+c-2mac-na+(b-2mab)\dot{p}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(b-2mab)p-2mac-nb-2mb^2\dot{p}]$$

$$2a(1-ma)p+c-2mac-na+(b-2mab)\dot{p}=(b-2mab)\dot{p}-2mb^2\ddot{p}$$

整理，

$$2mb^2\ddot{p}+2a(1-ma)p=2mac+na-c$$

$$\ddot{p}+\left[\frac{a(1-ma)}{mb^2}\right]p=\frac{2mac+na-c}{2mb^2}$$

用(18.2)和(18.4)，

$$P_p=\frac{(2mac+na-c)/(2mb^2)}{a(1-ma)(mb^2)}=\frac{2mac+na-c}{2a(1-ma)}$$

$$r_1,r_2=\frac{0\pm\sqrt{0-4a(1-ma)/(mb^2)}}{2}=\pm\sqrt{\frac{a(ma-1)}{mb^2}}$$

则

$$p(t)=A_1\exp\left(\sqrt{\frac{a(ma-1)}{mb^2}}\right)t+A_2\exp-\left(\sqrt{\frac{a(ma-1)}{mb^2}}\right)t+\frac{2mac+na-c}{2a(1-ma)}$$

如果$a<0$，$m>0$，正如经济理论所期望的，无论b的符号如何$\sqrt{a(ma-1)/(mb^2)}>0$，则时间路径$p(t)$有一对绝对值相同但异号的实根．

注　几十年来，在经济文献中，这是一个经典的情况.

20.20　最大化消费流 $C(t)$ 的瞬时效用 $U(t)$ 流. 这里

$$\begin{array}{ccccc} C(t) & = G[K(t)] & - & \dot{K} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{消费流} = & \text{生产} & - & \text{投资} & \end{array} \tag{20.34}$$

端点固定在 $K(0)=K_0$，$K(T)=K_T$ 上. 即

$$\max \int_0^T U[C(t)]\mathrm{d}t = \int_0^T U\{G[K(t)] - \dot{K}(t)\}\mathrm{d}t$$

满足

$$K(0) = K_0 \quad K(T) = K_T$$

解 ☞ 设 $F = U\{G[K(t)] - \dot{K}(t)\}$，$U' = \mathrm{d}U/\mathrm{d}C$，且 $G' = \mathrm{d}G/\mathrm{d}K$，

$$F_K = U'[C(t)]G'[K(t)] \qquad F_{\dot{K}} = -U'[C(t)]$$

代入欧拉方程，

$$U'[C(t)]G'[K(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{-U'[C(t)]\} = -U''[C(t)]\cdot\dot{C}$$

这里，在(20.34)上用链式法则，

$$\dot{C} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = G'[K(t)]\cdot\dot{K} - \ddot{K}$$

代入上式，

$$U'[C(t)]G'[K(t)] = -U''[C(t)]\cdot(G'[K(t)]\cdot\dot{K} - \ddot{K})$$

欧拉方程产生一个二阶常微分方程，这个解最大化给定极值曲线.

20.21　最大化消费 $C(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 效用的折现流，即

$$\max\int_0^T\{e^{-it}U[C(t)]\}\mathrm{d}t \tag{20.35}$$

这里，$C(t)=G[K(t)]-\dot{K}(t)-bK(t)$，$0\leqslant b\leqslant 1$，$G[K(t)]$ 是生产率，$\dot{K}(t)+bK(t)$ 是投资，b 是固定资本折旧率.

解 ☞ 代入(20.35)，我们寻找最大化

$$\int_0^T e^{-it}U\{G[K(t)] - \dot{K}(t) - bK(t)\}\mathrm{d}t$$

$$F = e^{-it}U\{G[K(t)] - \dot{K}(t) - bK(t)\}$$

设 $U' = \mathrm{d}U/\mathrm{d}C$ 且 $G' = \mathrm{d}G/\mathrm{d}K$，$\dot{K} = \mathrm{d}K/\mathrm{d}t$，

$$F_K = e^{-it}U'\{G[K(t)] - \dot{K}(t) - bK(t)\}\cdot\{G'[K(t)] - b\}$$

$$F_{\dot{K}} = -e^{-it}U'\{G[K(t)] - \dot{K} - bK(t)\}$$

代入欧拉方程，简化记号，

$$e^{-it}[U'\cdot(G'-b)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-e^{-it}U') \tag{20.36}$$

对右端用乘法和链式法则，

$$e^{-it}[U'\cdot(G'-b)] = -e^{-it}U''\cdot(G'\dot{K} - \ddot{K} - b\dot{K}) + U'ie^{-it}$$

消去 e^{-it} 项，

$$U'\cdot(G'-b) = -U''\cdot(G'\dot{K} - \ddot{K} - b\dot{K}) + U'i$$

由于 $U\{G[K(t)]\}$ 不详，我们不能进一步进行. 回到(20.36)，对右端的导数用一般的记号，则我们看到

$$e^{-it}[U'\cdot(G'-b)] = -e^{-it}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U') + U'(ie^{-it})$$

消去 e^{-it} 项，整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U') = U'i - U'\cdot(G'-b)$$

$$\frac{\mathrm{d}(U')/\mathrm{d}t}{U'} = i + b - G'$$

左边的项，边际效用的变化率，等于折现率加折旧率减资本的边际产品. 简言之，如果我们考虑左端的项作为资本收益，最优时间路径说明，如果资本收益比折现率加折旧率减资本边际产品大，则更多的资本，更多的消费将出现. 否则，资本累积和消费将减少.

20.22 最大化消费流 $C(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$的效用折现流，即

$$\max\int_0^T e^{-it}U[C(t)]dt \tag{20.37}$$

给定(a)

$$U[C(t)] = [C(t)]^n \qquad \text{这里 } 0 \leqslant n \leqslant 1$$

(b)

$$\begin{array}{ccccc} C(t) & = G[K(t)] & - & I(t) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{消费流} = & \text{生产} & - & \text{投资} \end{array}$$

这里，$G[K(t)] = aK(t)$，一个线性生产函数，$a > 0$，

且(c)

$$I(t) = \dot{K} + B + bK(t) \qquad 0 \leqslant b \leqslant 1 \qquad B > 0$$

解 ☞ 推导出

$$\begin{array}{cccc} \dot{K}(t) & = I(t) & - & [B + bK(t)] \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{资本存量的变化} = & \text{投资} & - & \text{直线折旧} \end{array}$$

代入(20.37)，我们希望最大化

$$\int_0^T e^{-it}[aK(t) - \dot{K} - B - bK(t)]^n dt$$

整理，为简化起见，省去自变量，

$$\int_0^T e^{-it}(mK - \dot{K} - B)^n dt$$

这里，$m = a - b$. 设 $F = e^{-it}(mK - \dot{K} - B)^n$

$$F_K = mne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1} \quad F_{\dot{K}} = -ne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1}$$

用欧拉方程，

$$mne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1} = \frac{d}{dt}[-ne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1}]$$

对右边用乘法和链式法则，

$$mne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1}$$

$$= -ne^{-it}(n-1)(mK - \dot{K} - B)^{n-2}(m\dot{K} - \ddot{K}) + (mK - \dot{K} - B)^{n-1}(ine^{-it})$$

两边用 $ne^{-it}(mK - \dot{K} - B)^{n-1}$除，

$$m = -(n-1)(mK - \dot{K} - B)^{-1}(m\dot{K} - \ddot{K}) + i$$

$$m - i = \frac{(1-n)(m\dot{K} - \ddot{K})}{mK - \dot{K} - B}$$

交叉乘，并化简，

$$(1-n)\ddot{K} + (i + mn - 2m)\dot{K} + (m^2 - im)K = (m - i)B$$

$$\ddot{K} + \frac{i + mn - 2m}{1-n}\dot{K} + \frac{m^2 - im}{1-n}K = \frac{m-i}{1-n}B \tag{20.38}$$

设

$$Z_1 = \frac{i + mn - 2m}{1-n} \quad Z_2 = \frac{m^2 - im}{1-n} \quad Z_3 = \frac{m-i}{1-n}B$$

$$K_p\frac{Z_3}{Z_2} = \frac{B(m-i)/(1-n)}{(m^2 - im)/(1-n)} = \frac{(m-i)B}{m(m-i)} = \frac{1}{m}B$$

这里，$m = a - b$，a 是资本的边际产品$(dG/dK = a)$，且 b 是固定折旧率.

$$K_c = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$$

这里

$$r_1, r_2 = \frac{-Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 - 4Z_2}}{2}$$

A_1 和 A_2 能从边界条件中计算出.

20.23 最大化

$$\int_0^T e^{-it} U[C(t)] \mathrm{d}t$$

给定折现率 $i = 0.12$，端点 $K(0) = 320$，$K(5) = 480$，效用函数 $U[C(t)] = [C(t)]^{0.5}$，这里，

$$C(t) = G[K(t)] - I(t)$$

$$G[K(t)] = 0.25K(t) \quad I(t) = \dot{K} + 60 + 0.05K(t)$$

解 ☞ 代入给定的泛函，我们寻找最大

$$\int_0^5 e^{-0.12t}[0.25K(t) - \dot{K} \quad 60 - 0.05K(t)]^{0.5}\mathrm{d}t$$

整理并为简化省略自变量，

$$\int_0^5 e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}\mathrm{d}t$$

设

$$F = e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}$$

用链式法则或幂函数法则，

$$F_K = 0.1e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}$$

$$F_{\dot{K}} = -0.5e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}$$

代入欧拉方程，然后用乘法法则和链式法则，

$$0.1e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-0.5e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}]$$

$$= -0.5e^{-0.12t}[-0.5(0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}(0.2\dot{K} - \ddot{K})]$$

$$+ (0.2K - \dot{K} - 60)^{0.5}(0.06e^{-0.12t})$$

两边除以 $0.5e^{-0.12t}(0.2K - \dot{K} - 60)^{-0.5}$，然后整理得，

$$0.2 = \frac{0.5(0.2\dot{K} - \ddot{K})}{0.2K - \dot{K} - 60} + 0.12$$

$$0.08(0.2K - \dot{K} - 60) = 0.1\dot{K} - 0.5\ddot{K}$$

$$\ddot{K} \quad 0.36\dot{K} + 0.032K = 9.6 \tag{20.39}$$

用(18.2)和(18.4)，

$$K_p = \frac{9.6}{0.032} = 300$$

$$r_1, r_2 = \frac{-(-0.36) \pm \sqrt{(-0.36)^2 - 4(0.032)}}{2} = \frac{0.36 \pm \sqrt{0.0016}}{2}$$

$$r_1 = 0.2 \qquad r_2 = 0.16$$

则

$$K(t) = A_1 e^{0.2t} + A_2 e^{0.16t} + 300$$

由端点条件，

$$K(0) = A_1 + A_2 + 300 = 320 \qquad A_2 = 20 - A_1$$

$$K(5) = A_1 e^{0.2(5)} + (20 - A_1)e^{0.16(5)} + 300 = 480$$

$$A_1(2.71828) + (20 - A_1)(2.22554) = 180$$

$$A_1 = 274.97 \approx 275 \quad A_2 = 20 - 275 = -255$$

代入，

$$K(t) = 275e^{0.2t} - 255e^{0.16t} + 300$$

20.24 由于问题 20.23 是问题 20.22 的一个特殊应用，所以可以通过代入给定的值 $a = 0.25$, $b = 0.05$, $B = 60$, $i = 0.12$, $m = 0.2$, $n = 0.5$ 到方程(20.38)，以检验其得到与方程(20.39)同样的答案.

解 ☞ 将值代入(20.38),

$$\ddot{K}+\left[\frac{0.12+(0.2)(0.5)-2(0.2)}{1-0.5}\right]\dot{K}+\left[\frac{(0.2)^2-(0.12)(0.2)}{1-0.5}\right]K=\left(\frac{0.2-0.12}{1-0.5}\right)60$$

$$\ddot{K}-0.36\dot{K}+0.032K=9.6$$

通过将值代入到问题 20.19 中的(20.38), 你自己去检验 r_1, r_2, K_c 和 $K(t)$ 的值,并比较它们与问题 20.20 中的解.

约束最优化

20.25 最小化

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-it}(a\dot{x}+bx)\mathrm{d}t$$

满足

$$\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}(t)\mathrm{d}t=N$$

这里

$$x(t_0)=0 \qquad x(t_1)=N$$

解 ☞ 与 20.6 节一样, 建立拉格朗日函数,

$$\int_{t_0}^{t_1}[e^{-it}(a\dot{x}^2+bx)+\lambda\dot{x}]\mathrm{d}t$$

设 H 等于这个被积函数, 欧拉方程是

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)$$

求偏导数

$$H_x=be^{-it} \qquad H_{\dot{x}}=2a\dot{x}e^{-it}+\lambda$$

代入欧拉方程,

$$be^{-it}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2a\dot{x}e^{-it}+\lambda)$$

用乘法和幂函数法则,

$$be^{-it}=-2ai\dot{x}e^{-it}+2a\ddot{x}e^{-it}$$

消去 e^{-it}, 整理得

$$\ddot{x}-i\dot{x}=\frac{b}{2a}$$

结果同不用约束动态规划的(20.22)一样. 这是等周问题的另一个例子, 它可以用 20.8 节的方法求解.

证明与演示

20.26 对下式寻求极值曲线

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x})\mathrm{d}t$$

证明欧拉方程也可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{20.40}$$

证 ☞ 括号中的每一项对 t 求导, 且用链式法则得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}$$

代入(20.40),

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}=\left[\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right]-\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

$$\dot{x}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\quad 或 \quad F_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_{\dot{x}})$$

20.27 证明，如果 F 不是 t 的显函数，欧拉方程能表示成

$$F-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=c\quad（一个常数）$$

证 ☞ 如果 t 不是 F 的显自变量，$\frac{\partial F}{\partial t}=0$，欧拉方程 20.40 简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

两边对 t 积分，

$$F-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=c$$

20.28 (a) 证明，如果 $F=F(t,\dot{x})$，x 不是自变量，欧拉方程简化为

$$F_{\dot{x}}=c\qquad 一个常数$$

(b) 解释这个意义.

证 ☞ (a) 对 $F=F(t,\dot{x})$

$$F_x=0\qquad F_{\dot{x}}=F_{\dot{x}}$$

代入欧拉方程，

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_{\dot{x}})$$

两边对 t 积分，

$$F_{\dot{x}}=c\tag{20.41}$$

(b) 方程(20.41)是关于 t 和 $\dot{x}$ 的一阶微分方程，其解提供所要求的极值曲线. 见问题 20.7 和 20.8.

20.29 (a) 证明，如果 $F=F(\dot{x})$ 仅是 $\dot{x}$ 的函数，欧拉方程简化为

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0$$

(b)解释它的意义.

证 ☞ (a) 给定

$$F=F(\dot{x})$$

$$F_x=0\qquad F_{\dot{x}}=F_{\dot{x}}$$

用欧拉方程，

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F_{\dot{x}}(\dot{x})]=F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}\tag{20.42}$$

(b) 由(20.42)，有 $\ddot{x}=0$ 或 $F_{\dot{x}\dot{x}}=0$. 如果 $\ddot{x}=0$，两次积分得 $x(t)=c_1t+c_2$，这是线性的. 如果 $F_{\dot{x}\dot{x}}=0$，$F_{\dot{x}}=c$，一个常数，这意味着 $F_{\dot{x}}$ 关于 $\dot{x}$ 是线性的. 如果 F 关于 $\dot{x}$ 是线性的，则解是平凡的. 见问题 20.30 和 20.31.

20.30 对下式求极值曲线

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-3\dot{x}^2}\mathrm{d}t$$

满足

$$x(t_0)=x_0\qquad x(t_1)=x_1$$

证 ☞

$$F_x=0\quad F_{\dot{x}}=-6\dot{x}\mathrm{e}^{-3\dot{x}^2}$$

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-6\dot{x}\mathrm{e}^{-3\dot{x}^2})$$

用乘法法则，

$$0 = -6\dot{x}(-6\dot{x}e^{-3\dot{x}^2}\ddot{x}) + e^{-3\dot{x}^2}(-6\ddot{x})$$

$$6\ddot{x}e^{-3\dot{x}^2}(6\dot{x}^2 - 1) = 0 \quad (20.43)$$

这是一个非线性二阶微分方程，不容易求解．然而，在(20.43)的方程中 $\ddot{x}$ 一定为零，由问题(20.29)知道，这个解一定是线性的，

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

20.31　对下式求极值曲线

$$\int_{t_0}^{t_1}(27 - 5\dot{x})\mathrm{d}t$$

满足

$$x(t_0) = x_0 \qquad x(t_1) = x_1$$

证 ☞

$$F_x = 0 \qquad F_{\dot{x}} = -5$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5)$$

这个欧拉方程是对任意允许值 x 都满足的恒等式，正像问题20.29描述的．在这个问题中，这显然变成极值曲线的直接积分：

$$\int_{t_0}^{t_1}(27 - 5\dot{x})\mathrm{d}t = 27(t_1 - t_0) - 5[x(t_1) - x(t_0)]$$

对这个被积函数，任何满足端点条件的 x 产生相同的值．

20.32　(a) 证明，如果 $F = F(t, x)$，$\dot{x}$ 不是自变量，则欧拉方程简化为

$$F_x = 0$$

(b) 解释它的意义．

证 ☞ (a) 由 $F = F(t, x)$，

$$F_x = F_x \qquad F_{\dot{x}} = 0$$

代入欧拉方程，

$$F_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

(b) 当在 F 中没有 $\dot{x}$ 项时，最优化问题是静态的而非动态的．因此，对于最优化的条件同静态最优化相同，即

$$F_x = 0$$

20.33　证明，如果欧拉方程的应用导致一个不含 x 和 t 的二阶微分方程，则这个二阶微分方程能转化为一个一阶微分方程，且能用方程(16.1)的方式求解．用 20.8 节的方程(20.22)证明．

证 ☞ 由方程(20.22)，

$$\ddot{x} = i\dot{x} + \frac{b}{2a}$$

由于在(20.22)中没有 x 或 t 项，所以，通过如下所设，它能转化为一阶线性微分方程，

$$u = \dot{x} \qquad 且 \qquad \dot{u} = \ddot{x}$$

代入上面的(20.22)，整理得

$$\dot{u} - iu = \frac{b}{2a}$$

这能由(16.1)的公式求解．设 $v = -i$，$z = b/2a$，

$$u = e^{-\int(-i)\mathrm{d}t}\left(A + \int\frac{b}{2a}e^{\int(-i)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= e^{it}\left(A + \int\frac{b}{2a}e^{-it}\mathrm{d}t\right)$$

求余下的积分，

$$u = e^{it}\left[A + \left(-\frac{1}{i}\right)\frac{b}{2a}e^{-it}\right]$$

$$u = Ae^{it} - \frac{b}{2ai}$$

但由定义 $u = \dot{x}$，所以我们必须再积分求 $x(t)$. 与通常积分记号一致，用 c_1 代替 A.

$$x(t) = \frac{c_1}{i}e^{it} - \frac{b}{2ai}t + c_2 \tag{20.44}$$

设 $t_0 = 0, t_1 = 1$，由边值条件得

$$x(0) = \frac{c_1}{i} + c_2 = 0 \qquad c_2 = -\frac{c_1}{i}$$

$$x(T) = \frac{c_1}{i}e^{iT} - \frac{b}{2ai}T + c_2 = N$$

将 $c_2 = -c_1/i$ 代入 $x(T)$ 中，解 c_1，

$$\frac{c_1}{i}e^{T} - \frac{b}{2ai}T - \frac{c_1}{i} = N$$

$$\frac{c_1}{i}(e^{iT} - 1) = N + \frac{b}{2ai}T$$

$$c_1 = \frac{i\{N + [b/(2ai)]T\}}{e^{iT} - 1} \tag{20.45}$$

最后，代入(20.44)、并注意到(20.45)中的 i 将消去 c_1/i 中的 i，则得一个候选极值曲线：

$$x(t) = \frac{N + [b/(2ai)]T}{e^{iT} - 1}e^{it} - \frac{b}{2ai}t - \frac{N + [b/(2ai)]T}{e^{iT} - 1}$$

$$= \left(N + \frac{b}{2ai}T\right)\left(\frac{e^{it} - 1}{e^{iT} - 1}\right) - \frac{b}{2ai}t \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

同 20.8 节的工作进行比较，注意到，不必求积分就可将二阶微分方程转化为一阶微分方程降低了求解工作的繁琐程度.

变分记号

20.34 证明，算子 δ 和 d/dt 是交换的，即，证明

$$\delta\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(\delta x)$$

证 ☞ 由(20.19)和(20.20)

$$\delta x = mh \qquad 且 \qquad \delta\dot{x} = m\dot{h}$$

这里，m 是一个任意常数，h 是任意函数 $h = h(t)$. 右端的 $\dot{x}$ 用 dx/dt 代替，

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = m\dot{h}$$

将 $\dot{h}$ 用 dh/dt 表示，而 m 是一个常数，

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(mh)$$

然后代入(20.19)，

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta x)$$

20.35 给定

$$\int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$$

证明，用变分记号表示，极值曲线的必要条件是

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} F[t,\ x(t),\ \dot{x}(t)]dt = 0$$

证 ☞ 将 δ 移进积分号内，

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta F[t,\ x(t),\ \dot{x}(t)]dt = 0$$

由(20.21)，

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right)\mathrm{d}t = 0$$

代入(20.19)和(20.20)

$$\delta x = mh \qquad \delta \dot{x} = m\dot{h}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}mh + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}m\dot{h}\right)\mathrm{d}t = 0$$

除以任意常数 m，

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{20.46}$$

由例 2 欧拉方程的证明，方程(20.46)与方程(20.18)恒等，能以同样的方法得到.

第二十一章　最优控制原理

21.1　术语

*最优控制原理*是 20 世纪中期在动态优化领域发展起来的，它能处理任何由变分法解决的问题．更重要的是，优化控制原理比变分法更强有力，因为它能解决一些变分法无法解决的问题，如隅解，和其他变分法不容易解决的问题，例如函数导数的约束问题．

在优化控制原理中，目的是寻找称为控制变量的最优时间路径的一个*控制变量*，记为 y．以前我们用变分法解决最优时间路径时称为*状态变量*的变量，现继续表示为 x．状态变量总有等于 $\dot{x}$ 的*运动或转移方程*．选择控制变量的时间路径以使泛函在满足状态变量约束条件下最优．

优化控制原理涉及连续时间，有限时间域，和固定端点三种类型．它通常写为

$$\max J = \int_0^T f[x(t), y(t), t]\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = g[x(t), y(t), t]$$
$$x(0) = x_0 \qquad x(T) = x_T \tag{21.1}$$

这里 J = 被最优化的泛函值；$y(t)$ = 控制变量，这样叫是因为它的值被选择或控制来优化 J；$x(t)$ = 状态变量，它随着时间约束中等于 $\dot{x}$ 的不同方程集而变化，它的值也由约束中控制变量间接决定；t = 时间．一个优化控制问题的解界定出控制变量 $y(t)$ 的最优动力时间路径．

21.2　哈密顿和最优控制原理最大化的必要条件

满足状态变量约束的泛函动态优化问题涉及到一个*哈密顿函数* H，它与凹规划中的拉格朗日函数相似．由(21.1)，哈密顿函数定义为

$$H[x(t), y(t), \lambda(t), t] = f[x(t), y(t), t] + \lambda(t)g[x(t), y(t), t] \tag{21.2}$$

这里 $\lambda(t)$ 称为*共态变量*．与拉格朗日乘子相似，共态变量 $\lambda(t)$ 估计相关状态变量 $x(t)$ 的边际值或影子价格．从(21.2)，构造哈密顿函数．只将积分号下的被积函数与共态变量 $\lambda(t)$ 和约束乘积相加即可．

假定哈密顿在 y 是可微分的并严格凹，那么有一个内部解而不是端点解，最大化的必要条件是

1. $$\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$
2. (a) $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$　　(b) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$
3. (a) $x(0) = x_0$　　(b) $x(T) = x_T$

前面两个条件称为*最大化原理*，第三个条件称为*边界条件*．第二个条件中两个运动方程一般称为哈密顿系统或*典型系统*．对于最小化，如凹规划一样，仅给目标函数乘 -1．如果解不包含端点，第一个条件中 $\partial H/\partial y$ 不需要等于零，但 H 必须关于 y 最大．为了更清楚见第 13 章例 9 和图 13-1(b)，(c)．我们通常假定内部解．

例 1　使用第 21.2 节中的条件解决下面的最优控制问题：

$$\text{Max}\int_0^3 (4x - 5y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = 8y$$
$$x(0) = 2 \qquad x(3) = 117.2$$

A 从(21.1),建立哈密顿函数.

$$H = 4x - 5y^2 + \lambda(8y)$$

B 假定一个内部解,应用最大化原则.

1.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = -10y + 8\lambda = 0$$
$$y = 0.8\lambda \tag{21.3}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$\dot{\lambda} = -4 \tag{21.4}$$

(b)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$
$$\dot{x} = 8y$$

但根据(21.3),$y = 0.8\lambda$.因此,

$$\dot{x} = 8(0.8\lambda) = 6.4\lambda \tag{21.5}$$

使用最大化原则,得到两个微分方程,现在我们用来求解状态变量 $x(t)$和共态变量 $\lambda(t)$.

通过积分(21.4)找到共态变量.

$$\lambda(t) = \int \dot{\lambda}\,dt = \int -4dt = -4t + c_1 \tag{21.6}$$

把(21.6)代入(21.5),

$$\dot{x} = 6.4(-4t + c_1) = -25.6t + 6.4c_1$$

积分,

$$x(t) = \int(-25.6t + 6.4c_1)dt$$
$$x(t) = -12.8t^2 + 64c_1t + c_2 \tag{21.7}$$

C 利用边界条件确定积分常量.将 $x(0) = 2$, $x(3) = 117.2$ 应用到(21.7),

$$x(0) = -12.8(0)^2 + 6.4c_1(0) + c_2 = 2 \qquad c_2 = 2$$
$$x(3) = -12.8(3)^2 + 6.4c_1(3) + 2 = 117.2 \qquad c_1 = 12$$

接着把 $c_1 = 12$ 和 $c_2 = 2$ 代入(21.7)和(21.6),有

$$\begin{aligned} x(t) &= -12.8t^2 + 76.8t + 2 \qquad \text{状态变量} \\ \lambda(t) &= -4t + 12 \qquad \text{共同变量} \end{aligned} \tag{21.8}$$

D 最后,我们可用两种方法中的任一种找到控制变量 $y(t)$的最终解.

1. 从(21.3),$y(t) = 0.8\lambda$,因此

$$y(t) = 0.8(-4t + 12) = -3.2t + 9.6 \qquad \text{控制变量}$$

2. 或求出(21.8)中的微分,

$$\dot{x} = -25.6t + 76.8$$

我们把 $\dot{x}$ 代入约束中的运动方程,

$$\dot{x} = 8y$$
$$-25.6t + 76.8 = 8y$$

$$y(t)=-3.2t+9.6 \qquad \text{控制变量}$$

在端点赋值,

$$y(0)=-3.2(0)+9.6=9.6$$
$$y(3)=-3.2(3)+9.6=0$$

控制变量的最优路径是从(0,9)开始到(3,0)约束的线段,以 -3.2 为斜率.对于包含固定端点的相似问题,也见问题 21.1~21.3.

21.3 最优控制最大化的充分条件

假定描述最优控制最大化的必要条件的最大化原则满足,充分条件也满足,如果:

1. 目标泛函 $f[x(t),y(t),t]$ 和约束 $g[x(t),y(t),t]$ 可微并关于 x 和 y 联合凹.

2. 当约束关于 x 和 y 为非线性时,$\lambda(t)\geqslant 0$,如果约束为线性时,λ 可取任何符号.线性函数既是凹的也是凸的,但不是严格凹也不是严格凸的.对于非线性函数用行列式很容易检验联合凹性.给出函数二阶微分的行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

如果行列式是负定的,那么函数是严格凹的,

$$|\boldsymbol{D}_1|=f_{xx}<0 \qquad \text{且} \qquad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|>0$$

如果行列式是半负定的,那么函数是简单凹的,

$$|\boldsymbol{D}_1|=f_{xx}\leqslant 0 \qquad \text{且} \qquad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|\geqslant 0$$

一个负定行列式表明全局最大,因此也是最大值的充分条件.一个半负定行列式表明局部最大,如果对变量每种可能顺序的检验有以上结论,则它也是最大值的充分条件.

例 2 下面说明例 1 中问题的充分条件.目标泛函为非线性的,求出二阶导数并利用行列式检验.

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} \qquad \text{这里 } |\boldsymbol{D}_1|=0 \quad \text{且} \quad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|=0$$

$\boldsymbol{D}$ 不是严格负定,但由于 $|\boldsymbol{D}_1|\leqslant 0$ 和 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|\geqslant 0$. $\boldsymbol{D}$ 是半负定.但是,对于半定检验我们必须以相反的顺序检验变量.

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{这里 } |\boldsymbol{D}_1|=-10 \quad \text{且} \quad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|=0$$

两种行列式检验均是半负定,所以目标泛函 f 在 x 和 y 处联合凹的.因为约束是线性的,它也是连接凹的,这并不需要检验.因此我们可以得出结论,泛函的确取得最大.

21.4 有一个自由端点的最优控制原理

涉及一个有限时间域的连续时间和一个自由端点的最优控制问题的一般格式是

$$\max J=\int_0^T f[x(t),y(t),t]\mathrm{d}t \tag{21.9}$$

满足

$$\dot{x}=g[x(t),y(t),t]$$
$$x(0)=x_0 \qquad x(T) \quad \text{自由}$$

这里积分上限 $x(T)$ 不确定.假定存在一个内部解,前两个最大条件保持不变,但第三个条件或边界条件改变:

1. $$\frac{\partial H}{\partial y}=0$$

2. (a) $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t}=\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial x}{\partial t}=\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$

3. (a) $x(0)=x_0$　　(b) $\lambda(T)=0$

这里最后的一个条件称为自由端点的横截条件.横截条件的合理性从我们凹规划中学到的直接得来.如果 x 在 T 的值自由变化,约束一定是松弛的且影子价格 λ 在 T 的值必须为零,即 $\lambda(T)=0$.对于包含自由端点的问题,见例3,例4和问题21.4～21.7.

例3　用第21.4节的条件来求解下面的包含自由端点的最优控制问题:

$$\max\int_0^2(3x-2y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x}=8y$$

$$x(0)=5\qquad x(2)\quad 自由$$

A　从(21.1),

$$H=3x-2y^2+\lambda(8y)$$

B　假定一个内部解并应用最大化原理.

1.
$$\frac{\partial H}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-4y+8\lambda=0$$

$$y=2\lambda \tag{21.10}$$

2. (a)
$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}=-3 \tag{21.11}$$

(b)
$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\dot{x}=8y$$

但从(21.10),$y=2\lambda$.因此,

$$\dot{x}=8(2\lambda)=16\lambda \tag{21.12}$$

由最大化原理,得到两个微分方程,由此可求解出状态变量 $x(t)$和共态变量 $\lambda(t)$.积分(21.11),

$$\lambda(t)=\int\dot{\lambda}\mathrm{d}t=\int-3\mathrm{d}t=-3t+c_1 \tag{21.13}$$

把(21.13)代入(21.12),

$$\dot{x}=16(-3t+c_1)=-48t+16c_1$$

积分,

$$x(t)=-24t^2+16c_1t+c_2 \tag{21.14}$$

C　现在利用边界条件确定积分常量.

1. 以自由端点的横截条件 $\lambda(T)=0$ 开始.这里

$$\lambda(2)=0$$

代入(21.13),

$$\lambda(2)=-3(2)+c_1=0$$

$$c_1=6$$

因此,

$$\lambda(t)=-3t+6\qquad 共态变量 \tag{21.15}$$

2. 现把 $c_1=6$ 代入(21.14),

$$x(t)=-24t^2+16(6)t+c_2$$

$$x(t)=-24t^2+96t+c_2$$

并应用最初的边界条件，$x(0)=5$.

$$x(0)=-24(0)^2+96(0)+c_2=5 \qquad c_2=5$$

因此

$$x(t)=-24t^2+96t+5 \quad 状态变量 \tag{21.16}$$

D　于是控制变量可用两种方法中任一种得到.

1. 从(21.10)，$y(t)=2\lambda$. 由(21.15)代入，

$$y(t)=2(-3t+6)=-6t+12 \qquad 控制变量 \tag{21.17}$$

2. 或求出(21.16)的导数，

$$\dot{x}=-48t+96$$

并代入约束中的转移方程，

$$\dot{x}=8y$$
$$-48t+96=8y$$
$$y(t)=-6t+12 \quad 控制变量$$

在端点处赋值，

$$y(0)=-6(0)+12=12$$
$$y(2)=-6(2)+12=0$$

控制变量的最优路径是从(0,12)开始到(2,0)结束的线段，斜率是 -6.

例4　例 3 中的充分条件可用与例 2 相同的方法找到. 求出目标泛函的二阶导数并应用行列式检验，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \quad 这里\ |\boldsymbol{D}_1|=0 \quad 且 \quad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|=0$$

$\boldsymbol{D}$ 不是负定的，但由于 $|\boldsymbol{D}_1|\leqslant 0$ 和 $|\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|\geqslant 0$，它是半负定的. 但是，对于半定检验我们必须以相反的顺序检验变量.

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 这里\ |\boldsymbol{D}_1|=-4 \quad 且 \quad |\boldsymbol{D}_2|=|\boldsymbol{D}|=0$$

两种行列式检验均是半负定，目标泛函 f 关于 x 和 y 是联合凹的. 因为约束是线性的，它不需要检验，泛函取得最大.

21.5　端点的不等约束

如果状态变量的终端值满足不等约束，$x(T)\geqslant x_{\min}$，只要它不违反约束 $x_{\min}$ 设定的值，最优值 $x^*(T)$ 可自由选择. 如果 $x^*(T)>x_{\min}$，约束是各松弛的则问题转化为一个自由端点的问题. 因此

$$\lambda(T)=0 \qquad 当\ x^*(T)>x_{\min}$$

如果 $x^*(T)<x_{\min}$，约束是紧的，则令 $x(T)=x_{\min}$，问题转化为一个固定点问题，即

$$\lambda(T)\geqslant 0 \quad 当\ x^*(T)=x_{\min}$$

为一致性表现，有时端点条件用类似于库恩-塔克条件的单一式子表达，即

$$\lambda(T)\geqslant 0 \quad x(T)\geqslant x_{\min} \quad [x(T)-x_{\min}]\lambda(T)=0$$

在实践中，可直接解出在端点的不等约束的问题. 首先把它看作自由端点求解问题. 如果状态变量的最优值大于端点条件的最低要求，即如果 $x^*(T)\geqslant x_{\min}$，解为所求. 如果 $x^*(T)<x_{\min}$，置终点值等于约束的值，即 $x(T)=x_{\min}$，作为固定端点问题求解. 该方法在例 5 和例 6 中说明，致于更进一步的解释和扩展内容见例 7 和问题 21.7～21.10.

例5

$$\operatorname{Max}\int_0^2 (3x-2y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = 8y$$

$$x(0) = 5 \quad x(2) \geqslant 95$$

为了求解含不等约束的最优控制问题，首先把它有一个自由端点的无约束问题解决．这已在例3中完成，状态变量为

$$x(t) = -24t^2 + 96t + 5$$

在终点 $x = 2$ 处对(21.16)式赋值，有

$$x(2) = 101 > 95$$

因为自由端点解满足终点约束 $x(T) \geqslant 95$，约束是松弛的，所以解为所求解，从例3中(21.17)式有

$$y(t) = -6t + 12$$

例6　改变边值条件如下，重新求解例5，

$$x(0) = 5 \qquad x(2) \geqslant 133$$

A　从例5我们知道在自由端点条件下最优化后状态变量的值是

$$x(2) = 101 < 133$$

它不满足新的端点约束．这意味着约束是紧的，则我们求解固定端点的泛函最优化问题，

$$x(0) = 5 \qquad x(2) = 133$$

B　当我们把问题看成例3中自由端点问题解决时，前两步保持不变．使用最大化原理，我们有

(21.10)式中，　$y = 2\lambda$

(21.11)式中，　$\dot{\lambda} = -3$

(21.12)式中，　$\dot{x} = 16\lambda$

(21.13)式中，　$\lambda(t) = -3t + c_1$

(21.14)式中，　$x(t) = -24t^2 + 16c_1 t + c_2$

现在继续求解固定端点问题．

C　连续在(21.14)中应用 $x(0) = 5$ 和 $x(2) = 133$，有

$$x(0) = -24(0)^2 + 16c_1(0) + c_2 = 5 \qquad c_2 = 5$$

$$x(2) = -24(2)^2 + 16c_1(2) + 5 = 133 \qquad c_1 = 7$$

接着，把 $c_1 = 7, c_2 = 5$ 代入(21.13)和(21.14)，得到

$$\lambda(t) = -3t + 7 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = -24t^2 + 112t + 5 \qquad \text{状态变量}$$

D　可用我们熟悉的两种方法中任一种求控制变量，再一次习惯地采用第一种．从(21.10)式，

$$y(t) = 2\lambda = 2(-3t + 7) = -6t + 14$$

例7　根据21.5节的规则，对终端不等式约束问题，首先优化满足一个自由端点的哈密顿函数．对那个自由端点，我们令 $\lambda(T) = 0$，即允许状态变量的边际值趋于零．事实上，这样做意味着只要由约束设定的最小值满足，状态变量对我们下再有任何价值．我们只对时间 T 内的状态变量感兴趣．

但是，大多数变量有值，且我们的兴趣通常会超过一些限制很窄的时界．在这些情况下我们不能把状态变量边际值减小为零的看作自由商品．我们宁愿保留状态变量的最小值在时间 T 之外仍有用．这意味着最大化使其满足由约束最小值确定的固定端点值．在这些情况下，$\lambda(T) > 0$，约束是紧的，如果是自由商品，我们尽量使用最少的状态变量．

21.6　哈密顿现值

优化控制问题经常涉及到折现，如

$$\max J = \int_0^T e^{-\rho t} f[x(t), y(t), t] dt$$
$$\dot{x} = g[x(t), y(t), t]$$
$$x(0) = x_0 \qquad x(T) \text{ 自由}$$

哈密顿折现或哈密顿现值为

$$H = e^{-\rho t} f[x(t), y(t), t] + \lambda(t) g[x(t), y(t), t]$$

但是折现因数 $e^{-\rho t}$ 的出现使必要条件微分复杂化．但是如果令 $\mu(t) = \lambda(t) e^{\rho t}$，构成一个新的哈密顿现值

$$H_c = He^{\rho t} = f[x(t), y(t), t] + \mu(t) g[x(t), y(t), t] \tag{21.18}$$

它通常更容易求解且仅需要对前面必要条件组两处进行调整．把 21.2 节的条件 2(a)转变为相应的哈密顿现值，有

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\rho t}$$

求出 $\lambda(t) = \mu(t) e^{-\rho t}$ 的导数，有

$$\dot{\lambda} = \dot{\mu} e^{-\rho t} - \rho \mu e^{-\rho t}$$

令 λ'S 二个式了相等，并取消通常的 $e^{-\rho t}$ 项，整理，得到调整后的 2(a)条件：

$$\dot{\mu} = \rho \mu - \frac{\partial H_c}{\partial x}$$

第二个调整是把 $\lambda(t) = \mu(t) e^{-\rho t}$ 代入边界条件．对于自由端点的横截条件从 $\lambda(T) = 0$ 变为 $\mu(T) e^{-\rho t} = 0$.

简言之，给出(21.18)式中的哈密顿现值并假定一个内部解，最优化的必要条件是

1. $$\frac{\partial H_c}{\partial y} = 0$$

2. a) $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = \dot{\mu} = \rho \mu - \dfrac{\partial H_c}{\partial x}$　　b) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \dfrac{\partial H_c}{\partial \mu}$

3. a) $x(0) = x_0$　　b) $\mu(T) e^{-\rho t} = 0$

如果解不出现在端点，在第一个条件中 $\partial H_c / \partial y$ 不需要等于零，但 H_c 必须关于 y 最大．由于 $H_c = He^{\rho t}$，使 H_c 最大的 y 的值也使 H 最大，因为 $e^{\rho t}$ 关于 y 最大时看成一个常数．21.3 节的充分条件保持不变，如例 9 所见．哈密顿现值的最大化在例 8 和 9 中讨论，并在问题 21.11～21.12中继续．

例 8

$$\max \int_0^2 e^{-0.02t} (x - 3x^2 - 2y^2) dt$$

满足

$$\dot{x} = y - 0.5x$$
$$x(0) = 93.91 \quad x(2) \quad \text{自由}$$

A　建立哈密顿现值．

$$H_c = x - 3x^2 - 2y^2 + \mu(y - 0.5x)$$

B　假定一个内部解，应用调整后的最大化原理．

1.
$$\frac{\partial H_c}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial y}=-4y+\mu=0$$

$$y=0.25\mu \tag{21.19}$$

2. (a)　$\dot{\mu}=0.02\mu-(1-6x-0.5\mu)$

$$\dot{\mu}=0.52\mu+6x-1 \tag{21.20}$$

(b) $\dot{x}=\frac{\partial H_c}{\partial \mu}=y-0.5x$

从(21.19)代入,

$$\dot{x}=0.25\mu-0.5x \tag{21.21}$$

用矩阵形式表示(21.20)到(21.21)的两个联立一阶微分方程,并用 19.3 节的技术求解,

$$\begin{bmatrix}\dot{\mu}\\ \dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.52 & 6\\ 0.25 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\ x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{B}$$

特征方程是

$$|\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}0.52-r & 6\\ 0.25 & -0.5-r\end{vmatrix}=0$$

由(19.3)式,特征根是

$$r_1, r_2=\frac{0.02\pm\sqrt{(0.02)^2-4(-1.76)}}{2}$$

$$r_1=1.3367 \qquad r_2=-1.3167$$

对于 $r_1=1.33687$,特征向量是

$$\begin{bmatrix}0.52-1.3367 & 6\\ 0.25 & -0.5-1.3367\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.8167 & 6\\ 0.25 & -1.8367\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$

$$-0.8167c_1+6c_2=0 \qquad c_1=7.3466c_2$$

$$y_c^1=\begin{bmatrix}7.3466\\ 1\end{bmatrix}k_1e^{1.3367t}$$

对于 $r_2=-1.3167$ 特征向量是

$$\begin{bmatrix}0.52+1.3167 & 6\\ 0.25 & -0.5+1.3167\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.8367 & 6\\ 0.25 & 1.8167\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=0$$

$$0.8367c_1+6c_2=0 \qquad c_1=-3.2667c_2$$

$$y_c^2=\begin{bmatrix}-3.2667\\ 1\end{bmatrix}k_2e^{-1.3167t}$$

从(19.5),特解是　$\bar{\boldsymbol{Y}}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$\bar{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}\bar{\mu}\\ \bar{x}\end{bmatrix}=-\left(\frac{1}{-1.76}\right)\begin{bmatrix}-0.5 & 6\\ -0.25 & 0.52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.28\\ 0.14\end{bmatrix}$$

把通解和特解加起来,有

$$\mu(t)=7.3466k_1e^{1.3667t}-3.2667k_2e^{-1.3167t}+0.28 \tag{21.22}$$

$$x(t)=k_1e^{1.3667t}+k_2e^{-1.3167t}+0.14 \tag{21.23}$$

C　接下来应用边界条件.

1. 从自由端点的横断条件,$\mu(T)e^{-\rho t}=0$,在 $T=2$ 有

$$\mu(2)e^{-0.02(2)} = 0$$

代入 $\mu(2)$,

$$(7.3466k_1e^{1.3667(2)} - 3.2667k_2e^{-1.3167(2)} + 0.28)e^{-0.04} = 0$$

$$113.0282k_1 - 0.2350k_2 + 0.2690 = 0 \tag{21.24}$$

2. 在 $x(0)=93.91$ 赋值 $x(t)$,

$$k_1 + k_2 + 0.14 = 93.91 \tag{21.25}$$

联立求解(21.24)和(21.25),

$$k_1 = 0.2 \qquad k_2 = 93.57$$

接着把 $k_1=0.2, k_2=93.57$ 代入(21.22)和(21.23),我们得到

$$\mu(t) = 1.4693e^{1.3667t} - 305.6651e^{-1.3167t} + 0.28 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = 0.2e^{1.3667t} + 93.57e^{-1.3167t} + 0.14 \qquad \text{状态变量}$$

D　控制变量的解可用两种通常方法中任一种找到.我们选择较容易的.由(21.19), $y(t)=0.25\mu$.从上面的共态变量代入

$$y(t) = 0.3673e^{1.3667t} - 76.4163e^{-1.3167t} + 0.07 \qquad \text{控制变量}$$

例 9　服从通常规则的充分条件.

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

由于 $|\boldsymbol{D}_1| = -6<0$ 和 $|\boldsymbol{D}_2| = 24>0$, $\boldsymbol{D}$ 是负定的,使 f 在 x 和 y 严格凹.由于 g 在 x 和 y 线性,全局最大的充分条件满足.

习题解答

固定端点

21.1

$$\max\int_0^2(6x - 4y^2)dt$$

满足

$$\dot{x} = 16y$$

$$x(0) = 24 \qquad x(2) = 408$$

解　☞ A　哈密顿是

$$H = 6x - 4y^2 + \lambda(16y)$$

B　根据最大化原理,必要条件是

1.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -8y + 16\lambda = 0$$

$$y = 2\lambda \tag{21.26}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -6 \tag{21.27}$$

(b)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 16y$$

由(21.26),

$$\dot{x} = 16(2\lambda) = 32\lambda \tag{21.28}$$

积分(21.27),

$$\lambda(t) = -6t + c_1 \tag{21.29}$$

代入(21.28)然后积分,

$$\dot{x} = 32(-6t + c_1) = -192t + 32c_1$$

$$x(t) = -96t^2 + 32c_1t + c_2 \tag{21.30}$$

C　利用边界条件　$x(0)=24, x(2)=408$,

$$x(0) = c_2 = 24 \qquad c_2 = 24$$

$$x(2) = -96(2)^2 + 32c_1(2) + 24 = 408 \qquad c_1 = 12$$

把 $c_1=12$ 和 $c_2=24$ 代入(21.29)和(21.30),

$$\lambda(t) = -6t + 12 \qquad \text{共态变量} \tag{21.31}$$

$$x(t) = -96t^2 + 384t + 24 \qquad \text{状态变量} \tag{21.32}$$

D　对于控制变量解,我们把(21.31)代入(12.26),

$$y(t) = 2\lambda = 2(-6t + 12) = -12t + 24 \qquad \text{控制变量}$$

或求出(21.32)的导数并代入约束 $\dot{x}=16y$ 中

$$\dot{x} = -192t + 384 = 16y$$

$$y(t) = -12t + 24 \qquad \text{控制变量}$$

E　用与例 2 类似的方式证明充分条件满足

21.2

$$\max\int_0^1 (5x + 3y - 2y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = 6y$$

$$x(0) = 7 \qquad x(1) = 70$$

解 ☞ A　哈密顿是

$$H = 5x + 3y - 2y^2 + \lambda(6y)$$

B　根据最大化原理,必要条件是

1.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 3 - 4y + 6\lambda = 0$$

$$y = 0.75 + 1.5\lambda \tag{21.33}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -5 \tag{21.34}$$

(b)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 6y$$

由(21.33)

$$\dot{x} = 6(0.75 + 1.5\lambda) = 4.5 + 9\lambda \tag{21.35}$$

积分(21.34),

$$\lambda(t) = -5t + c_1 \tag{21.36}$$

代入(21.35)然后积分,

$$\dot{x} = 4.5 + 9(-5t + c_1) = 4.5 - 45t + 9c_1$$

$$x(t) = 4.5t - 22.5t^2 + 9c_1t + c_2 \tag{21.37}$$

C　应用边界条件,$x(0)=7, x(1)=70$,

$$x(0) = c_2 = 7 \qquad c_2 = 7$$

$$x(1) = 4.5 - 22.5 + 9c_1 + 7 = 70 \qquad c_1 = 9$$

把 $c_1=9$ 和 $c_2=7$ 代入(21.36)和(21.37),

$$\lambda(t) = -5t + 9 \qquad \text{共态变量} \tag{21.38}$$

$$x(t) = -22.5t^2 + 85.5t + 7 \qquad \text{状态变量} \tag{21.39}$$

D　把(21.38)代入(21.33),得

$$y(t) = 0.75 + 1.5(-5t + 9) = -7.5t + 14.25 \qquad \text{控制变量}$$

E　充分条件再次与例 2 相似.

21.3

$$\max\int_0^5 (-8x - y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x}=0.2y$$

$$x(0)=3 \qquad x(5)=5.6$$

解 ☞ A

$$H=-8x-y^2+\lambda(0.2y)$$

B 1.

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-2y+0.2\lambda$$

$$y=0.1\lambda \tag{21.40}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-(-8)=8 \tag{21.41}$$

(b)

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=0.2y$$

由(21.40)

$$\dot{x}=0.2(0.1\lambda)=0.02\lambda \tag{21.42}$$

积分(21.41),

$$\lambda(t)=8t+c_1 \tag{21.43}$$

代入(21.42)然后积分,

$$\dot{x}=0.02(8t+c_1)=0.16t+0.02c_1$$

$$x(t)=0.08t^2+0.02c_1t+c_2 \tag{21.44}$$

C 应用边界条件, $x(0)=3, x(5)=5.6$,

$$x(0)=c_2=3, \quad c_2=3$$

$$x(5)=0.08(5)^2+0.02c_1(5)+3=5.6 \qquad c_1=6$$

把 $c_1=6$ 和 $c_2=3$ 代入(21.43)和(21.44),

$$\lambda(t)=8t+6 \qquad \text{共态变量} \tag{21.45}$$

$$x(t)=0.08t^2+0.12t+3 \qquad \text{状态变量} \tag{21.46}$$

D 把(21.45)代入(21.40),得

$$y(t)=0.1\lambda=0.8t+0.6 \qquad \text{控制变量}$$

或求出(21.46)的导数并把它代入约束 $\dot{x}=0.2y$,

$$\dot{x}=0.16t+0.12=0.2y$$

$$y(t)=0.8t+0.6 \qquad \text{控制变量}$$

自由端点

21.4

$$\max\int_0^4(8x-10y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x}=24y$$

$$x(0)=7 \quad x(4) \qquad \text{自由}$$

解 ☞ A

$$H=8x-10y^2+\lambda(24y)$$

B 1.

$$\frac{\partial H}{\partial y}=-20y+24\lambda=0$$

$$y=1.2\lambda \tag{21.47}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-(8)=-8 \tag{21.48}$$

(b)

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=24y$$

从(21.47),

$$\dot{x}=24(1.2\lambda)=28.8\lambda \tag{21.49}$$

积分(21.48),

$$\lambda(t)=-8t+c_1$$

代入(21.49)

$$\dot{x}=28.8(-8t+c_1)=-230.4t+28.8c_1$$

然后积分,

$$x(t) = -115.2t^2 + 28.8c_1t + c_2 \tag{21.50}$$

C　现在应用横截条件 $\lambda(4)=0$.

$$\lambda(4) = -8(4) + c_1 = 0 \quad c_1 = 32$$

因此,

$$\lambda(t) = -8t + 32 \quad \text{共态变量} \tag{21.51}$$

接着把 $c_1=32$ 代入(21.50)并应用初始条件 $x(0)=7$.

$$x()t = -115.2t^2 + 921.6t + c_2$$

$$x(0) = 0 + 0 + c_2 = 7 \quad c_2 = 7$$

因此

$$x(t) = -115.2t^2 + 921.6t + 7 \quad \text{状态变量}$$

D　接着把(21.51)代入(21.47),有最优解

$$y(t) = 1.2(-8t + 32) = -9.6t + 38.4 \quad \text{控制变量}$$

E　像例 2 中一样,很容易证明充分条件.

21.5

$$\max\int_0^3 (2x + 18y - 3y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = 12y + 7$$

$$x(0) = 5 \quad x(3)\text{ 自由}$$

解 ☞ A

$$H = 2x + 18y - 3y^2 + \lambda(12y + 7)$$

B　1.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 18 - 6y + 12\lambda = 0$$

$$y = 3 + 2\lambda \tag{21.52}$$

2. (a)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(2) = -2 \tag{21.53}$$

(b)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 12y + 7$$

由(21.52)

$$\dot{x} = 12(3 + 2\lambda) + 7 = 43 + 24\lambda \tag{21.54}$$

积分(21.53),

$$\lambda(t) = -2t + c_1$$

代入(21.54),

$$\dot{x} = 43 + 24(-2t + c_1) = 43 - 48t + 24c_1$$

然后积分,

$$x(t) = 43t - 24t^2 + 24c_1t + c_2 \tag{21.55}$$

C　现在应用横截条件 $\lambda(3)=0$.

$$\lambda(3) = -2(3) + c_1 = 0 \quad c_1 = 6$$

因此

$$\lambda(t) = -2t + 6 \quad \text{共态变量} \tag{21.56}$$

接着把 $c_1=6$ 代入(21.51)并应用初始条件 $x(0)=5$.

$$x(t) = -24t^2 + 187t + c_2$$

$$x(0) = 0 + 0 + c_2 = 5 \quad c_2 = 5$$

因此

$$x(t) = -24t^2 + 187t + 5 \quad \text{状态变量}$$

D　接着把(21.56)代入(21.52),有最优解,

$$y(t) = 3 + 2(-2t + 6) = -4t + 15$$

E　同例 2 一样,充分条件很容易证实.

21.6

$$\max\int_0^1 (4y - y^2 - x - 2x^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x} = x + y$$

$$x(0) = 6.15 \qquad x(1) \quad 自由$$

解 ☞ A
$$H = 4y - y^2 - x - 2x^2 + \lambda(x + y)$$

B 1.
$$\frac{\partial H}{\partial y} = 4 - 2y + \lambda = 0$$
$$y = 2 + 0.5\lambda \tag{21.57}$$

2. (a)
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-1 - 4x + \lambda) = 1 + 4x - \lambda$$

(b)
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x + y$$

从(21.57)中 y,
$$\dot{x} = x + 2 + 0.5\lambda$$

用矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B}$$

利用(19.3)求特征根

$$r_1, r_2 = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(-3)}}{2} = \frac{\pm 3.464}{2} = \pm 1.732$$

对应于 $r_1 = 1.732$ 的特征向量是

$$|\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -1 - 1.732 & 4 \\ 0.5 & 1 - 1.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.732 & 4 \\ 0.5 & -0.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$-2.732c_1 + 4c_2 = 0 \qquad c_1 = 1.464c_2$$
$$y_c^1 = \begin{bmatrix} 1.464 \\ 1 \end{bmatrix} k_1 e^{1.732t}$$

对应于 $r_2 = -1.732$ 的特征向量是

$$|\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -1 + 1.732 & 4 \\ 0.5 & 1 + 1.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.732 & 4 \\ 0.5 & 2.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$0.732c_1 + 4c_2 = 0 \qquad c_1 = -5.464c_2$$
$$y_c^2 = \begin{bmatrix} -5.464 \\ 1 \end{bmatrix} k_2 e^{-1.732t}$$

对于特解 $\bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = -\left(\frac{1}{-3}\right) \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.33 \\ -0.83 \end{bmatrix}$$

结合余解和特解,

$$\lambda(t) = 1.464k_1 e^{1.732t} - 5.464k_2 e^{-1.732t} - 2.33 \tag{21.58}$$
$$x(t) = k_1 e^{1.732t} + k_2 e^{-1.732t} - 0.83 \tag{21.59}$$

C 对于自由端点 $\lambda(1) = 0$ 应用横截条件,

$$\lambda(1) = 8.2744k_1 - 0.9667k_2 - 2.33 = 0$$

从初始条件 $x(0) = 6.15$,

$$x(0) = k_1 + k_2 - 0.83 = 6.15$$

联立求解,

$$k_1 = 0.98, \quad k_2 = 5.95$$

代入(21.58)和(21.59),

$$\lambda(t) = 1.4347e^{1.732t} - 32.511e^{-1.732t} - 2.33 \qquad 共态变量 \tag{21.60}$$
$$x(t) = 0.98e^{1.732t} + 5.95e^{-1.732t} - 0.83 \qquad 状态变量 \tag{21.61}$$

D 最后,把(21.60)代入(21.57),得

$$y(t) = 0.7174e^{1.732t} - 16.256e^{-1.732t} + 0.835$$

E 对于充分条件,由于 $f = 4y - y^2 - x - 2x^2$, $f_x = -1 - 4x$ 和 $f_y = 4 - 2y$,有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|D_1| = -4 < 0 \qquad |D_2| = 8 > 0$$

因此，D 是负定的，f 严格凹的.由于约束$(x+y)$是线性的因而也是凹的，最优控制原理的全局最大化的充分条件满足.

不等式约束

21.7

$$\max\int_0^4 (8x - 10y^2)\mathrm{d}t$$

满足
$$\dot{x} = 24y$$
$$x(0) = 7 \qquad x(4) \geqslant 2000$$

解 ☞ 1. 对于不等约束，我们通常以自由端点为开始.这个问题以前在问题 21.4 中看做自由端点解决，有

$$\lambda(t) = -8t + 32 \qquad \text{共态变量}$$
$$x(t) = -115.2t^2 + 921.6t + 7 \qquad \text{状态变量}$$
$$y(t) = 1.2(-8t + 32) = -9.6t + 384 \qquad \text{控制变量}$$

在 $t=4$ 处赋值状态变量，有

$$x(4) = 1850.2 < 2000 \qquad \text{违反约束}$$

2. 面对违反约束，必须重新解决带有新的固定终点的问题：

$$x(0) = 7 \qquad x(4) = 2000$$

这个新问题的解实际上直到第二部分结尾与问题 21.4 相同，有

$$\lambda(t) = -8t + c_1$$
$$x(t) = -115.2t^2 + 28.8c_1t + c_2$$

现在，我们利用每个边界条件，而不是横截条件

$$x(0) = -115.2t^2 + 28.8c_1t + c_2 = 7 \qquad c_2 = 7$$

把 $c_2=7$ 代入终点边界并求解，

$$x(4) = -115.2t^2 + 28.8c_1t + 7 = 2000 \qquad c_1 = 33.3$$

这给出

$$\lambda(t) = -8t + 33.3 \qquad \text{共态变量}$$
$$x(t) = -115.2t^2 + 959.04t + 7 \qquad \text{状态变量}$$

从(21.46)有

$$y(t) = 1.2(-8t + 33.3) = -9.6t + 39.96 \qquad \text{控制变量}$$

21.8

$$\max\int_0^1 (5x + 3y - 2y^2)\mathrm{d}t$$

满足
$$\dot{x} = 6y$$

解 ☞

$$x(0) = 7 \qquad x(1) \geqslant 70$$

1. 对于不等约束，我们通常以自由端点为开始.这里我们可以把研究建立在问题 21.2 中在固定端点情况下的研究成果之上，那里我们在(21.36)和(21.37)中发现

$$\lambda(t) = -5t + c_1$$
$$x(t) = 4.5t - 22.5t^2 + 9c_1t + c_2$$

现应用横截条件 $\lambda(T)=0$,

$$\lambda(1) = -5 + c_1 = 0 \qquad c_1 = 5$$

然后代入 $c_1=5$，并对于初始条件求解，

$$x(0) = 4.5t - 22.5t^2 + 45t + c_2 = 7 \qquad c_2 = 7$$

这导致

$$\lambda(t) = -5t + 5 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = -22.5t^2 + 49.5t + 7 \qquad \text{状态变量}$$

那么从(21.33)中 $y = 0.75 + 1.5\lambda$，解是

$$y(t) = -7.5t + 8.25 \qquad \text{控制变量}$$

为了看解是否可接受，在 $t = 1$ 处赋值状态变量.

$$x(1) = -22.5t^2 + 49.5t + 7 = 34 < 70 \qquad \text{违反约束}$$

2. 面对违反约束，必须重新解决带有新的固定终点 $x(1) = 70$ 的问题. 我们以前在问题 21.2 中做过，那里我们发现

$$\lambda(t) = -5t + 9 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = -22.5t^2 + 85.5t + 7 \qquad \text{状态变量}$$

$$y(t) = -7.5t + 14.25 \qquad \text{控制变量}$$

为了决定控制变量是否是可接受解，我们在终点处赋值状态变量，看它是否满足约束.

$$x(1) = -22.5t^2 + 85.5t + 7 = 70$$

21.9

$$\max\int_0^1 (4y - y^2 - x - 2x^2)\,dt$$

满足

$$\dot{x} = x + y$$

$$x(0) = 6.15 \qquad x(1) \geq 5$$

解 ☞ 我们已经在问题 21.6 中解决了这个函数在自由端点时的最优化. 那里我们有,

$$\lambda(t) = 1.4347e^{1.732t} - 32.784e^{-1.732t} - 2.33 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = 0.98e^{1.732t} + 6e^{-1.732t} - 0.83 \qquad \text{状态变量}$$

$$y(t) = 0.7174e^{1.732t} - 16.392e^{-1.732t} + 0.835 \qquad \text{控制变量}$$

在终点处赋值状态变量，有

$$x(1) = 0.98e^{1.732t} + 6e^{-1.732t} - 0.83 = 5.7705 > 5$$

因为满足端点约束，我们已经找到问题的解.

21.10 在新的端点约束下重新解决问题 21.9,

$$x(0) = 6.15 \qquad x(1) \geq 8$$

由问题 21.9 我们知道自由端点解不满足新的终点约束 $x(1) \geq 8$. 因此，我们必须在固定端点条件下优化，为此，设 $x(1) = 8$.

解 ☞ 从(21.55)和(21.56)开始，我们有

$$\lambda(t) = 1.464k_1e^{1.732t} - 5.464k_2e^{-1.732t} - 2.33$$

$$x(t) = k_1e^{1.732t} + k_2e^{-1.732t} - 0.83$$

应用端点条件，有

$$\text{在 } x(0) = 6.15, \qquad k_1 + k_2 - 0.83 = 6.15$$

$$\text{在 } x(1) = 8, \qquad 5.6519k_1 + 0.1769k_2 - 0.83 = 8$$

联立求解,

$$k_1 = 1.3873 \qquad k_2 = 5.5927$$

代入(21.55)和(21.56)，立即重复以上过程,

$$\lambda(t) = 2.0310e^{1.732t} - 30.5585e^{-1.732t} - 2.33 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = 1.3873e^{1.732t} + 5.5927e^{-1.732t} - 0.83 \qquad \text{状态变量}$$

接着从(21.54)中 $y = 2 + 0.5\lambda$，导出解,

$$y(t) = 1.0155e^{1.732t} - 15.2793e^{-1.732t} - 0.835 \qquad \text{控制变量}$$

最后，为了确信解可接受，在 $t = 1$ 处赋值状态变量,

$$x(1) = 1.3873e^{1.732t} + 5.5927e^{-1.732t} - 0.83 = 8$$

发现它满足终点约束

哈密顿现值

21.11

$$\max\int_0^3 e^{-0.05t}(xy - x^2 - y^2)\,dt$$

满足 $$\dot{x} = x + y$$

$$x(0) = 134.35 \qquad x(3) \quad 自由$$

解 A　建立哈密顿现值

$$H_c = xy - x^2 - y^2 + \mu(x + y)$$

B　假定一个内部解，我们首先应用修正最大化原理.

1.
$$\frac{\partial H_c}{\partial y} = x - 2y + \mu = 0$$

$$y = 0.5(x + \mu) \tag{21.62}$$

2. (a)
$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial x}$$

$$\dot{\mu} = 0.05\mu - (y - 2x + \mu)$$

$$\dot{\mu} = -0.95\mu + 2x - y$$

$$\dot{\mu} = -0.95\mu + 2x - 0.5(x + \mu)$$

使用(21.62)，

$$\dot{\mu} = -1.45\mu + 1.5x$$

(b)
$$\dot{x} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = x + y$$

由(21.62)

$$\dot{x} = 1.5x - 0.5\mu$$

用矩阵形式，

$$\begin{bmatrix}\dot{\mu}\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1.45 & 1.5\\ 0.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\ x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

特征方程是

$$|\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix}-1.45 - r & 1.5\\ 0.5 & 1.5 - r\end{vmatrix} = 0$$

由(19.3)，特征根是

$$r_1, r_2 = \frac{0.05 \pm \sqrt{(0.05)^2 - 4(-2.925)}}{2}$$

$$r_1 = 1.7354 \qquad r_2 = -1.6855$$

对应于 $r_1 = 1.7354$，特征向量是

$$\begin{bmatrix}-1.45 - 1.7354 & 1.5\\ 0.5 & 1.5 - 1.7354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3.1854 & 1.5\\ 0.5 & -0.2354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = 0$$

$$-3.1854c_1 + 1.5c_2 = 0 \qquad c_2 = 2.1236c_1$$

$$y_c^1 = \begin{bmatrix}1\\ 2.1326\end{bmatrix}k_1 e^{1.7354t}$$

对应于 $r_2 = -1.6855$，特征向量是

$$\begin{bmatrix}-1.45 + 1.6855 & 1.5\\ 0.5 & 1.5 + 1.6855\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.2355 & 1.5\\ 0.5 & 3.1855\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = 0$$

$$0.2355c_1 + 1.5c_2 = 0 \qquad c_1 = -6.3694c_2$$

$$y_c^2 = \begin{bmatrix}-6.3694\\ 1\end{bmatrix}k_2 e^{-1.6855t}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 中 $\boldsymbol{B} = 0$，　$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix}\bar{\mu}\\ \bar{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

再加上余解，得到通解，有

$$\mu(t)=k_1e^{1.7354t}-6.3694k_2e^{-1.6855t} \qquad (21.63)$$

$$x(t)=2.1236k_1e^{1.7354t}+k_2e^{-1.6855t} \qquad (21.64)$$

C　接着为了自由端点应用横截条件，$\mu(T)e^{-\rho t}=0$.

$$\mu(3)e^{-0.05(3)}=(k_1e^{1.7354(3)}-6.3694k_2e^{-1.6855(3)})e^{-0.15}=0$$

$$156.9928k_1-0.0349k_2=0 \qquad (21.65)$$

在 $x(0)=134.25$ 处赋值 $x(t)$,

$$x(0)=2.1236k_1+k_2=134.25 \qquad (21.66)$$

联立求解(21.65)和(21.66),

$$k_1=0.03 \qquad k_2=134.1819$$

接着把 $k_1=0.03,k_2=134.1819$ 代入(21.60)和(21.61)，得到

$$\mu(t)=0.03e^{1.7354t}-854.6582e^{-1.6855t} \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t)=0.0637e^{1.7354t}+134.1819e^{-1.6855t} \qquad \text{状态变量}$$

D　由(21.62)得，$y(t)=0.5(x+\mu)$. 上面的 $x(t),\mu(t)$

$$y(t)=0.04685e^{1.7354t}-360.2381e^{-1.6855t} \qquad \text{控制变量}$$

E　对于充分条件，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

由于 $|\boldsymbol{D}_1|=-2<0$，和 $|\boldsymbol{D}_2|=3>0$，$\boldsymbol{D}$ 是负定的，则 f 关于 x 和 y 处严格凹. 由于 g 关于 x 和 y 是线性的，全局最大的充分条件满足.

21.12

$$\max\int_0^1 e^{-0.08t}(10x+4y+xy-2x^2-0.5y^2)\mathrm{d}t$$

满足

$$\dot{x}=x+2y$$

$$x(0)=88.52 \qquad x(1) \qquad \text{自由}$$

解 ☞ A

$$H_c=10x+4y+xy-2x^2-0.5y^2+\mu(x+2y)$$

B　假定一个内部解，

1.

$$\frac{\partial H_c}{\partial y}=4+x-y+2\mu=0$$

$$y=x+2\mu+4 \qquad (21.67)$$

2. (a)

$$\dot{\mu}=\rho\mu-\frac{\partial H_c}{\partial x}$$

$$\dot{\mu}=0.08\mu-(y-4x+\mu+10)$$

$$\dot{\mu}=-0.92\mu+4x-y-10$$

将(21.67)式中的 y 代入得

$$\dot{\mu}=-2.92\mu+3x-14$$

(b)

$$\dot{x}=\frac{\partial H_c}{\partial \mu}=x+2y$$

由(21.67),

$$\dot{x}=4\mu+3x+8$$

用矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\mu}\\ \dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.92 & 3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\ x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-14\\ 8\end{bmatrix}$$

这里特征方程是

$$|\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-2.92-r & 3\\ 4 & 3-r\end{vmatrix}=0$$

特征根是

$$r_1,r_2=\frac{0.08\pm\sqrt{(0.08)^2-4(-20.76)}}{2}$$

$$r_1 = 4.5965 \qquad r_2 = -4.5165$$

对应于 $r_1 = 4.5965$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix} -2.92-4.5965 & 3 \\ 4 & 3-4.5965 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.5165 & 3 \\ 4 & -1.5965 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-7.5165c_1 + 3c_2 = 0 \qquad c_2 = 2.5055c_1$$

$$y_c^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5055 \end{bmatrix} k_1 e^{4.5965t}$$

对应于 $r_2 = -4.5165$ 的特征向量是

$$\begin{bmatrix} -2.92+4.5165 & 3 \\ 4 & 3+4.5165 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5965 & 3 \\ 4 & 7.5165 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$1.5965c_1 + 3c_2 = 0 \qquad c_1 = -1.8791c_2$$

$$y_c^2 = \begin{bmatrix} -1.8791 \\ 1 \end{bmatrix} k_2 e^{-4.5165t}$$

对于特解，$\bar{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = -\left(\frac{1}{-20.76}\right)\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & -2.92 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -14 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1792 \\ 1.5723 \end{bmatrix}$$

为了求通解组合余函数和特解，

$$\mu(t) = k_1 e^{4.5965t} - 1.8791k_2 e^{-4.5165t} - 3.1792 \tag{21.68}$$

$$x(t) = 2.5055k_1 e^{4.5965t} + k_2 e^{-4.5165t} + 1.5723 \tag{21.69}$$

C 应用横截条件 $\mu(T)e^{-\rho t} = 0$，

$$\mu(1)e^{-0.08(1)} = (k_1 e^{4.5965(1)} - 1.8791k_2 e^{-4.5165(1)} - 3.1792)e^{-0.08} = 0$$

$$91.5147k_1 - 0.0189k_2 - 2.9348 = 0 \tag{21.70}$$

在 $x(0) = 88.52$ 处赋值 $x(t)$，

$$x(0) = 2.5055k_1 + k_2 + 1.5723 = 88.52 \tag{21.71}$$

同时求解(21.70)和(21.71)，

$$k_1 = 0.05 \qquad k_2 = 86.8230$$

接着把它们的值代入(21.68)和(21.69)，发现

$$\mu(t) = 0.05e^{4.5965t} - 163.1491e^{4.5165t} - 3.1792 \qquad \text{共态变量}$$

$$x(t) = 0.1253e^{4.5965t} + 86.8230e^{-4.5165t} + 1.5723 \qquad \text{状态变量}$$

D 由(21.67)，$y(t) = x + 2\mu + 4$. 为求 x 和 μ 从上面代入，

$$y(t) = 0.2253e^{4.5965t} - 239.4752e^{-4.5165t} - 0.7861 \qquad \text{控制变量}$$

E 对于充分条件，

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$|\boldsymbol{D}_1| = -4 < 0$ 和 $|\boldsymbol{D}_2| = 3 > 0$. $\boldsymbol{D}$ 是负定的，且 f 关于 x 和 y 均是严格凹的. 因为约束关于 x 和 y 是线性的，所以全局最大的充分条件满足.